Problem proporcionalne zastupljenosti i cjelobrojna optimizacija

Tušek, Marija

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni diplomski studij Financijska matematika i statistika

Marija Tušek

Problem proporcionalne zastupljenosti i cjelobrojna optimizacija

Diplomski rad

Osijek 2023.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni diplomski studij Financijska matematika i statistika

Marija Tušek

Problem proporcionalne zastupljenosti i cjelobrojna optimizacija

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Tomislav Marošević

Osijek 2023.

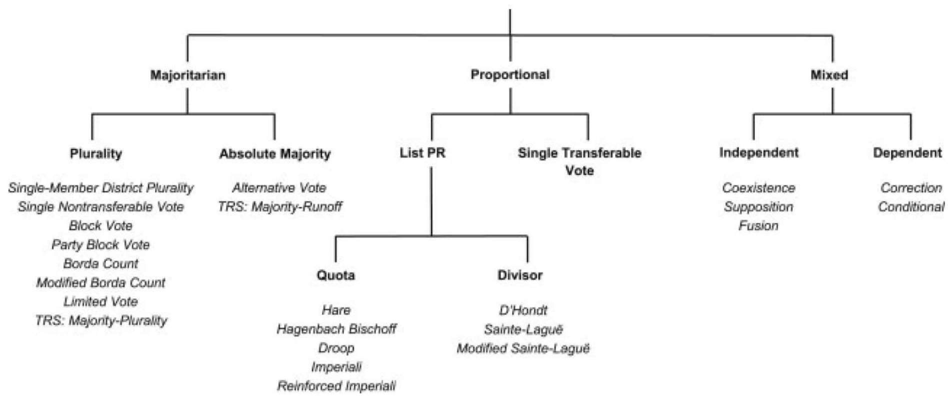
Sadržaj

1 Metode dodjele mjesta

Izborni sustavi konstruirani su od mnoštva strukturnih faktora, te su moguće njihove razne kombinacije. Svaki izborni sustav sastoji se od raznih pravila koja glasačima omogućuju izražavanje političkih preferencija za određenu stranku ili kandidata. Po tim pravilima se utvrđuje distribucija političkih mandata ili zastupničkih mjesta u parlamentu, te su stoga krucijalna u određivanju političkih pobjednika i gubitnika izbora. Određena politička stranka može s istim osvojenim brojem glasova pobijediti na temelju jednog izbornog sustava, dok bi na temelju pravila nekog drugog izbornog sustava bila proglašena gubitnikom izbora. Stoga, izborni rezultati ne ovise samo o glasačima, već i o izbornim pravilima koja kreatorima izbornih sustava omogućuju određen utjecaj na ishod izbora.

Većinski sustavi dodjeljuju mjesta kandidatu ili kandidatima s najvećim brojem glasova. Sustav apsolutne većine sustav je u kojem se od kandidata zahtijeva da dobije natpolovičnu većinu glasova, iako je u nekim slučajevima u zadnjem krugu potrebno samo dobiti najveći broj glasova. Sustav relativne većine sustav je u kojem je potrebno za pobjedu dobiti veći broj glasova od svih drugih kandidata. U mješovitim sustavima zastupnici se biraju kroz kombinaciju sustava proporcionalne i većinske zastupljenosti.

Širenjem demokracije i izbornog prava javili su se izborni sustavi koji se temelje na proporcionalnoj zastupljenosti. Dok je primarni cilj većinskih sustava stabilnost vladajućeg tijela, ideja proporcionalne reprezentacije temelji na nastojanju da izborni rezultat (broj dobivenih glasova) što je bolje moguće odražava izborni ishod (broj dodijeljenih zastupničkih mjesta). Zajedno s razvojem stranačke politike, pojava proporcionalne zastupljenosti zahtijevala je izradu raznih matematičkih metoda za problem proporcionalne alokacije mjesta. Važnost dizajna raznih alokacijskih metoda leži u činjenici da je udio mjesta u nekom predstavničkom tijelu na temelju udjela dobivenih glasova jako rijetko cijeli broj. Stoga je izazov raznih matematičkih metoda u alokaciji unaprijed fiksnog broja mjesta na način da sastav zastupničkih mjesta što proporcionalnije odražava distribuciju glasova na izborima.



Slika 1: Klasifikacija izbornih metoda

U okviru teme rada nadalje će fokus biti stavljen samo na proporcionalne alokacijske metode.

1.1 Proporcionalne alokacijske metode

Prilikom problema alokacije mjesta u izbornim sustavima proporcionalne alokacijske metode (PR) su dizajnirane s primarnim ciljem da svakoj stranci bude dodijeljen jednak postotak zastupljenosti kao i postotak glasova koje je dobila na izborima. Princip PR izbornih sustava je da svaki glas zaslužuje svoju zastupljenost u vladi, te da bi svaka uključena politička stranka trebala biti zastupljena proporcionalno svojoj snazi u biračkom tijelu. Egzaktnu proporcionalnost je često nemoguće postići, te se stoga koriste razne metode kako bi se smanjila razina neproporcionalnosti kreirana preslikavanjem skupa glasova u puno manji skup mjesta.

Metode raspodjele mjesta u proporcionalnim izbornim sustavima mogu se razvrstati u dvije skupine:

- metode kvocijenta
- metode djelitelja.

1.1.1 Metode kvocijenta

Metode kvocijenta/količnika baziraju se na kvocijentu broja glasova v_i koje je svaka stranka dobila i broja mjesta s_i koji bi svaka stranka trebala dobiti nakon alokacije mjesta nekom alokacijskom metodom. Specifičnost metoda ove skupine je da inicijalno alociraju mjesta na temelju cjelobrojnog dijela promatrane kvote, a potom preostala mjesta alociraju na temelju najvećih ostataka.

U Tablici 1 navedene su osnovne metode kvocijenta, gdje je V oznaka za ukupan zbroj glasova danih svim strankama, a S je oznaka za ukupan broj zastupničkih mjesta koja se dodjeljuju.

Metoda	**Kvota**
metoda najvećih ostataka/Hamilton metoda (LAR)/prirodna kvota	$s_i \approx q_i = \frac{v_i}{V} \cdot S$
metoda Droop kvote (DRO)	$s_{D_i} \approx q_{D_i} = \frac{v_i}{V} \cdot (S+1)$
metoda Imperiali kvote (IMP)	$s_{D_i} \approx q_{D_i} = \frac{v_i}{\frac{V}{(S+1)}+1}$

Tablica 1: Najpoznatije metode kvocijenta

U dijelu Algoritam 1 opisan je postupak dodjele zastupničkih mjesta metodom najvećih ostataka (LAR).

Algoritam 1 Metoda najvećih ostataka

Input: ukupan broj mjesta S, broj stranaka n, vektor dobivenih glasova $v = (v_1, \ldots, v_n)$
Output: vektor alociranih mjesta strankama $s = (s_1, \ldots, s_n)$

function Metoda najvećih ostataka(S, n, v)
  $J \leftarrow \{1, 2, \ldots, n\}$
  for $i \leftarrow 1$ to n **do**
    $q_i \leftarrow v_i \frac{S}{P}$
    $r_i \leftarrow q_i - \lfloor q_i \rfloor$
  end for
  for $i \leftarrow 1$ to n **do**
    $s_i \leftarrow \lfloor q_i \rfloor$
  end for
  while $S - \sum_{i=1}^{n} s_i \neq 0$ **do**
    odaberi j^* td. $r_{j^*} = \max\{r_h : r_h = q_h - \lfloor q_h \rfloor, h \in J\}$
    $s_{j^*} \leftarrow s_{j^*} + 1$
    $J \leftarrow J \backslash j^*$
  end while
  return $s = (s_1, \ldots, s_n)$

Algoritam 1: Pseudokod algoritma LAR

1.1.2 Metode djelitelja

Metode djelitelja baziraju se na rastućem nizu djelitelja $d(0) < d(1) < d(2) < \cdots < d(S-1)$. Za svaku stranku i za svakog djelitelja promatramo omjer broja glasova v_i koje je dobila ta stranka i odgovarajućeg djelitelja $d(k), k = 0, 1, \ldots, S-1$. Tada se dobivaju sljedeći omjeri:

$$\frac{v_i}{d(0)} > \frac{v_i}{d(1)} > \frac{v_i}{d(2)} > \cdots > \frac{v_i}{d(S-1)}, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Finalno, ukupnih S mjesta tada se alocira strankama kojima pripada S najvećih takvih omjera.

U Tablici 2 navedene su osnovne metode djelitelja.

Metoda	**Djelitelji**
metoda najmanjih djelitelja (SD)	$d(k) = k$ $(0, 1, 2, \ldots)$
danska metoda (DA)	$d(k) = 1 + 3k$ $(1, 4, 7, \ldots)$
metoda harmonijske sredine (HM)	$d(k) = \frac{2k(k+1)}{2k+1}$ $(0, \approx 1.33, 2.4, \ldots)$
metoda jednakih razmjera (EP)	$d(k) = \sqrt{k(k+1)}$ $(0, \approx 1.41, \ldots)$
metoda Sainte-Laguë/Webster (SL)	$d(k) = 1 + 2k$ $(1, 3, 5, \ldots)$
modificirana Sainte-Laguë (MS)	$(1.4, 3, 5, 7, \ldots)$
metoda d'Hondt (DH)	$d(k) = k + 1$ $(1, 2, 3 \ldots)$
belgijska (BE)	$d(k) = 1 + \frac{k}{2}$ $(1, 1.5, 2, 2.5, \ldots)$

Tablica 2: Najpoznatije metode djelitelja

U dijelu Algoritam 2 opisan je postupak dodjele zastupničkih mjesta općenito metodom djelitelja.

Algoritam 2 Metoda djelitelja

Input: ukupan broj mjesta S, broj stranaka n, vektor dobivenih glasova $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, kriterij djelitelja $d(s)$ - monotono rastuća funkcija td. $d(s) \in [s, s+1]$

Output: vektor alociranih mjesta strankama $s = (s_1, \ldots, s_n)$

function METODA DJELITELJA$(S, n, v, d\ )$
  for $i \leftarrow 1$ to n **do**
    $s_i \leftarrow 0$
  end for
  for $i \leftarrow 1$ to n **do**
    $\rho_i = \frac{v_i}{d(s_i)})$
  end for
  $l \leftarrow 0$
  while $S - l \neq 0$ **do**
    $l \leftarrow l + 1$
    odaberi l^* takav da $\rho_{j^*} = \max\{\rho_h : 1 \leq h \leq n\}$
    $s_{j^*} = s_{j^*} + 1$
    ažuriraj $\rho_{j^*} = \frac{v_{j^*}}{d(s_{j^*})}$
  end while
  return $s = (s_1, \ldots, s_n)$

Algoritam 2: Pseudokod algoritma metode djelitelja

Napomenimo da u slučaju kada je $d(0) = 0$ (npr. metode SD, HM, EP), uzima se po konvenciji da je $\frac{v_i}{0} = +\infty$, te da je $\min\{+\infty, a\} = a$ i $\max\{+\infty, a\} = +\infty$, $\forall a \in \mathbb{R}$. Tada se tom metodom svakoj stranci nužno dodjeljuje po jedno mjesto bez obzira na broj dobivenih glasova, čak i u teoretskom slučaju kada stranka nije dobila niti jedan glas.

1.1.3 Svojstva proporcionalnih alokacijskih metoda

Iako metode kvocijenta i metode djelitelja obje pripadaju proporcionalnim alokacijskim metodama može se pokazati da imaju različita matematička svojstva.

- **Monotonost doma**
  Ovo svojstvo osigurava da ukoliko se ukupan broj mjesta poveća sa S na $S+1$, nijedna stranka neće dobiti broj mjesta koji je manji od broja mjesta u slučaju kada do povećanja ne bi došlo. Ovakav slučaj nije isključivo teorijski već je poznat kao Alabama paradoks. Metode djelitelja ispunjavaju ovo svojstvo, dok ga metoda najvećih ostataka (LAR) ne ispunjava.

- **Ispunjenje kvote**
  Prirodna kvota definira se izrazom: $q_i\left(v_i, S\right) = \frac{v_i \cdot S}{\sum_{h=1}^{n} v_h}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$. Alokacijska metoda ispunjava Hare minimum i Hare maksimum ukoliko vrijedi $q_i - 1 \leq s_i \leq q_i + 1, \quad \forall i$. Metode djelitelja ne ispunjavaju ovo svojstvo, dok ga LAR metoda ispunjava.

- **Populacijska monotonost**
  Ovo svojstvo osigurava da stranka kojoj broj glasova raste između izbora ne može izgubiti mjesto u korist stranke kojoj je broj glasova opao. Neka je $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ n-torka koja predstavlja broj glasova, te neka je S pripadni ukupni broj raspoloživih mjesta. Nadalje, neka je $(p'_1, p'_2, \ldots, p'_n)$ analogna n-torka. Metoda je populacijski monotona ako $\forall(i, h)$ takve da $p_i \leq p'_i$ i $p_h \geq p'_h$ jedan od sljedećih uvjeta nužno vrijedi:

  1. $s'_i \geq s_i$, tj. broj mjesta rastuće stranke i se ne smanjuje
  2. $s'_h \leq s_h$, tj. broj mjesta stranke h koja se smanjuje se ne povećava
  3. $p_i = p'_i, p_h = p'_h, \quad s_i = s'_i, s_h = s'_h$, tj. nema promjene za obje stranke.

  Metode djelitelja ispunjavaju ovo svojstvo, dok ih LAR metoda ne ispunjava.

- **Droop minimum**
  Prirodno bi bilo očekivati da se kandidatu dodjeljuje mjesto samo ako ima barem $\frac{P}{S}$ glasova. No, H. Droop je pokazao da je dovoljno dobiti $\frac{P}{S+1}$ glasova da bi se dobilo

jedno mjesto, jer tada nije moguće da drugih S kandidata dobije $\frac{P}{S+1}$ glasova svaki, pri čemu uzimamo u obzir da ukupnih S mjesta dobiva S kandidata s najvećim brojem glasova. Općenito metoda ispunjava Droop minimum ako $\forall i = 1, \ldots, n$ vrijedi $s_i \geq \left\lfloor v_i \cdot \frac{S+1}{P} \right\rfloor$.

- **Konzistentnost**
  Ovo svojstvo jamči da je bilo koja parcijalna alokacija proporcionalna. Pretpostavimo da promatramo dvije stranke i i h s glasovima p_i i p_h, te neka alokacijska metoda pri povećanju broja mjesta S na $S+1$ daje dodatno mjesto stranci i. Pretpostavimo da postoji neka druga distribucija glasova u kojoj i, h još uvijek dobivaju p_i, p_h glasova, iako broj glasova drugih stranaka može biti promijenjen. Npr. ukoliko se broj mjesta povećava sa S' na $S'+1$ svojstvo konzistentnosti i dalje osigurava alokaciju dodatnog mjesta stranci i. Metode djelitelja su konzistentne jer alociraju mjesta na usporedbi prioriteta alokacije dodatnog mjesta strankama, a taj prioritet je nepromijenjen ukoliko promatramo neku podgrupu stranaka. LAR metoda ne ispunjava ovo svojstvo jer alocira mjesta po prioritetu najvećih ostataka, a oni su promjenjivi samom promjenom ukupnog broja mjesta, čak i ako je broj glasova ostao nepromijenjen.

- **Stabilnost**
  Neka izborna metoda dodjeljuje s' mjesta stranki s v' glasova, te s'' mjesta stranci s v'' glasova. Ukoliko ove dvije stranke koaliraju, njihov ukupan broj glasova iznosi $v' + v''$. Svojstvo stabilnosti osigurava alokaciju s mjesta pri čemu vrijedi $s' + s'' - 1 \leq s \leq s' + s'' + 1$. Superaditivne alokacijske metode potiču koalicije, jer osiguravaju da $s \geq s' + s''$, ali efekt na distribuciju glasova nije izvjestan. LAR metoda ispunjava svojstvo stabilnosti, kao i one metode djelitelja koje ispunjavaju sljedeći uvjet za par stranaka i i h : $d(s_i + s_h) \leq d(s_i) + d(s_h) \leq d(s_i + s_h + 1)$.

Analizom svojstava proporcionalnih alokacijskih metoda zaključujemo da je odabir alokacijske metode svojevrsan kompromis između metode djelitelja i LAR metode budući da niti jedna ne dominira po broju poželjnih svojstava. Glavna nedoumica je u izboru između dva najbitnija matematička svojstva - monotonosti doma i ispunjenja kvote.

Primjer:

Neka je broj stranaka $n = 5$, vektor dobivenih glasova $v = (1182, 3319, 5259, 7179, 9061)$, $P = \sum_{i=1}^{5} v_i = 26000$, te neka je ukupno $S = 26$ zastupničkih mjesta.

Metode kvocijenta predstavit ćemo na primjeru metode najvećih ostataka. LAR metodom dobivamo sljedećih 5 kvota $q_i = \frac{v_i}{P} \cdot S, i = 1, \ldots, 5$.

$$q_1 = 1.182, \quad q_2 = 3.319, \quad q_3 = 5.259, \quad q_4 = 7.179, \quad q_5 = 9.061,$$

$$r_1 = 0.182, \quad r_2 = 0.319, \quad r_3 = 0.259, \quad r_4 = 0.179, \quad r_5 = 0.061.$$

Na temelju cjelobrojnog dijela kvote strankama je inicijalno alociran sljedeći broj mjesta:

$$s_1 = 1, \quad s_2 = 3, \quad s_3 = 5, \quad s_4 = 7, \quad s_5 = 9.$$

Preostalo 1 nedodijeljeno mjesto konačno se dodjeljuje stranci 2 kojoj pripada najveći ostatak 0.319 te je stoga vektor mjesta oblika $s = (1, 4, 5, 7, 9)$.

Metode djelitelja pokazat ćemo na primjeru d'Hondtove metode. Geografski gledano, ova metoda je najzastupljenija u Europi, te se trenutno koristi i za dodjelu mjesta u Hrvatskom saboru.

$$(1182, 3319, 5259, 7179, \mathbf{9061})$$
$$(1182, 3319, 5259, \mathbf{7179}, 4530.5)$$
$$(1182, 3319, \mathbf{5259}, 3589.5, 4530.5)$$
$$\vdots$$

Najprije promatramo prvu petorku brojeva $\frac{v_i}{1}, i = 1, \ldots, 5$.. Prvo mjesto se alocira stranci 5 jer njoj pripada najveći omjer. Za dodjelu drugog mjesta omjer 5. stranke zamjenjuje se omjerom $\frac{v_5}{2}$, te se drugo mjesto dodjeljuje stranci 4 budući da sada ona ima najveći omjer. Nadalje, promatramo sljedeću petorku gdje je omjer četvrte stranke zamijenjen omjerom $\frac{v_4}{2}$, te se treće mjesto dodjeljuje stranci 3. Postupak se analogno nastavlja sve do 26. mjesta. Konačno, dobivamo vektor alociranih mjesta strankama d'Hondt metodom, $s = (1, 3, 5, 7, 10)$.

Analizom dobivenih vektora mjesta vidimo da su ove dvije proporcionalne alokacijske metode rezultirale različitim vektorima alociranih mjesta strankama. Tradicionalne teoretske diskusije smatraju da je upravo LAR metoda najproporcionalnija i da je daje najbolje rezultate pri problemu alociranja mjesta strankama. Nadalje, kroz primjer se uočava da je d'Hondtova metoda svojevrsno pogodovala stranci 5 kojoj pripada najveći broj glasova $v_5 = 9061$. Česta kritika ove metode je da ne daje dovoljno proporcionalne rezultate, tj. upravo njeno pogodovanje velikim političkim strankama nauštrb manjih stranaka koje ne uspijevaju platiti cijenu jednog zastupničkog mjesta koju ova metoda maksimizira. Ali metoda se koristi jer se smatra efektivnom budući da osigurava formiranje većine i stoga osigurava parlamentarnu operabilnost.

Kroz ovaj rad i pristup cjelobrojne optimizacije pokazat će sa da diskusije o proporcionalnosti neke alokacijske metode mjesta, te stoga i svaki pokušaji mjerenja te proporcionalnosti ne daju direktne odgovore već samo otvaraju novi prostor za diskusiju. Pokazat ćemo da sve proporcionalne alokacijske metode zapravo rješavaju problem proporcionalne zastupljenosti minimizirajući određene indekse neproporcionalnosti (kao funkcije cilja) koji nisu jedinstveni, te stoga njihova usporedba, iako tradicionalno uobičajena u analizi izbornih sustava, ipak ne može dati jednoznačne rezultate.

U sljedećoj tablici navedena je dodjela zastupničkih mjesta u ovom primjeru obzirom na različite proporcionalne izborne metode.

Metoda	Raspodjela mjesta $(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$
BE	$(0, 3, 5, 8, 10)$
DH, IMP	$(1, 3, 5, 7, 10)$
SL, MS	$(1, 3, 5, 8, 9)$
EP, DRO	$(1, 3, 6, 7, 9)$
HM, DA, LAR	$(1, 4, 5, 7, 9)$
SD	$(2, 3, 5, 7, 9)$

1.1.4 Indeksi neproporcionalnosti

Prilikom analize razlike između glasačkih i zastupničkih kvota neke alokacijske metode, formule izbornih metoda same po sebi nisu dostatne za uočavanje ovih razlika. Egzaktnu proporcionalnost je u praksi gotovo nemoguće postići jer je broj mjesta koja se dodjeljuju cjelobrojan, te se stoga se često koriste indeksi kojima se pokušava ocijeniti stupanj proporcionalnosti.

Bitan interes u analizi ovih tradicionalnih indeksa neproporcionalnosti reflektiran je i u nastojanju da se konstruiraju nove izborne metode koje bi bile robustnije. Također, moguće je i konstruirati neke nove indekse neproporcionalnosti koji bi imali poželjnija matematička svojstva korisna za analizu raznih izbornih metoda.

Neka je $\omega_i = \frac{v_i}{P}$ udio broja dobivenih glasova stranke i i $\sigma_i = \frac{s_i}{S}$ udio broja osvojenih mjesta stranke i, $i = 1, \ldots, n$.

- **Loosemore-Hanby indeks**

$$LH = \frac{\sum_{i=1}^{n} |\omega_i - \sigma_i|}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{v_i}{P} - \frac{s_i}{S} \right|$$

Loosemore–Hanby indeks mjeri narušenost principa glasanja "jedna osoba - jedan glas". Vrijednost ovog indeksa je 0 ako i samo ako $\omega_i = \sigma_i$ za svaku stranku $i = 1, 2, \ldots, n$, tj. u rijetkom slučaju egzaktne proporcionalnosti. Negativno svojstvo ovog indeksa je njegova preosjetljivost na broj stranaka n. U slučaju kada se na političkoj sceni nalazi jako veliki broj malih stranaka vrijednost Loosemore-Hanbyjevog indeksa će rasti s porastom broja stranaka, čak i slučaju kada su neke od tih stranaka toliko male da se pokazuju kao beznačajne.

- **Rae indeks**

$$R = \frac{\sum_{i \in \bar{I}} |\omega_i - \sigma_i|}{|\bar{I}|}, \qquad \text{pri čemu } |\bar{I}| = \text{kard}\,\{i : \omega_i > 0,005\}$$

Rae indeks ne uzima u razmatranje stranke koje su dobile manje od fiksnog praga od 0.5% udjela u ukupnom broju glasova, tj. Rae indeks ne uzima u razmatranje sitne stranke s vrlo malim brojem dobivenih glasova. U izbornim sustavima koji koriste izborne pragove neproporcionalnost je često neželjena posljedica. S ciljem da se osigura stabilnost vlade, smanjivanje broja stranaka koje aktivno sudjeluju na političkoj sceni dovodi do narušavanja proporcionalnosti. Indeks mjeri prosječnu razliku omjera dobivenih glasova i mjesta stranaka koje su prešle izborni prag. Razlikuje slučajeve u kojima je razlika udjela glasačkih mjesta uzrokovana velikim brojem stranaka koje proizvode male razlike u odnosu na one slučajeve u kojima je to zbog malog broja stranaka koje sve donose velike razlike. Ovo često nije moguće uočiti korištenjem LH indeksa. Rae indeks daje vrijednost 0 u slučaju egzaktne proporcionalnosti, dok u slučajevima kada je veliki broj stranaka ispod fiksnog praga indeks daje malu vrijednost i implicira da je sustav proporcionalniji nego što je zaista realna situacija.

- **Indeks najmanjih kvadrata**

$$LS = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\omega_i - \sigma_i)^2}$$

Ovaj indeks u literaturi poznat je još i kao Gallagher indeks. Indeks mjeri neproporcionalnost između dobivenih omjera mjesta i glasova. Karakteristika ovog indeksa je da pripisuje veće težine onim razlikama u omjeru dobivenih glasova i dodijeljenih mjesta koje imaju veće vrijednosti. Indeks poprima vrijednosti u intervalu $[0, 1]$. U slučaju kada bi na političkoj sceni sudjelovale samo dvije stranke, vrijednost indeksa najmanjih kvadrata bi se podudarala s vrijednostima koje daju Loosemore-Hanby i Rae indeksi. Za razliku od Loosemore-Hanby indeksa ovaj indeks je poboljšanje u smislu osjetljivosti na broj stranaka.

Do sada smo promatrali indekse koji su se bazirali na apsolutnoj razlici između omjera glasova i omjera mjesta. Nova klasa indeksa koja se bazira na relativnim razlikama omjera između glasova i mjesta preciznije mjeri podzastupljenost ili prezastupljenost stranaka nakon alokacije mjesta.

- **Sainte-Laguë indeks**

$$SL = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot \left(\frac{s_i}{v_i} - \frac{S}{P}\right)^2$$

Ovaj indeks mjeri kvadrirane razlike između omjeru $\frac{s_i}{v_i}$ i omjera ukupnog broja mjesta i glasova, pri čemu je težina uz razliku jednaka broju glasova koju je odgovarajuća stranka dobila. Indeks daje vrijednost 0 u slučaju $\frac{s_i}{v_i} = \frac{S}{P}$ za svaku stranku $i = 1, 2, \ldots, n$. Nedostatak ovog indeksa je da nije definiran u teorijskom slučaju kada barem jedna stranka nije dobila niti jedan glas. Iako se ovo čini kao nerealna situacija izvan teorijskog konteksa, neke alokacijske metode, poput metode najmanjih djelitelja, prihvaćaju ovaj slučaj. Još jedan nedostatak ovog indeksa je taj što nije ograničen odozgo, a to uzrokuje poteškoće u interpretaciji dobivenih vrijednosti indeksa. Iako je indeks najmanjih kvadrata najčešće korišten indeks u izbornim proporcionalnim sustavima, sam Gallagher je smatrao da je SL indeks bolja mjera što opravdava korištenjem

Pearsonovog χ^2 statističkog testa.

- **Indeks jednakih proporcija**

$$EP = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{\omega_i^2}{\sigma_i} - 1}$$

Izvan teoretskih okvira ovaj indeks je nepraktičan, jer u slučaju da neka stranka ne dobije niti jedno mjesto, razmatrana suma više nije konačan broj što onemogućuje interpretaciju.

- **d'Hondt indeks**

$$H = \max_{i=1,2,\ldots,n} \frac{\sigma_i}{\omega_i}$$

Ovaj indeks mjeri omjer dobivenih mjesta i glasova stranke koja je nakon alokacije mjesta ostvarila najveću prezastupljenost. Da bi neka stranka nakon alokacije mjesta bila prezastupljena mora vrijediti $\frac{s_i}{v_i} > \frac{S}{P}$. Ovaj indeks ostvaruje svoju minimalnu vrijednost 1 u slučaju egzaktne proporcionalnosti, dok maksimalnu vrijednost $+\infty$ ostvaruje ukoliko su stranci koja nije primila niti jedan glas nakon alokacije ipak dodijeljena neka mjesta. Najveći nedostatak ovog indeksa je njegova preosjetljivost na prezastupljenost kod malih stranaka. U ovom slučaju bi bilo korisno promatrati stranke koje su prešle fiksni izborni prag od 0.5% glasova ukupnog broja glasova.

Predstavimo neke teorijske matematičke rezultate koji će se pokazati kao baza za daljnje razmatranje problema.

2 Konveksne funkcije

2.1 Općenito o konveksnim funkcijama

Konveksne funkcije imaju važnu primjenu u mnogim granama matematike. Osobito su korisne pri proučavanju optimizacijskih problema s obzirom da se odlikuju brojnim poželjnim matematičkim svojstvima. Za potrebe našeg problema proporcionalne zastupljenosti i cjelobrojne optimizacije navesti ćemo neke osnovne teorijske rezultate o konveksnim funkcijama.

Definicija 2.1. Kažemo da je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ **konveksan skup**, ako za svaki $x_1, x_2 \in \Omega$ i $\forall \lambda \in [0, 1]$ vrijedi

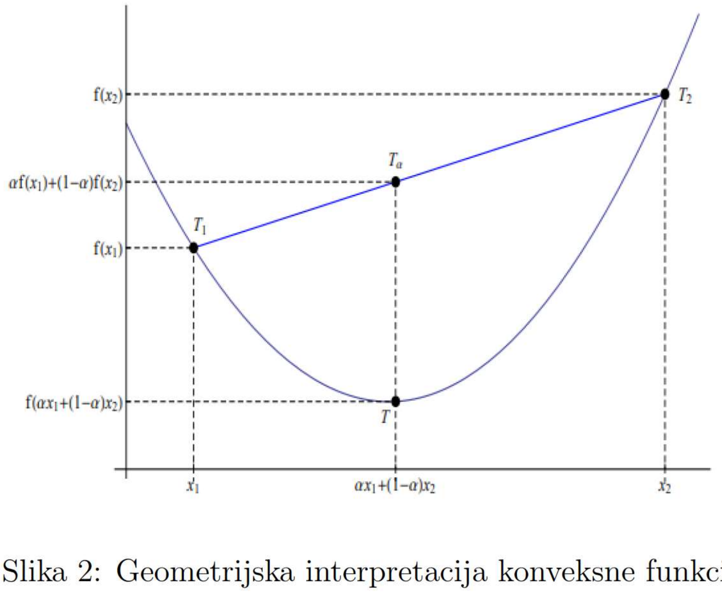
$$\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \in \Omega.$$

Svaku točku s koordinatama $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda \in [0, 1]$ nazivamo **konveksna kombinacija** od x_1 i x_2.

Definicija 2.2. Kažemo da je funkcija $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ **konveksna** ako je Ω konveksan skup i ako za sve $x_1, x_2 \in \Omega$ i svaki $\alpha \in [0, 1]$ vrijedi

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha) f(x_2).$$

Geometrijski promatrano, kod svake konveksne funkcije vrijedi da spojnica točaka $T_1(x_1, f(x_1))$ i $T_2(x_2, f(x_2))$ mora biti iznad grafa funkcije.



Slika 2: Geometrijska interpretacija konveksne funkcije

Sljedeći jednoostavan teorem je najvažniji teorem u konveksnoj optimizaciji.

Teorem 1. Neka je zadan optimizacijski problem

$$\begin{gathered}\min f(x)\\ x \in \Omega\end{gathered}$$

pri čemu je f konveksna funkcija i Ω konveksan skup. Tada je svaki lokalni minimum funkcije f ujedno i njen globalni minimum.

Dokaz ovog teorema može se vidjeti u [2].

2.2 Diskretno konveksne funkcije

Neka je $D \subset Z^n$ diskretni prostor n-torki cijelih brojeva. Susjedstvo točke $\mathbf{x} \in R^n$ definirano je kao $N(\mathbf{x}) = \{\mathbf{w} \in D | \|w - x\|_\infty < 1\}$ kao skup svih cjelobrojnih točaka u hiperkocki koja sadrži točku $\mathbf{x}$.

Definicija 2.3. Kažemo da je funkcija $f : D \to R$ **diskretno konveksna** ako za svaki $x, y \in D$ i za sve $\alpha \in (0, 1)$ vrijedi

$$\alpha f(x) + (1 - \alpha) f(y) \geq \min_{u \in \mathrm{N}(z)} f(u)$$

pri čemu $N(z) = \{u \in D : \|u - z\|_\infty < 1\}$, $z = \alpha x + (1 - \alpha) y$ i $\|u\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \{|u_i|\}$.

Važno je napomenuti da restrikcija bilo koje neprekidne konveksne funkcije na diskretnu domenu ne daje nužno diskretno konveksnu funkciju!

Definicija 2.4. Diskretna derivacija funkcije $f : D \to R$ u smjeru vektora e_i je definirana kao $\Delta_{\mathbf{e_i}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{e_i}) - f(\mathbf{x})$.

Teorem 2. Neka je $f : D \to R$ diskretno konveksna funkcija. Tada f ima rastuće diskretne derivacije u svakoj komponenti.

Dokaz teorema 2. može se vidjeti u [13].

Definicija 2.5. Funkcija $f : R^n \to R$ je **separabilna** ako se može izraziti kao zbroj funkcija $f_j : R \to R$ za $j = 1, 2, \ldots, n$.

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j).$$

Teorem 3. Neka je $f : D \to R$ diskretno konveksna funkcija. Tada f ima rastuće diskretne derivacije u svakoj komponenti.

Dokaz teorema 3. može se vidjeti u [13].

Slijedi najbitniji teorem ove klase konveksnih funkcija.

Teorem 4. Separabilna funkcija $f(x)$ je diskretno konveksna ako i samo ako svaka funkcija $f_j(x_j)$ ima rastuće diskretne derivacije.

Dokaz teorema 4. može se vidjeti u [13].

2.3 Schur-konveksne funkcije

Definicija 2.6. Za $x, y \in \mathbb{R}^n$ definiramo relaciju " $\prec$ " na sljedeći način:

$$x \prec y \text{ ako } \sum_{i=1}^{k} x_{[i]} \leq \sum_{i=1}^{k} y_{[i]} \quad \text{za } k = 1, \ldots, n-1$$

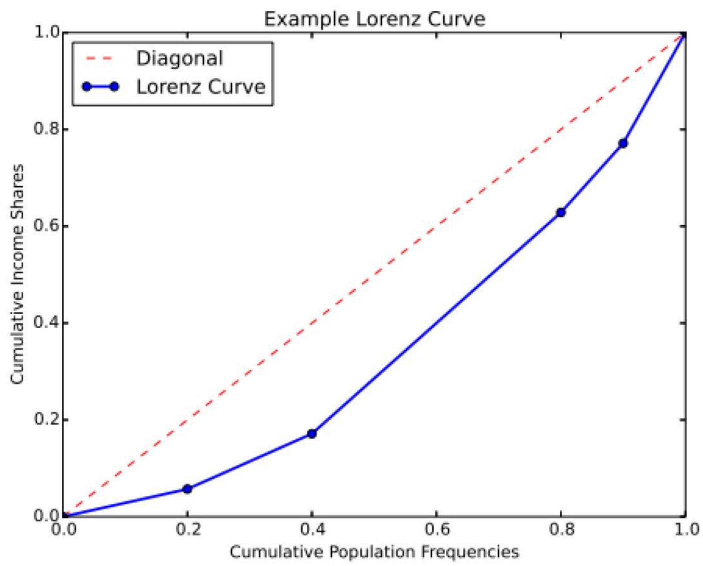
$$\sum_{i=1}^{n} x_{[i]} = \sum_{i=1}^{n} y_{[i]},$$

gdje $x_{[i]}$ označava i-ti element po veličini od vektora x, gdje su elementi od x poredani u rastućem slijedu. Kada vrijedi $x \prec y$, kažemo da je x **majoriziran** s y ili da y majorizira x.

Grafičku vizualizaciju pojma majorizacije omogućuju Lorenzove krivulje.

Mjerenje nejednakosti dohotka čest je predmet izučavanja ekonomista. Osim odredivanja distribucije dohotka, koncept ovih krivulja koristan je za usporedbu raznih distribucija u smislu koja je distribucija ujednačenija u odnosu na neku drugu.

Pretpostavimo da imamo populaciju od n jedinki i neka je v njihov poredak od one s najmanjim dohotkom do one s najvećim $x = (x_{(1)}, \ldots, x_{(n)})$. Neka su $S_0 = 0$ i $S_k = \sum_{i=1}^{k} x_{(i)}$ što interpretiramo kao ukupni dohodak k jedinki s najmanjim dohotkom. **Lorenzova krivulja** rezultat je linearne interpolacije uzastopnih točaka uzorka $\left(\frac{k}{n}, \frac{S_k}{S_n}\right)$ za $k = 0, \ldots, n$. U slučaju da je distribucija dohotka uniformna, tj. $x_{(1)} = \ldots = x_{(n)}$, Lorenzova krivulja je dužina koja spaja $(0,0)$ i $(1,1)$. Svaka druga raspršenija distribucija dohotka daje krivulju koja je konveksna (nagibi uzastopnih linearnih segmenata strogo rastu) i nalazi se ispod te dužine, te ima krajnje točke u $(0,0)$ i $(1,1)$.



Slika 3: Lorenzova krivulja diskretne distribucije

Vratimo se vizualizaciji majorizacije. Pretpostavimo da promatramo dvije populacije od n jedinki s dohotcima $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$ i $y_{(1)}, \dots, y_{(n)}$ koje imaju jednak ukupan dohodak, tj. $\sum_{i=1}^{n} x_{(i)} = \sum_{i=1}^{n} y_{(i)}$. Definiramo:

$$S_0^x = S_0^y = 0, \quad S_k^x = \sum_{i=1}^{k} x_{(i)} \quad \text{i} \quad S_k^y = \sum_{i=1}^{k} y_{(i)} \quad \text{za } k = 1, \dots, n.$$

Tada $(x_1, \dots, x_n)$ predstavlja ujednačeniju distribuciju dohotka od $(y_1 \dots, y_n)$ ako se Lorenzova krivulja koju generira $(x_1 \dots, x_n)$ nalazi iznad Lorenzove krivulje koju generira $(y_1, \dots, y_n)$, a tada vrijedi $S_k^x \geq S_k^y$, $\forall k \in \{1, \dots, n-1\}$, odnosno vrijedi:

$$\sum_{i=1}^{k} x_{(i)} \geq \sum_{i=1}^{k} y_{(i)}, \qquad \text{za } k = 1, \dots, n-1.$$

Zaključujemo da $y \prec x$. Na Slici 3 isprekidanom crvenom crtom prikazana je jednaka distribucija dohotka, dok je plavom izlomljenom crtom prikazana neka raspršenija (nejednaka) raspodjela dohotka.

Definicija 2.7. Kažemo da je funkcija $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ **Schur-konveksna** na S ako vrijedi

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq f(y_1, y_2, .., y_n)$$

za svaki $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ i $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in S$ takav da $\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y}$.

Neka je $F(x)$ funkcija distribucije. Njena kvantilna funkcija definira se kao $F^{-1}(t) = \inf\{x : F(x) \geq t, t \in [0,1]\}$. Lorenzova krivulja je graf $\{(t, q_F(t)) : t \in [0,1]\}$, gdje je

$$q_F(t) = \frac{\int_0^t F^{-1}(s)ds}{\int_0^1 F^{-1}(s)ds}.$$

Gini koeficijent je broj $Q(F)$ dobiven na temelju omjera površine koju zatvara Lorenzova krivulja i simetrala prvog kvadranta na [0,1] te površina ispod simetrale prvog kvadranta i x osi na [0,1], tj. $\frac{1}{2}$.

$$Q(F) = 2 \cdot \int_0^1 (x - q_F(x))\, dx = 1 - 2\int_0^1 q_F(x)dx.$$

Ukoliko je Gini koeficijent blizu 0, onda je mala nejednakost dohotka (odnosno onda je mala neproporcionalnost u razmjernom izbornom sustavu). U slučaju kada je Gini koeficijent blizu 1, onda je velika nejednakost dohotka (odnosno onda je velika neproporcionalnost u razmjernom izbornom sustavu).

Osim Gini koeficijenta, neki od najpoznatijih primjera Schur-konveksnih funkcija su i razne statističke mjere poput maksimuma, standardne devijacije i varijance.

3 Pohlepni algoritam

3.1 Općenito o pohlepnim algoritmima

Pohlepni algoritam je svaki algoritam koji rješava problem optimizacije odabirom lokalno optimalnog rješenja u svakom koraku, a s ciljem konačne globalne optimizacije zadanog problema. Nakon što algoritam u određenom koraku razmotri neko rješenje, odabire ga ili ga trajno ispušta iz razmatranja. Postoji mogućnost da pohlepni algoritam ne uspije uvijek doći do globalno optimalnog rješenja, jer možda ono uopće ne postoji ili se algoritam zaustavi u lokalno optimalnom rješenju.

Pohlepni algoritmi se pokazuju korisnima pri optimizaciji raznih matematičkih problema koji sadrže svojstva optimalne podstrukture i pohlepnog izbora. Neki od najpoznatijih problema gdje se koristi pohlepni pristup su problem ruksaka, problem minimalnog razapinjujućeg stabla, problem najkraćeg puta, itd.

Općenita struktura pohlepnih algoritama jest sljedeća:

- Skup kandidata
  Iz ovog skupa pohlepni algoritam odabire podskup koji sadrži rješenje. Općenito, u svakome trenutku skup svih kandidata je disjunktna unija sljedeća tri podskupa: skupa izabranih, skupa izbačenih i skupa neiskorištenih kandidata.

- Funkcija izbora
  Ova funkcija u svakom koraku pohlepnog pristupa odabire lokalno optimalnog kandidata i stavlja ga u skup rješenja. Bazirana je na funkciji cilja, a u nekim slučajevima može biti identična funkciji cilja.

- Funkcija izvedivosti
  Ova funkcija provjerava može li kandidat biti uvršten u rješenje, tj. je li unija trenutnog rješenja s novim kandidatom dopustiv skup.

- Funkcija cilja
  Funkcija koja dovodi do lokalno optimalnog rješenja. Ovu funkciju je najčešće potrebno minimizirati ili maksimizirati.

- Funkcija rješenja
  Funkcija naznačava kada je rješenje postignuto i prekida algoritam.

3.2 Binarni problem ruksaka

Neka je dan skup predmeta kojima je pridružena određena vrijednost/profit. Problem ruksaka je ekvivalentan problemu pronalaska ukupne težine koja je manja ili jednaka zadanom ograničenju tj. veličini ruksaka, a da je pri tome ukupna vrijednost maksimizirana.

Binarni problem ruksaka je poznat optimizacijski problem alokacije resursa. Neka je $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ skup n predmeta, te neka su $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ i $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ skupovi težina i vrijednosti predmeta iz X, respektivno. Kapacitet ruksaka je M.

Odabiremo predmete jedan po jedan iz skupa X tako da napunimo ruksak i maksimiziramo vrijednost. Tada je rješenje n-torka $(x_1, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}^n$. Interpretacija uređene n-torke glasi: ukoliko smo i-ti predmet stavili u ruksak $x_i = 1$, dok u suprotnom $x_i = 0$.

Optimizacijski problem možemo formulirati kao:

$$\max \sum_{i=1}^{n} v_i x_i$$
$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq M$$
$$x_i \in \{0, 1\}.$$

Opći oblik pohlepnog algoritma za binarni problem ruksaka dan je u sljedećoj tablici:

Algoritam 3 Binarni problem ruksaka

Input: niz težina predmeta (W), niz profita pridruženih predmetima (V), kapacitet ruksaka (M), predmeti su sortirani u padajući niz takav da $p_i = v_i / w_i$

Output: odabrani predmeti (S)

function 0/1 PROBLEM RUKSAKA(W, V, M)
    $S \leftarrow 0$
    $i \leftarrow 1$
    $P \leftarrow 0$
    while $S < M$ **do**
        if $(S + w[i]) \leq M$ **then**
            $S \leftarrow S \cup w[i]$
            P $\leftarrow$ P + v[i]
        else
            $i \leftarrow i + 1$
        end if
    end while
    return S

Algoritam 4: Pseudokod binarnog problema ruksaka

4 Cjelobrojna optimizacija

4.1 Funkcija cilja

Nakon što smo naveli teorijske rezultate o konveksnim funkcijama i pohlepnim algoritmima koji su nam matematička baza za daljnje razmatranje, vratimo se našem problemu proporcionalne alokacije mjesta.

Jedna od glavnih diskusija u teoriji izbornih sustava odnosi se na analizu stupnja proporcionalnosti dobivenog različitim metodama raspodjele. Obično se izračunavaju vrijednosti odgovarajućeg indeksa neproporcionalnosti na temelju povijesnih izbornih ishoda. Teorijske diskusije tada su stavile preferenciju na određene proporcionalne alokacijske metode (metoda najvećih ostataka), dok su neke druge smatrane manje proporcionalnim (D'Hondtova metoda).

Fokus ovog poglavlja je prijedlog novog pristupa cjelobrojne optimizacije problema proporcionalne zastupljenosti, te analiza njegovih posljedica. Utvrdit ćemo da su tradicionalni pokušaji rangiranja izbornih metoda raznim indeksima neproporcionalnosti pogrešni budući da je svaka izborna formula usko povezana s mnoštvom mjera neproporcionalnosti, te da minimizira odgovarajući indeks neproporcionalnosti koji ne mora uopće biti jedinstven. Još jedna pozitivna strana ovog pristupa je i što daje snažnu matematičku potporu za dizajn novih izbornih formula koje minimiziraju odabrane nove indekse neproporcionalnosti.

Za početak uvedimo oznake.

- n - broj političkih stranaka
- S - ukupan broj mjesta koja treba raspodijeliti
- $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ - vektor mjesta dodijeljenih strankama gdje je $\sum_{i=1}^{n} s_i = S$
- P - ukupan broj glasova
- $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ - vektor glasova dodijeljenih strankama gdje je $\sum_{i=1}^{n} v_i = P$.

Cilj je pronaći alokaciju mjesta $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ takvu da je broj mjesta koja su dodijeljena svakoj od stranaka što proporcionalniji broju glasova koju je stranka dobila na izborima, tj. $s_i \approx v_i$, $\forall i - 1, 2, \ldots, n$.

Neka je naš optimizacijski problem formuliran na sljedeći način:

$$
\begin{aligned}
&\min \varphi\left(s_1, s_2, \ldots, s_n\right) \\
&\sum_{i=1}^{n} s_i = S \\
&s_i \geq 0,\ s_i \in \mathbb{Z},\ i = 1, 2, \ldots, n.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

U okviru promatranog problema razmjerne zastupljenosti i cjelobrojne optimizacije, uvedimo prvo pojam funkcije troška $\varphi(s)$. Općenito, **funkcija troška** ili funkcija cilja je funkcija čiju vrijednost je potrebno minimalizirati ili maksimizirati ovisno o prirodi promatranog optimizacijskog problema. Ova funkcija će se pokazati kao do sada neočit, ali jako bitan indeks neproporcionalnosti kojeg svaka alokacijska metoda nužno minimizira. Primijetimo da funkcija troška $\varphi(s)$ poprima isključivo nenegativne vrijednosti. U slučaju kada je indeks neproporcionalnosti zasnovan na razlici $\frac{s_i}{S} - \frac{v_i}{P}$ vrijedi

$$\varphi(\boldsymbol{s}; \boldsymbol{v}) = 0 \Leftrightarrow s_i = v_i \frac{S}{P},\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

U takvom slučaju vrijednost funkcije cilja je minimalna i iznosi 0 ako i samo ako je alocirani broj mjesta svakoj stranci jednak njenoj prirodnoj kvoti.

Prisjetimo se već uvedenog pojma diskretne derivacije. On je zapravo analogan derivaciji pri čemu je domena funkcije troška diskretan skup. Također, u okviru promatranog problema diskretna derivacija mjeri promjenu vrijednosti funkcije troška prilikom alokacije jednog mjesta stranci i.

Ukoliko je $\varphi(s)$ separabilna funkcija, njena diskretna derivacija u smjeru i je funkcija ρ_i jedne varijable za svaki $i = 1, 2, .., n$. Tada vrijedi:

$$\varphi\left(s + e_i\right) - \varphi(s) = \varphi(s_1, \ldots, s_i{+}1, \ldots, s_n) - \varphi(s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n) = \varphi_i\left(s_i + 1\right) - \varphi_i\left(s_i\right) = \rho_i(s_i).$$

Stoga se funkcija $\varphi(s)$ može zapisati kao suma konstante i funkcije njenih diskretnih derivacija:

$$\varphi(s) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i\left(s_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left[\varphi_i(0) + h_i\left(s_i\right)\right]$$

pri čemu vrijedi

$$h_i\left(s_i\right) = \begin{cases} 0, \text{ za } s_i = 0 \\ \rho_i(0) + \rho_i(1) + \cdots + \rho_i\left(s_i - 1\right), \text{ za } s_i \geq 1. \end{cases}$$

Uz notaciju $K = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(0)$ i $h(s) = \sum_{i=1}^{n} h_i\left(s_i\right)$ vrijedi $\varphi(s) = K + h(s)$.

Pogledajmo sada Tablicu 3 koja prikazuje funkcije troška kao mjere neproporcionalnosti i pripadne metode alokacije mjesta koje ih minimiziraju.

Definicija 4.1. Neka je $p \geq 1$. Na vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$ definiramo funkcije $\|\cdot\|_p, \|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty\rangle$, formulama

$$x \mapsto \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ p \geq 1$$

$$x \mapsto \|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|.$$

Analizom tablice uočava se da je većina funkcija troška bazirana na L_p-normi neke apsolutne ili relativne razlike od idealne zastupljenosti. Funkcije $(7),(8)$ i (10) baziraju se na Čebiševljevoj L_∞-normi.

	$\varphi(s;v)$	**Metoda alokacije mjesta**
1	$\sum_{i=1}^{n} \lvert s_i - q_i \rvert^\rho$	Metoda najvećih ostataka za $\rho \geq 1$
2	$\sum_{i=1}^{n} v_i \left\lvert \frac{s_i}{v_i} - \frac{S}{P} \right\rvert^\rho$	Metoda najvećih ostataka za $\rho = 1$, SL za $\rho = 2 \Leftrightarrow 11$
3	$\sum_{i=1}^{n} s_i \left\lvert \frac{v_i}{s_i} - \frac{P}{S} \right\rvert^\rho$	Metoda jednakih proporcija za $\rho = 2$
4	$\sum_{i=1}^{n} v_i \left(\frac{v_i}{s_i} - \frac{P}{S} \right)$	Metoda jednakih proporcija
5	$\sum_{i=1}^{n} s_i \left(\frac{s_i}{v_i} - \frac{S}{P} \right)$	Sainte-Laguë (SL) $\equiv 2$
6	$\sum_{i=1}^{n} \left\lvert \frac{s_i}{S} - \frac{v_i}{P} \right\rvert^\rho$	Metoda najvećih ostataka za $\rho \geq 1$
7	$\max_{i=1,2,\ldots,n} \left\lvert \frac{s_i}{S} - \frac{v_i}{P} \right\rvert$	Metoda najvećih ostataka
8	$\max_{i=1,2,\ldots,n} \frac{s_i}{v_i}$	d'Hondt
9	$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{s_i}{v_i} - \frac{S}{P} \right)^+$, $\mathrm{z}^+ = \max(z,0)$	d'Hondt
10	$\max_{i=1,2,\ldots,n} \frac{v_i}{s_i}$	Metoda najmanjih djelitelja
11	$\sum_{i=1}^{n} \frac{(s_i - q_i)^2}{q_i}$	Sainte-Laguë $\Leftrightarrow 2, \rho = 2$
12	$\sum_{i=1}^{n} \frac{(s_i - q_i)^2}{s_i}$	Metoda jednakih proporcija
13	$\sum_{i=1}^{n} \left\lvert \frac{s_i}{v_i} - \frac{S}{P} \right\rvert$	Sainte-Laguë

Tablica 3: Mjere neproporcionalnosti i alokacijske metode koje ih minimiziraju

Promotrimo sada vrijednosti diskretnih derivacija funkcije troška. Promatramo ukupno $|nS|$ vrijednosti koje nužno ne moraju biti različite. Stoga uvedimo pojam multiskupa.

Definicija 4.2. Neka je A skup od n elemenata. **Multiskup** nad skupom A je uređeni par $M = (A, m)$, gdje je m funkcija takva da $m : A \to N_0 \cup \{+\infty\}$.

Pojednostavljeno, multiskup je skup u kojem je dozvoljeno ponavljanje elemenata.
Za dani skup $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, multiskup $M = (A, m)$ označavamo kao
$M = \left\{ a_1^{m(a_1)}, \ldots, a_n^{m(a_n)} \right\}$.
Multiplicitet elementa a_i označavamo sa $m(a_i)$.

Konstruirajmo multiskup M čiji su elementi vrijednosti svih diskretnih derivacija unaprijed $\rho_i(y)$ funkcije troška, za $i = 1, \ldots, n$ te $y = 0, 1, \ldots, S-1$. Nadalje, sve elemente multiskupa sortiramo na način da dobijemo rastući niz $(a_n)_n$ za koji vrijedi: $\rho_i(y) \geq \rho_i(y-1)$.

Konstrirajmo sada podniz $(b_n)_n$ koji se sastoji od prvih S elemenata niza $(a_n)_n$, te definirajmo novi multiskup L_S koji sadrži te elemente.

Skup L_S je jedinstven ako promatramo njegove elemente i njihove multiplicitete. Nadalje, definiramo $l_S :=\sum_{i=1}^{S} b_i$ kao sumu elemenata skupa L_S i neka je $\lambda_S := \max\{L_S\}$.

Primijetimo da, ukoliko maksimalni element λ_S ima multiplicitet $m(\lambda_s) > 1$ u multiskupu S, onda postoji mogućnost da nisu svi sadržani u multiskupu L_S jer je kardinalni broj skupa L_S jednak S.

Lema 5. (vidi [4])
Neka je $\varphi(s)$ diskretno konveksna funkcija. Tada vrijedi $\varphi(s) \geq K + l_S$ za svaku alokaciju s pri čemu je zadovoljen uvjet $\sum_{i=1}^{n} s_i = S$.

Dokaz. Potrebno je pokazati da je $h(s) \geq l_S, \forall \boldsymbol{s}$ budući da je $\varphi(\boldsymbol{s}) = K + h(s)$, pri čemu $\sum_{i=1}^{n} s_i = S$. Po konstrukciji multiskupa L_S on sadrži S najmanjih vrijednosti početnog multiskupa
$\{\rho_i(y) : 0 \leq y \leq S - 1, 1 \leq i \leq n\}$. Stoga, vrijedi $l_S \leq h(s)$ za svaku promatranu alokaciju s. $\square$

Lema 6. (vidi [4])
Ukoliko postoji alokacija s^* takva da vrijedi $h(s^*) = l_S$, tada je s^* optimalno rješenje problema diskretne alokacije resursa pri čemu je $\varphi(s)$ pripadna funkcija cilja.

Dokaz. Minimizacija funkcije $\varphi(\boldsymbol{s})$ je ekvivalentna minimizaciji funkcije $h(s)$. $\square$

Lema 7. (vidi [4])
Neka je s alokacija takva da je $h(s) > l_S$. Tada postoje dvije stranke i i j, pri čemu $s_i \geq 1$, takve da

$$\rho_j(s_j) < \rho_i(s_i - 1).$$

Dokaz. Promotrimo prvo podmultiskup od L_S koji je dan sa

$$L_S^- \equiv \{\rho_h(y) \in L_S : \rho_h(y) < \lambda_S\}.$$

Primijetimo da se L_S sastoji od $p = \left|L_S^-\right|$ elemenata skupa L_S^- i od $(|S| - p) \geq 1$ elemenata λ_S. Nadalje, neka je s alokacija takva da $h(s) > l_S$. Budući da neka stranka mora dobiti barem 1 mjesto, multiskup

$$H(s) = \{\rho_h(y) : s_h \geq 1; y = 0, 1, \ldots, s_h - 1\}$$

je neprazan. Nadalje, $|H(s)| = \sum_{h=1}^{n} s_h = S$ i $h(s)$ je suma svih elemenata od $H(s)$, uzimajući u obzir multiplicitete elemenata. Neka je μ maksimalni element od $H(s)$. Pošto su diskretne derivacije neopadajuće, $\mu = \rho_i(s_i - 1)$ za neku stranku i takvu da je $s_i \geq 1$. Nadalje, $\mu \geq \lambda_S$, inače bi $H(s)$ sadržavao najviše $p < S$ elemenata što je kontradikcija sa kardinalnim brojem od $H(s)$. Stoga tvrdimo da mora postojati stranka j i nenegativan prirodan broj y takav da $\rho_j(y) \in L_S \setminus H(s)$ i $\rho_j(y) < \mu$. Razmotrimo sada dva moguća slučaja.

Slučaj 1. $H(s) \supseteq L_S^-$. Mora vrijediti $\mu > \lambda_S$; inače bi L_S i $H(s)$ sadržavali p elemenata od L_S^- i $S-p$ multipliciteta elementa λ_S, što implicira da $h(s) = l_S$. Ali budući da se najviše $S-1$ elemenata $H(s)$ nalazi u L_S i $|L_S| = |H(s)|$, tada mora postojati $\rho_j(y) \in L_S \setminus H(s)$, i mora vrijediti $\rho_j(y) \leq \lambda_S < \mu$.

Slučaj 2. Postoji $\rho_j(y) \in L_S^- \setminus H(s)$. Tada vrijedi $\rho_j(y) < \lambda_S \leq \mu$. Stoga tvrdnja vrijedi u svakom slučaju. Ako je $s_j = 0$, onda $\rho_j(s_j) \leq \rho_j(y) < \rho_i(s_i - 1)$. Ako $s_j \geq 1$, i onda ne može vrijediti $s_j - 1 \geq y$, jer inače $\rho_i(y)$ bi bio sadržan u $H(s)$. Stoga, $s_j \leq y$, implicira da $\rho_j(s_j) \leq \rho_j(y) < \rho_i(s_i - 1)$.

□

Teorem 8. (vidi [4])
Neka je $\varphi(s)$ diskretno konveksna funkcija. Tada pohlepni algoritam daje optimalno rješenje za problem diskretne alokacije resursa pri čemu je $\varphi(s)$ funkcija cilja.

Dokaz. Neka je s^* rješenje dobiveno korištenjem pohlepnog algoritma alokacije mjesta. Prema Lemi 5, $h(s^*) \geq l_S$. Pretpostavimo da vrijedi stroga nejednakost, tj.

$$h(s^*) > ls.$$

Sada lema 7 implicira da postoje dvije stranke i and j, pri čemu $s_i \geq 1$ takve da $\rho_j(s_j) < \rho_i(s_i - 1)$. Ali, u ovom slučaju s^* ne bi bilo optimalno rješenje dobiveno pohlepnim algoritmom, jer bi pohlepni algoritam stavio preferenciju na na dodjelu dodatnog mjesta stranci j umjesto stranci h, što dalje implicira da stranka j dobiva ukupno $s_j^* + 1$ mjesta umjesto s_j^*, te stranci h ukupno $s_h^* - 1$ umjesto s_h^*. □

Pohlepni pristup radi na način da postupa samo s marginalnim alokacijama, tj. izabire alokaciju koja minimizira/maksimizira zadanu funkciju cilja u svakom koraku. Konkretno, algoritam u razmatranje uzima vektor $s = (0, 0, \ldots, 0)$ kao početnu alokaciju. U svakom novom koraku pohlepni algoritam promatra trenutnu alokaciju $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ i dodjeljuje još jedno mjesto stranci i pri čemu mora vrijediti $\rho_i(s_i) = \min\{\rho_h(s_h) : 1 \leq h \leq n\}$. Algoritam prekida izvršavanje i daje globalno optimalno rješenje kada je svih S mjesta dodijeljeno. Ovakav problem alokacije mjesta je ekvivalentan dodjeli prvih S mjesta ranije konstruiranog niza.

4.2 Analiza cjelobrojne optimizacije alokacije mjesta

U prošlom potpoglavlju pokazali smo da su sve proporcionalne alokacijske metode pohlepni algoritmi koji minimiziraju funkciju cilja/troška koja ne mora nužno biti jedinstvena. Ovim pristupom problemu cjelobrojne optimizacije olakšava se interpretacija razlika između proporcionalnih alokacijskih metoda, te pokazuje da su tradicionalni indeksi neproporcionalnosti naklonjeni metodi najvećih ostataka. Ovaj pristup nam omogućuje da dizajniramo nove metode odabirom nekim drugih mjera neproporcionalnosti.

- **Sainte-Laguë metoda**

  Ova metoda kreirana je s namjerom da svakom glasaču bude garantirana ista moć ili utjecaj na udio zastupljenosti. Kada je $\rho = 2$, funkcija cilja (2) u Tablici 3 daje mjeru neproporcionalnosti alokacije mjesta u smislu moći svakog birača. U savršeno poštenoj situaciji, svih P glasača mora "imati istu moć" ili utjecaj na izborni rezultat, tj. ako je ukupni broj zastupnika S, svaki birač mora imati moć na $\frac{S}{P}$ zastupnika. S druge strane, birači v_i koji su dali svoj glas stranci i zapravo imaju moć nad $\frac{s_i}{v_i}$ zastupnika. Stoga, razlike $\frac{s_i}{v_i}$ i $\frac{S}{P}$ interpretiramo kao pogrešku ili devijaciju svakog glasača od idealne alokacije mjesta. Pod hipotezom Gaussove ili normalne distribucije pogrešaka ova metoda je neutralna i minimizira navedeno odstupanje. Referenca zadnje tvrdnje je pod [4].

  Primijetimo da Sainte-Laguë metoda minimizira i funkcije cilja (11) i (5) dane u Tablici 3 za $\rho = 2$, budući da se one tada razlikuju za multiplikativnu i aditivnu konstantu, respektivno.

- **Metoda jednakih proporcija**

  Specifičnost ove metode je da svakoj stranci nužno dodjeljuje makar jedno mjesto bez obzira na dobiveni broj glasova, što može donijeti kao negativnu posljedicu visoku frakcijalizaciju mjesta. Moguće poboljšanje ove metode je da se prvi član niza djelitelja umjesto nule postavi na neku pozitivnu vrijednost koja ima malo odstupanje od nule. Ova metoda minimizira tri navedene funkcije cilja u Tablici 3. Primijetimo da svaki omjer $\frac{v_i}{s_i}$ predstavlja trošak u broju glasova po kojem je nekoj stranci alocirano jedno mjesto. U potpuno pravednoj situaciji, poželjno je da je distribucija ovih troškova što ujednačenija i da trošak iznosi $\frac{P}{S}$ za svaku stranku.

  Kod funkcije (12) u Tablici 3 metoda jednakih proporcija minimizira relativnu grešku između stvarne i idealne alokacije, normalizirane brojem stvarno alociranih mjesta. Funkcija cilja (4) u Tablici 3 minimizira težinsku sumu razlika između troška u broju glasova po mjestu koji je stranka "platila" i stvarnog troška u broju glasova po jednom mjestu. Pri tome su pozitivne razlike nepoželjnije čim stranka ima više glasača, budući da težine uz svaku razliku iznose $v_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$. Funkcija (3) se od funkcije (4) za $\rho = 2$ razlikuje za aditivnu konstantu, a od funkcije (12) za pozitivan faktor.

- **Metoda najvećih ostataka**

  Ova metoda je trenutno najprihvaćenija metoda kod problema proporcionalne alokacije mjesta. Ovim pristupom je otkriven razlog naklonjenosti, a on je da metoda najvećih ostataka generira većinu tradicionalnih indeksa neproporcionanosti.

  Funkcija (1) u Tablici (3)(*str.* 23) je L_p norma razlike između alociranih mjesta nekoj stranci i njene stvarne kvote. Funkcija (6) u Tablici 3 razmatra razliku između udjela alociranih mjesta i udjela danih glasova. L_∞ norma garantira da je pod metodom najvećih ostataka minimizirana maksimalna razlika između između udjela glasova i udjela mjesta, funkcija (7) u Tablici 3. Za $\rho = 1$ funkcija (2) u Tablici 3 je težinska suma apsolutne razlike između trenutnog stupnja reprezentacije (tj., zastupljenosti) neke stranke i idealne proporcionalne reprezentacije (tj., zastupljenosti). Budući da je u promatranoj težinskoj sumi težina v_i, metoda najvećih ostataka ne pogoduje velikim strankama. Napomenimo da je funkcija cilja (2) za $\rho = 1$ jednaka funkciji cilja (1) za $\rho = 1$.

- **D'Hondt metoda**

  Oko ove metode je prisutno mnogo kontroverzi, budući da je često kritizirana kao metoda koja daje visok stupanj neproporcionalnosti alokacije. Ali, pristupom cjelobrojne optimizacije vidimo da ova metoda utjelovljuje bitan kriterij proporcionalnosti.

  Metoda maksimizira "funkciju uskog grla" (8) u Tablici 3, koja se odnosi na minimalnu cijenu $\left(\frac{v_i}{s_i}\right)$ koju stranka "plaća" da bi dobila jedno mjesto. U teoretski egzaktno proporcionalnoj alokaciji postojala bi ujednačena distribucija ovih troškova ukoliko alokacija mjesta daje maksimalnu vrijednost ove funkcije. Ovo svojsto implicira da D'Hondtova metoda pogoduje velikim strankama nauštrb manjih stranaka, budući da ona maksimizira minimalnu cijenu jednog zastupničkog mjesta. D'Hondtova metoda također minimizira tzv. Schultzov indeks, tj., funkciju (9) u Tablici 3, koja garantira alokaciju mjesta pri kojoj će biti minimizirana ukupna prezastupljenost.

- **Metoda najmanjih djelitelja**

  Ova metoda je svojevrstan komplement D'Hondtovoj metodi. Ova metoda analogno pokušava minimizirati razlike između troška jednog zastupničkog mjesta, ali u ovoj metodi se minimizira maksimalan trošak, funkcija (10) dana u Tablici 3. Pozitivno svojstvo metode najmanjih djelitelja je njena inkluzivnost (tj., uključivost) svih stranaka u konačnoj alokaciji mjesta.

5 Sličnost pohlepnih algoritama i metoda djelitelja

Pohlepni algoritam pruža optimizacijski pristup za široku klasu funkcija. Analizom metode djelitelja uočava se sličnost sa pohlepnim algoritmima. Oba pristupa su iterativni algoritmi koji u svakom koraku alociraju po jedno mjesto pri čemu se maksimizira "profit" svake stranke. U pohlepnim algoritmima profit je apsolutna vrijednost smanjenja promatranog indeksa neproporcionalnosti, tj. funkcije cilja, dok je kod metode djelitelja profit definiran kao omjer $\frac{v_i}{d(s_i)}$.

Ukoliko se niz divizora neke metode djelitelja normalizira tako da bude $k \leq d(k) \leq k+1$, vrijedi $\frac{v_i}{s_i+1} \leq \frac{v_i}{d(s_i)} \leq \frac{v_i}{s_i}$. D'Hondtova metoda maksimizira omjer $\frac{v_i}{s_i+1}$ što odgovara prosječnom broju glasova po mjestu nakon alokacije trenutnog mjesta. Metoda najmanjih djelitelja maksimizira $\frac{v_i}{s_i}$ prosječan broj mjesta prije alokacije trenutnog mjesta. Sumarno, u svakoj metodi djelitelja profit se može interpretirati kao prosječan broj glasova po mjestu. Ukoliko kao pohlepni pristup promatramo algoritam koji u svakom koraku u skup rješenja dodaje još jedan element s ciljem maksimizacije profita, tada metode djelitelja zaista možemo smatrati pohlepnim algoritmima.

U Tablici 4 dane su neke funkcije cilja kao mjerila proprocionalnosti i njihove diskretne derivacije $\varphi_i(s_i+1) - \varphi_i(s_i)$, te odgovarajuća metoda divizora koja minimizira danu funkciju cilja.

$\varphi(s;v)$	$\rho_i\left(s_i\right)$	**Metoda djelitelja**
$\sum_{i=1}^n v_i\left(\frac{s_i}{v_i} - \frac{S}{P}\right)^2$	$\frac{2s_i+1}{v_i} - \frac{2S}{P}$	$s+\frac{1}{2}$ Sainte-Laguë
$\sum_{i=1}^n s_i\left(\frac{v_i}{s_i} - \frac{P}{S}\right)^2$	$\frac{P^2}{S^2} - \frac{v_i^2}{s_i(s_i+1)}$	$\sqrt{s(s+1)}$ Metoda jednakih proporcija
$\sum_{i=1}^n v_i\left(\frac{v_i}{s_i} - \frac{P}{S}\right)$	$-\frac{v_i^2}{s_i(s_i+1)}$	$\sqrt{s(s+1)}$ Metoda jednakih proporcija
$\sum_{i=1}^n s_i\left(\frac{s_i}{v_i} - \frac{S}{P}\right)$	$\frac{2s_i+1}{v_i} - \frac{S}{P}$	$s+\frac{1}{2}$ Sainte-Laguë
$\sum_{i=1}^n \left(\frac{s_i}{v_i} - \frac{S}{P}\right)^+$	$\begin{cases} \frac{1}{v_i} & \text{, ako } \frac{s_i}{v_i} - \frac{S}{P} \geq 0 \\ 0 & \text{, ako } \frac{s_i+1}{v_i} - \frac{S}{P} \leq 0 \\ \frac{s_i+1}{v_i} - \frac{S}{P} & \text{, inače} \end{cases}$	$s+1$ d'Hondt
$\sum_{i=1}^n \frac{(s_i-q_i)^2}{q_i}$	$\frac{P}{S}\frac{2s_i+1}{v_i} - 2$	$s+\frac{1}{2}$ Sainte-Laguë
$\sum_{i=1}^n \frac{(s_i-q_i)^2}{s_i}$	$1 - \frac{S^2}{P^2}\frac{v_i^2}{s_i(s_i+1)}$	$\sqrt{s(s+1)}$ Metoda jednakih proporcija

Tablica 4: Funkcije cilja, diskretne derivacije i odgovarajuće metode djelitelja

U nekim slučajevima metode djelitelja s pohlepnim pristupom nužno ne daju konačno rješenje alokacijskog problema koje ima svojstvo ispunjenja kvote. Za neke od navedenih funkcija u Tablici 4 ispunjenje kvote je nužan uvjet za minimizaciju unutar zadanih ograničenja. Za sve takve funkcije vrijedi da ukoliko neko rješenje ne zadovoljava donju i gornju granicu, uvijek se može pronaći bolje rješenje za koje vrijedi $\lfloor q_i \rfloor \leq s_i \leq \lceil q_i \rceil$.

Promotrimo sljedeći problem diskretne optimizacije:

$$\begin{aligned}
&\min \psi\left(s_1, s_2, \ldots, s_n\right), \\
&\sum_{i=1}^{n} s_i = S, \\
&s_i \geq 0,\ s_i \in \mathbf{Z},\ i = 1, 2, \ldots, n, \\
&\text{gdje je } \psi\left(s_1, s_2, \ldots, s_n\right) \text{ funkcija koja ispunjava kvotu.}
\end{aligned}$$

Rastavimo svaki s_i kao sumu $s_i = \lfloor q_i \rfloor + z_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$, pri čemu $z_i \in \{0, 1\}$. Neka je ψ separabilna funkcija, pa ju zapisujemo kao $\psi_i\left(s_i\right) = \psi_i\left(\lfloor q_i \rfloor + z_i\right) = \left(1 - z_i\right) \psi_i\left(\lfloor q_i \rfloor\right) + z_i \psi_i\left(\lfloor q_i \rfloor + 1\right) = c_i z_i + b_i, i = 1, 2, \ldots, n$. Odatle slijedi da je $c_i = \psi_i\left(\lfloor q_i \rfloor + 1\right) - \psi_i\left(\lfloor q_i \rfloor\right)$ i $b_i = \psi_i\left(\lfloor q_i \rfloor\right)$, pa se gornji optimizacijski problem svodi na

$$\begin{gathered}
\min c_1 z_1 + c_2 z_2 + \cdots + c_n z_n, \\
z_1 + z_2 + \cdots + z_n = R, \\
S - \sum_{i=1}^{n} \lfloor q_i \rfloor = R, \\
z_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.
\end{gathered}$$

Sada uočavamo da se radi o optimizacijskom problemu koji je poznat kao binarni problem ruksaka. Koristimo pohlepni pristup, te budući da je potrebno minimizirati navedenu linearnu kombinaciju, konstruirajmo rastući niz čije su vrijednosti težine c_i. Za prvih R članova niza postavimo $z_i = 1$, a preostalih $n - R$ članova postavimo na $z_i = 0$.

Kao primjer promotrimo funkciju (1) iz Tablice 3 za $\rho = 1$, odnosno neka je $\psi(s; v) = \sum_{i=1}^{n} |s_i - q_i|$. Razmotrimo sada neku alokaciju $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ koja ne zadovoljava kvotu. Tada vrijedi jedan od sljedećih slučajeva.

1. $\exists i \in \{1, \ldots, n\}$ takav da $s_i < \lfloor q_i \rfloor$
   U ovom slučaju mora postojati j takav da vrijedi $s_j \geq \lceil q_j \rceil$. Inače bi vrijedilo:

$$S = \sum_{t=1}^{n} s_t < \sum_{t=1}^{n} \lfloor q_t \rfloor \leq S,$$

   pri čemu dolazi do kontradikcije.

   Ukoliko postavimo

$$s'_h = \begin{cases} s_h + 1, & h = i, \\ s_h - 1, & h = j, \\ s_h, & h \neq i, j \end{cases}$$

tada se može provjeriti da vrijedi $\psi(s'; v) \leq \psi(s; v)$. Uzastopnim iteracijama algoritma dolazimo do rješenja s^* koje je bolje i zadovoljava traženu kvotu.

2. $\exists i \in \{1, \ldots, n\}$ takav da $s_i > \lceil q_i \rceil$

Analognom logikom kao u prvom slučaju dolazimo do alokacije mjesta koja zadovoljava kvotu.

S druge strane, ψ je separabilna funkcija. Stoga taj optimizacijski problem možemo formulirati i kao

$$\begin{aligned}&\max r_1 z_1 + r_2 z_2 + \cdots + r_n z_n,\\&z_1 + z_2 + \cdots + z_n = R,\\&z_i \in \{0,1\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,\end{aligned}$$

pri čemu je $r_i = q_i - \lfloor q_i \rfloor$. Navedena jednakost slijedi iz
$c_i = (\lfloor q_i \rfloor + 1 - q_i) - (q_i - \lfloor q_i \rfloor) = 1 - 2r_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$

U ovom primjeru optimizacijski problem je ekvivalentan binarnom problemu ruksaka, te do njegovog rješenja dolazimo analognom logikom kao u razmatranju prethodnog problema. S ciljem maksimizacije linearne kombinacije, konstruiramo padajući niz sastavljen od težina, te prvih R odgovarajućih varijabli z_i postavimo na 1, a ostale na 0.

Primijetimo da u ovako formuliranom problemu pohlepni algoritam se podudara s metodom najvećih ostataka (LAR).

Sljedeći teorem pokazuje da sve metode djelitelja daju optimalno rješenje s obzirom na neku **funkciju uskog grla**. Neka vrijedi pretpostavka da razmatramo samo $s_i \geq 1$.

Teorem 9. (vidi [4])
Svaka metoda djelitelja čiji je niz djelitelja $d(s)$ pozitivan i monotono rastući daje optimalno rješenje pri problemu proporcionalne alokacije mjesta sa sljedećom funkcijom cilja:

$$\max_s \min_i \frac{v_i}{d(s_i - 1)}$$

Dokaz. Neka je s^* alokacija dobivena korištenjem metode djelitelja pri čemu je njezin niz djelitelja $d(s)$. Nadalje, neka je

$$\frac{v_l}{d\left(s_l^* - 1\right)} = \min_i \frac{v_i}{d\left(s_i^* - 1\right)}.$$

Primijetimo da, bez obzira na odabranu metodu djelitelja, zadnji razmatrani omjer prilikom alokacije S mjesta je $\frac{v_i}{d\left(s_i^*-1\right)}$ za svaki i, ukoliko je $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ optimalna alokacija. Pretpostavimo da postoji neka druga alokacija $s \neq s^*$ koja zadovoljava kardinalno ograničenje početnog optimizacijskog problema, tj.,

$$\sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{i=1}^{n} s_i^* = S,$$

pri čemu dobivamo veću vrijednost funkcije cilja. Tada postoji stranka h takva da

$$\frac{v_h}{d\left(s_h - 1\right)} = \min_i \frac{v_i}{d\left(s_i - 1\right)} > \min_i \frac{v_i}{d\left(s_i^* - 1\right)} = \frac{v_l}{d\left(s_l^* - 1\right)}. \tag{2}$$

S obzirom da je niz djelitelja monotono rastuća funkcija slijedi da $s_l < s_l^*$. Ukoliko bi vrijedilo $s_l \geq s_l^*$ tada $d\left(s_l - 1\right) \geq d\left(s_l^* - 1\right)$ i

$$\frac{v_h}{d\left(s_h - 1\right)} > \frac{v_l}{d\left(s_l^* - 1\right)} \geq \frac{v_l}{d\left(s_l - 1\right)},$$

što je očita kontradikcija s $\frac{v_h}{d(s_h-1)} = \min_i \frac{v_i}{d(s_i-1)}$ kao u (2). Nadalje, ukoliko je $s_l < s_l^*$, s obzirom na kardinalno ograničenje s, mora postojati stranka j takva da $s_j > s_j^*$ i s obzirom da su sve varijable cjelobrojne to implicira da $s_j \geq s_j^* + 1$. U ovom trenutku koristimo pomoćnu lemu Balinski and Young.

Lema. Metoda alokacije mjesta je metoda djelitelja ako i samo ako daje alokaciju $\boldsymbol{t}$ takvu da

$$\min_i \frac{v_i}{d\left(t_i - 1\right)} \geq \max_i \frac{v_i}{d\left(t_i\right)}.$$

Stoga, korištenjem leme i $s_j \geq s_j^* + 1$ slijedi

$$\begin{aligned}
\frac{v_l}{d\left(s_l^* - 1\right)} &= \min_i \frac{v_i}{d\left(s_i^* - 1\right)} \geq \max_i \frac{v_i}{d\left(s_i^*\right)} \geq \frac{v_j}{d\left(s_j^*\right)} \geq \frac{v_j}{d\left(s_j - 1\right)} \\
&\geq \min_i \frac{v_i}{d\left(s_i - 1\right)} = \frac{v_h}{d\left(s_h - 1\right)} > \frac{v_l}{d\left(s_l^* - 1\right)},
\end{aligned}$$

što je proturječno. Stoga zaključujemo da nejednakost (2) ne vrijedi, čime je teorem dokazan. □

6 Analiza podzastupljenosti i prezastupljenosti

6.1 Daltonovi transferi

U ovom poglavlju se baziramo na analizu nejednakosti u reprezentaciji (tj., zastupljenosti) stranaka nakon što su mjesta dodijeljena nekom alokacijskom metodom. S obzirom na prirodu promatranog problema egzaktna proporcionalnost u alokaciji mjesta je često nemoguća, te će stoga neke stranke dobiti poneko mjesto više nego što bi trebale i to nauštrb nekih drugih stranaka koje će dobiti manji broj mjesta.

Promatrajući vektor distribucije mjesta s kažemo da je neka stranka i **prezastupljena** kada vrijedi

$$\frac{s_i}{v_i} > \frac{S}{P},$$

tj. kada je omjer dodijeljenih mjesta stranci i i broja glasova koje je stranka dobila veći od omjera ukupnog broja mjesta i ukupnog broja glasova. Tada je trošak koji je stranka i platila za svako mjesto manji od realnog troška jednog mjesta. Također, analogno vrijedi i za slučaj **podzastupljenosti** samo sa suprotnim znakom nejednakosti u gornjem izrazu, za odgovarajuću stranku. U slučaju savršeno pravedne zastupljenosti svake stranke vrijedio bi znak jednakosti u gornjem izrazu.

Konstruirajmo vektor zastupljenosti $\boldsymbol{y} = \left(\frac{s_1}{v_1}, \frac{s_2}{v_2}, \ldots, \frac{s_n}{v_n}\right) = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ koji nam daje jasan uvid u identifikaciju stranaka kojima je nakon alokacije mjesta nekom alokacijskom metodom dodijeljen višak ili manjak mjesta, pri čemu podzastupljenost i prezastupljenost uspoređujemo s fiksnom kvotom $\frac{S}{P}$.

Nadalje, s ciljem poboljšanja kvalitete zastupljenosti želimo napraviti transfer mjesta na način da stranci kojoj je dodijeljen višak mjesta oduzmemo $\delta > 0$ mjesta i transferiramo ih nekoj podzastupljenoj stranci. Ako je $\delta < y_j - y_i$ umanjuje se nejednakost u reprezentaciji i to nazivamo **Daltonov transfer**. Ako je uz to $\delta < \frac{y_j - y_i}{2}$, tada se relativna pozicija stranaka j i i ne mijenja. Takav transfer naziva se altruistični Daltonov transfer i jako je bitan kriterij za daljnju analizu.

Neka uređeni par (h, l) predstavlja prezastupljenu i podzastupljenu stranku, tj. $y_h > y_l$. Pretpostavimo da transferiramo jedno mjesto od prezastupljene ka podzastupljenoj stranci s ciljem ujednačenije distribucije. Tada vektor mjesta poprima oblik:

$$s = (s_1, \ldots, s_h - 1, \ldots, s_l + 1, \ldots, s_n)$$

Primijetimo da simetričan transfer jednog mjesta od prezastupljene ka podzastupljenoj stranci odgovara asimetričnom transferu na vektoru zastupljenosti, tj.

$$\boldsymbol{y} = \left(\frac{s_1}{v_1}, \cdots, \frac{s_h - 1}{v_h}, \cdots, \frac{s_l + 1}{v_l}, \cdots \frac{s_n}{v_n}\right).$$

Dobitak u razini zastupljenosti stranke l bi iznosio $\frac{1}{v_l}$, dok bi gubitak stranke h iznosio $\frac{1}{v_h}$. Ukoliko ne vrijedi $v_h = v_l$ ovakav transfer ne bi bio jednak. Također, primijetimo da je suma komponenata vektora mjesta ostala nepromijenjena, dok je suma komponenata vektora zastupljenosti promijenjena.

Stoga, promotrimo transfer na koji stavljamo dodatna ograničenja. Neka je δ-transfer između stranaka h i l asimetrična operacija tako da vrijedi

$$y_h^* = y_h - \delta_h,$$
$$y_l^* = y_l + \delta_l,$$
$$y_i^* = y_i \quad \forall i \neq h, l,$$

uz dana ograničenja i uvjete:

$$y_h - y_l \geq \delta_h + \delta_l,$$
$$\delta_h = m\frac{1}{v_h}, \quad \delta_l = \delta_h \frac{v_h}{v_l},$$

pri čemu je m broj mjesta transferiranih od stranke h stranci l. Zadnji uvjet osigurava da je ukupan broj mjesta cjelobrojan i iznosi S.

Sumarno, pristup analize vektora zastupljenosti dobivenog nekom alokacijsko metodom obuhvaća pronalazak što ujednačenijeg vektora zastupljenosti sukcesivnim provođenjem transfera mjesta. Pri tome su zadovoljena ograničenja stavljena na prirodu ovih transfera, budući da transfere mjesta radimo na vektoru mjesta, dok implikacije koje ti transferi nose promatramo na vektoru zastupljenosti.

6.2 Indeksi neproporcionalnosti i algoritmi razmjene

Kod procjene nejednakosti koja nastaje u političkim sustavima koji koriste proporcionalne alokacijske metode, teorija majorizacije može biti vrlo korisna, te je stoga važna uloga pripisana klasi Schur-konveksnih funkcija. U slučaju manje raspršenosti distribucije argumenata vektora zastupljenosti Schur-konveksne funkcije poprimaju manje vrijednosti. Analizom Lorenzovih krivulja uočavamo da Schur-konveksne funkcije poprimaju minimalnu vrijednost kod krivulje uniformne distribucije koja je predstavljena simetralom prvog kvadranta. Svaka druga Lorenzova krivulja nalazit će se ispod nje i funkcija će imati veću vrijednost. Stoga je ova klasa funkcija vrlo korisna mjera neproporcionalnosti u vektoru zastupljenosti stranaka.

Vratimo se optimizacijskom problemu koji koristi funkcije cilja povezane s raznim metodama alokacije mjesta. Ukoliko je funkcija cilja Schur-konveksna funkcija, moguće je dizajnirati proporcionalnu alokacijsku metodu za rješavanje sljedećeg optimizacijskog problema:

$$\min \varphi\left(\frac{s_1}{v_1}, \frac{s_2}{v_2}, \ldots, \frac{s_n}{v_n}\right)$$
$$\sum_{i=1}^{n} s_i = S$$
$$s_i \geq 0, \ s_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, \ldots, n$$
$$\varphi(y) \text{ Schur-konveksna funkcija.}$$

Ovako formuliran optimizacijski problem konzistentan je s indeksima neproporcionalnosti koje smo već analizirali i njihovim svojstvima, te su neke navedene funkcije Schur-konveksne. Transferima mjesta od jedne ka drugoj stranci može se dizajnirati metoda koja minimizira većinu funkcija cilja koje su navedene u prethodnim poglavljima. Važna subklasa Schur-konveksnih funkcija (uključujući funkcije (6) do (9) u Tablici 3) su funkcije za koje vrijedi $\varphi(s)=\sum_{i=1}^{n} g\left(\frac{s_i}{v_i}\right)$, pri čemu je g konveksna funkcija. Budući da je $\varphi_i\left(s_i\right)=g\left(\frac{s_i}{v_i}\right)$ konveksna funkcija, pohlepni algoritam daje kao rješenje alokaciju mjesta koja minimizira $\varphi(s)$. Pokazat ćemo da pristup koji koristi transfere daje alokaciju mjesta koja je istovjetna s barem jednim optimalnim rješenjem koje daje pohlepni algoritam.

Promotrimo separabilnu funkciju $\varphi(s)=\sum_{i=1}^{n} \varphi_i\left(s_i\right)$ i pokušajmo ju minimizirati tako da radimo transfere mjesta od prezastupljene stranke h ka nekoj podzastupljenoj stranci l.

$$\varphi\left(s'\right)=\varphi\left(s_1, \ldots, s_h-1, \ldots, s_l+1, \ldots, s_n\right)$$

Nova alokacija mjesta je bolja ukoliko nakon izvršenog transfera funkcija cilja poprima manju vrijednost, tj. $\varphi\left(s'\right)<\varphi(s)$. Uzastopni transferi se prekidaju i alokacija postaje stabilna na razmjenu, ako ne postoji neki drugi par stranaka za koji je transfer mjesta profitabilan, tj., ako ne postoji s' tako da $\varphi(s')-\varphi(s)<0$.

Lema 10. (vidi [4])
Neka je $\varphi(s)$ diskretno konveksna funkcija s neopadajućim diskretnim derivacijama ρ_i. Za alokaciju mjesta s^* sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

1. s^* je optimalna alokacija, tj. minimizira $\varphi(s)$ za sve alokacije s takve da $\sum_{i=1}^{n} s_i=S$
2. s^* je alokacija koja je stabilna na razmjenu
3. za sve stranke i i j, pri čemu $s_i \geq 1$, vrijedi
$$\rho_j\left(s_j^*\right) \geq \rho_i\left(s_i^*-1\right)$$
4. $h\left(s^*\right)=l_S$, gdje je l_S definiran kao u točki 4.1 prije Leme 5.

Dokaz.
(1) $\Rightarrow$ (2) : Očito.
(2) $\Rightarrow$ (3) : Neka je $s_i \geq 1$, te neka je s^{**} alokacija mjesta dobivena transferom jednog mjesta od stranke i ka stranci j. S obzirom da je s^* stabilna vrijedi:

$$\begin{aligned}0 &\leq \varphi\left(s^{**}\right)-\varphi\left(s^*\right)=\varphi_j\left(s_j^*+1\right)+\varphi_i\left(s_i^*-1\right)-\varphi_j\left(s_j^*\right)-\varphi_i\left(s_i^*\right)\\ &=\rho_j\left(s_j^*\right)-\rho_i\left(s_i^*-1\right),\end{aligned}$$

(3) $\Rightarrow$ (4) : Slijedi iz Leme 5 i 7.
(4) $\Rightarrow$ (1) : Slijedi iz Leme 6. □

Sumarno, algoritam razmjene će raditi uzastopne transfere mjesta na vektoru alociranih mjesta sve dok ne bude vrijedilo $\rho_j\left(s_j^*\right) \geq \rho_i\left(s_i^*-1\right), \forall i, j=1,2\cdots,n$.

Teorem 11. (vidi [4])
Ako je φ diskretno konveksna funkcija, svaki algoritam razmjene će kao rješenje dati optimalnu alokaciju s^*.

Dokaz. Svaki algoritam razmjene daje rješenje $\boldsymbol{s}^*$ koje je stabilno na razmjenu pa je stoga po prethodnoj lemi optimalno. $\square$

Neetičnim transferima smatramo razmjenu mjesta od podzastupljene ka prezastupljenoj stranci. Korištenjem diskretnih derivacija provjeravamo etičnost svakog transfera, te se pokazuje da su neetični transferi uvijek neprofitabilni za promatrani indeks neproporcionalnosti. Stoga, sve se mjere neproporcionalnosti mogu minimizirati sukcesivnim korištenjem etičnih razmjena. Stoga, podzastupljenost i prezastupljenost imaju važnu ulogu u dizajniranju algoritama koji smanjuju neproporcionalnost u vektoru zastupljenosti stranaka nakon alokacije mjesta nekom alokacijskom metodom.

7 Zaključak

Cijela poanta ovog diplomskog rada koji izučava problem proporcionalne zastupljenosti i cjelobrojne optimizacije je da rješenje proporcionalne alokacije mjesta nije jedinstveno. Izborne formule su pohlepni algoritmi koji su dizajnirani s ciljem da minimiziraju razlike između udjela glasova i alociranih zastupničkih mjesta za svaku pojedinu stranku. Problem se javlja u činjenici da se te razlike mogu mjeriti na razne načine. Svaka izborna metoda usko je vezana uz specifičnu mjeru neproporcionalnosti i daje optimalno rješenje kada je kao funkcija cilja odabrana upravo ta mjera. Nakon što se odbaci tradicionalni koncept rangiranja proporcionalnosti alokacijskih metoda uobičajenim indeksima neproporcionalnosti, moguće je dizajnirati nove metode koje minimiziraju i neke nove indekse neproporcionalnosti s poželjnim matematičkim svojstvima.

Literatura

[1] M.L. Balinski, H.P. Young, The quota method of apportionment, Amer. Math. Monthly 82(1975) 701-729

[2] S. Boyd, L. Vandenberghe, Convex Optimization, Cambridge University Press, 2004.

[3] T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest, Introduction to algorithms. The MIT Press, 2001.

[4] P.G.Cortona, C. Manzi, A. Pennisi, F. Rica, B. Simeone, Evaluation and Optimization of Electoral Systems, SIAM, Philadelphia, 1999.

[5] G. Dahl, An introduction to Convexity, Blindern, 2010.

[6] J.K. Hodge, R.E. Klima: The mathematics of voting and elections : a hands-on approach, AMS, Providence, 2005.

[7] D. Jukić, Konveksni skupovi, Sveučilište J. J. Strossmayera, Osijek, 2021.

[8] D. Leonard, R. Narkiet, World Atlas of Elections, Madder and Stoughton, London, 1987.

[9] T. Marošević, Over- and Underrepresentation in Proportional Electoral Systems - an Empirical Study, Mathematical Communications, Supplement, 1(2001), T. Hunjak i R. Scitouski (ur.), Proceedings of the 8 th International Conference on Operational Research - KOI 2000, Osijek, 2001, $33 - 41$

[10] R. T. Rockafellar, Convex Analysis, Princeton University Press, New Jersey, 1970.

[11] K. Schuster, F. Pukelsheim, M. Drton, N.R. Draper, Seat biases of apportionment methods for proportional representation, Electoral Studies 22 (2003.), br. 4, $651 - 676$

[12] A.D. Taylor, A.M. Pacelli: Mathematics and Politics−Strategy, Voting, Power and Proof, Springer-Verlag, New York, 2008.

[13] U. Yüceer, Discrete Convexity: Convexity for Functions Defined on Discrete Spaces (June 2001). Science Direct Working Paper No S1574-0358(04)70487-6, Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=3142803

Sažetak

Tradicionalno, proporcionalne alokacijske metode analiziraju se raznim indeksima neproporcionalnosti. Na temelju tih analiza smatra se da metoda najvećih ostataka daje najproporcionalnije rezultate, dok d'Hondtova metoda, koja se koristi i u Hrvatskoj za izbor saborskih zastupnika, često biva kritizirana da daje manje proporcionalne rezultate i pogoduje velikim političkim strankama. Kroz ovaj rad promatramo novi pristup cjelobrojne optimizacije koji sa snažnom matematičkom podlogom, koristeći funkciju cilja, konveksne funkcije i pohlepne algoritme, zapravo otkriva da je tradicionalni pristup analize proporcionalnosti pogrešan. Svaka alokacijska metoda je pohlepni algoritam koji minimizira određenu funkciju cilja koja nije nužno jedinstvena, već ovisi o odabranoj metodi. Stoga, njihova usporedba i rangiranje metoda po kriteriju proporcionalnosti ne daje jednoznačan odgovor. Pristup cjelobrojne optimizacije također omogućuje dizajn novih alokacijskih metoda koje minimiziraju neke nove indekse neproporcionalnosti koji imaju poželjna matematička svojstva.

Ključne riječi:
proporcionalne alokacijske metode, metode kvocijenta, metode djelitelja, indeksi neproporcionalnosti, konveksne funkcije, pohlepni algoritmi, cjelobrojna optimizacija

Proportional representation problem and integer optimization

Summary

Traditionally, proportional allocation methods are analyzed by various indices of disproportionality. Based on these analyses, it is considered that the method of the largest remainders gives the most proportional results, while the d'Hondt method, which is also used in Croatia for the election of members of parliament, is often criticized for giving less proportional results and favoring large political parties. Through this paper, we observe a new approach to integer optimization that, with a strong mathematical foundation, using the objective function, convex functions and greedy algorithms, actually reveals that the traditional proportionality analysis approach is wrong. Each allocation method is a greedy algorithm that minimizes a certain objective function that is not necessarily unique, but depends on the chosen method. Therefore, their comparison and ranking of methods according to the criterion of disproportionality does not give an unequivocal answer. The integer optimization approach also enables the design of new allocation methods that minimize some new disproportionality indices that have desirable mathematical properties.

Keywords:
proportional allocation methods, quotient methods, divisor methods, disproportionality indexes, convex functions, greedy algorithm, integer optimization

Životopis

Rođena sam 27.6.1994. u Sisku, a odrasla sam u Novskoj gdje sam završila Osnovnu školu Novska. Kroz osnovnoškolsko obrazovanje iskazivala sam interes prema STEM području kroz razna natjecanja, te stoga srednjoškolsko obrazovanje nastavljam u prirodoslovno-matematičkoj XV. gimnaziji (MIOC) u Zagrebu gdje završavam matematičko-informatički smjer. Preddiplomski studij Matematika na Odjelu za matematiku Sveučilištu J.J. Strossmayera u Osijeku završavam 2019. godine s temom završnog rada Eksponencijalna matrična funkcija pod mentorstvom prof.dr.sc. Ninoslava Truhara. Nakon toga upisujem diplomski studij Financijska matematika i statistika na Odjelu za matematiku. Tijekom diplomskog studija bila sam zaposlena kao vlasnica obrta za računalno programiranje, te sam odradila stručnu praksu u Prvom plinarskom društvu u Odjelu upravljanja portfeljem.