Primjena derivacije funkcije u prirodnim znanostima

Vrgoč, Darija

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Darija Vrgoč

Primjena derivacije funkcije u prirodnim znanostima

Završni rad

Osijek, 2023.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Darija Vrgoč

Primjena derivacije funkcije u prirodnim znanostima

Završni rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ivan Soldo

Osijek, 2023.

Sažetak

Cilj ovog završnog rada bilo je razraditi primjenu derivaciju funkcije u prirodnim znanostima, preciznije u kemiji, medicini i fizici te primjenu derivacije u određivanju lokalnih ekstrema i monotonosti funckije. S obzirom na to da je primjena derivacije u prirodnim znanostima gotovo neizostavan dio, jer pomaže pri rješavanju određenih problema, ovaj će završni rad detaljno prikazati proces primjene derivacije u kemiji, medicini i fizici i rješavanja polaznih problema vezanih uz prirodne znanosti i svojstva funkcije.

Ključne riječi

problem tangente, problem brzine, derivacija funkcije, difrenecijabilnost, neprekidnost funkcije, primjena derivacije funkcije, prirodne znanosti

Applications of derivative of a function in natural sciences

Summary

The aim of this final paper was to elaborate the application of the derivation of functions in the natural sciences, more precisely in chemistry, medicine and physics and the application of the derivation in determining the local extrema and monotonicity of a function. Given that the application of derivation in natural sciences is an almost indispensable part, as it helps solving certain problems, this final paper will show in detail the process of applying derivation in chemistry, medicine and physics and solving the initial problems related to natural sciences and properties of function.

Keywords

tangent problem, problem of speed, derivation of function, differentiability, continuous function, application of derivative of functions, natural sciences

Sadržaj

Uvod

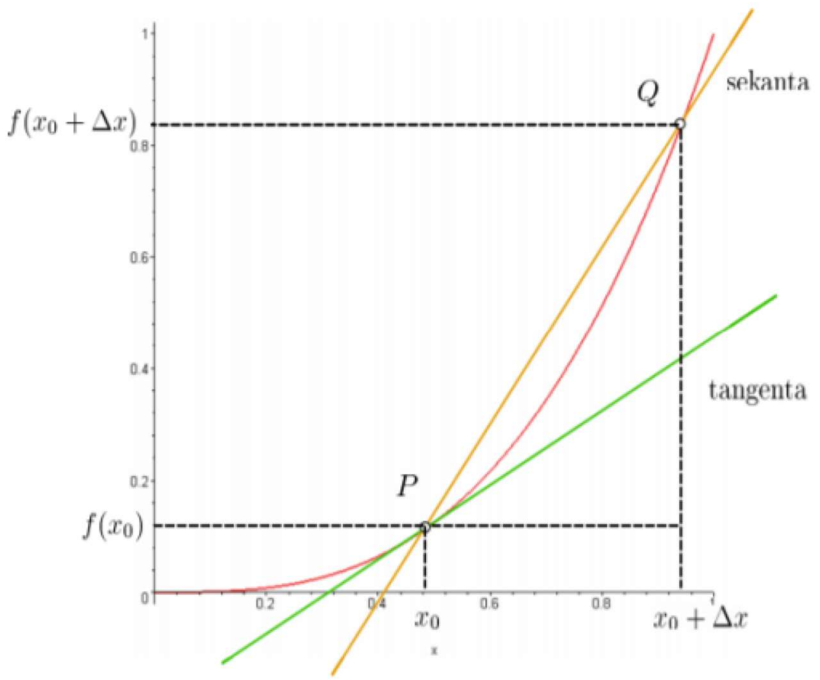
Tema je ovoga završnog rada primjena derivacije funkcije u prirodnim znanostima. Naime, poznato je da se svaka prirodna znanost temelji na primjeni derivacije uz pomoć koje dolaze do visokog razvoja. Primjena derivacije postaje neizostavan dio razvoja pojedinih prirodnih znanosti jer pomaže pri rješavanju njihovih temeljnih problema. Stoga ovaj završni rad promatra primjenu derivacije u kemiji, medicini i fizici.
Tako su u prvom poglavlju proučeni i detaljno obrađeni problemi brzine i tangente, definirani su pojam diferencijabilnosti i derivacije funkcije te veza između difrenecijabilnosti i neprekidnosti. Također su navedene derivacije elementarnih funckija i pravila deriviranja te teoremi koji nam govore o derivaciji složene i inverzne funkcije.
U drugom su poglavlju razrađeni načini primjene derivacije u kemiji, medicini i fizici, točnije primjene derivacije na brzinu kemijske reakcije i brzinu protoka krvi kroz krvnu žilu te primjena derivacije prilikom kružnog gibanja materijalne točke. Također su razređeni načini primjene derivacije prilikom određivanja lokalnih ekstrema funckije, kao i prilikom određivanja monotonosti iste, tj. određivanja intervala pada i rasta funkcije. Sve su sastavnice ovog završnog rada potkrijepljene primjerima.

1 Općenito o derivaciji funkcije

U ovom poglavlju proći ćemo kroz motivaciju i povijesni razvoj diferencijalnog računa. Pobliže ćemo objasniti problem tangente i problem brzine koji su bili glavna motivacija za uvođenje pojma derivacije funkcije. Definirat ćemo sami pojam derivacije i vezu između diferencijabilnosti i neprekidnosti. Potom ćemo se osvrnuti na pravila deriviranja i tablicu derivacija elementarnih funkcija te derivaciju kompozicije funkcija i inverzne funkcije.

1.1 Problem tangente i problem brzine

G. W. Leibniz [1], baveći se problemom tangente na graf funkcije, 1674. godine dolazi do koncepta derivacije funkcije. Pogledajmo detaljnije ono na čemu je radio. Promotrimo zadanu proizvoljnu funkciju $f : I \to \mathbb{R}$, gdje je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval i točka $x_0 \in I$. U točki $P = (x_0, f(x_0))$ povučemo tangentu na graf funkcije f, a kroz točku P i novu točku $Q = (x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ povučemo sekantu (vidi Sliku 1).



Slika 1: Problem tangente, vidi [7, Tangenta i sekanta na krivulju $y = f(x)$]

Nagib sekante, tj. njezin koeficijent smjera je dan izrazom

$$k_s = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Ako $\Delta x \to 0$, tj. ako se točka Q po grafu funkije f primiče točki P, onda će nam u limesu sekanta preći u tangentu. Drugim riječima, njezin koeficijent smjera preći će u tangentin koeficijent smjera, tj.

$$k_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{1}$$

[1]Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646.-1716., njemački filozof, matematičar, fizičar i diplomat

Tada broj dan izrazom (1), ukoliko taj limes postoji, nazivamo derivacija funckije f u točki x_0. Zato derivaciju funkcije f u točki x_0 možemo geometrijski interpretirati kao nagib tangente u pripadnoj točki grafa.

Osim geometrijske, imamo i fizikalnu interpretaciju derivacije do koje je, rješavajući problem definiranja pojma brzine, došao I. Newton [2]

Neka se materijalna točka giba po pravcu. Sa $s(t)$ označimo put koji je prešla nakon t sekundi. Tada nam izraz $\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t)$ predstavlja put koji je ta materijalna točka prešla od početne točke t do konačne točke $t + \Delta t$. Njenu prosječnu, tj. srednju brzinu definiramo kao:

$$\Delta \overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Promatramo li sve kraće intervale, tj. kad $\Delta t \to 0$, $\overline{v}$ će biti sve bolja aproksimacija trenutne brzine v. Tada za trenutnu brzinu dobivamo:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}. \tag{2}$$

Shodno tome, ukoliko limes (2) postoji, brzinu možemo definirati kao derivaciju puta po vremenu, tj. mjeru promjene položaja tijela u jedinici vremena.

1.2 Diferencijabilnost i pojam derivacije

U ovom ćemo se poglavlju osvrnuti na definiciju derivabilnosti funkcije i pogledati primjere deriviranja funkcija pomoću spomenute definicije. Također ćemo promotrititi vezu između derivabilnosti i neprekidnosti funkcije u nekoj točki i na otvorenom intervalu pomoću iskazanog i dokazanog teorema.

Definicija 1. *Kažemo da je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ diferencijabilna ili derivabilna u točki c otvorenog intervala $I \subseteq \mathbb{R}$ ako postoji $\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$. Ako taj limes ne postoji, kažemo da funkcija f nije derivabilna u točki c. Taj broj zovemo derivacija funkcije f u točki c i pišemo:*

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Naravno, sada se nameće pitanje kako općenito definirati derivaciju funkcije f na nekom otvorenom intervalu I. U prethodnoj definiciji definirana je derivacija funkcije u točki nekog otvorenog intervala. Iz toga, poprilično intuitivno, imamo sljedeću definiciju:

Definicija 2. *Kažemo da je f derivabilna na intervalu I ako je derivabilna u svakoj točki tog intervala.*

Pogledajmo sada neke jednostavne primjere u kojima ćemo pomoću definicije izračunati derivacije danih funkcija.

Primjer 1. *Zadane su funkcije $f(x) = x^3$ i $g(x) = \frac{1}{x}$. Pronađimo derivacije danih funkcija koristeći definiciju.*

[2] Isaac Newton, Woolsthorpe, 1643.- London, 1728., engleski matematičar, fizičar i astronom.

Rješenje: Za funkciju $f(x)$ imamo sljedeći račun:

$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x\to c} \frac{x^3-c^3}{x-c} = \lim_{x\to c} \frac{(x-c)(x^2+xc+c^2)}{x-c} = \lim_{x\to c}(x^2+xc+c^2) = 3c^2.$$

Dakle, za derivaciju funkcije $f(x)$ dobili smo da je $f'(x) = 3x^2$.
Za funkciju $g(x)$ računamo:

$$g'(c) = \lim_{x\to c} \frac{g(x)-g(c)}{x-c} = \lim_{x\to c} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{c}}{x-c} = \lim_{x\to c} \frac{\frac{c-x}{xc}}{x-c} = \lim_{x\to c} \frac{-1}{xc} = \frac{-1}{c^2}.$$

Odavdje zaključujemo da je derivacija funkcije g dana s $g'(x) = \frac{-1}{x^2}$.

Proučimo sada u kakvom su odnosu derivabilnost i neprekidnost funkcije u nekoj točki. Definirajmo prvo neprekidnost funckije u nekoj točki intervala i na skupu:

Definicija 3. *Za funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ kažemo da je neprekidna u točki c otvorenog intervala $I \subseteq \mathbb{R}$ ukoliko postoji limes funkcije f u točki c i $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. Funkcija je neprekidna na skupu I ukoliko je neprekidna u svakoj točki tog intervala.*

Teorem 1 (vidi [5])**.** *Ako je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ diferencijabilna u točki c otvorenog intervala I, onda je f neprekidna u c.*

Dokaz. Iz pretpostavke teorema, tj. činjenice da je funkcija f diferencijabilna u točki c zaključujemo da je funkcija

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} - f'(c), & za\ x \neq c \\ 0, & za\ x = c \end{cases}$$

neprekidna u c. Pogledajmo sada limes funkcije g u točki x:

$$\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c}(\frac{f(x)-f(c)}{x-c} - f'(c)) = 0 = g(c).$$

Promatrajući funkciju $f(x) = f(c) + (f'(c) + g(x))(x - c)$, za $x \in I$, zaključujemo da je desna strana jednakosti neprekidna u točki c. Iz toga lako vidimo da je i funkcija f neprekidna u c. □

1.3 Osnovna pravila deriviranja i tablica derivacija elementarnih funkcija

U nastavku razmatramo ponašanje svojstva derivabilnosti u točki prilikom standardnih operacija s funkcijama kao što su zbrajanje, množenje i dijeljenje.

Teorem 2 (vidi [5])**.** *Neka su funkcije $f, g : I \to \mathbb{R}$ derivabilne u točki c otvorenog intervala I.*
(1) *Funkcija $f + g$ je derivabilna u točki c i vrijedi $(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c)$.*
(2) *Funkcija fg je derivabilna u točki c i vrijedi $(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$.*
(3) *Ukoliko je funkcija $\frac{f}{g}$ definirana na intervalu I, onda je ona derivabilna u točki c i vrijedi $(\frac{f}{g})'(c) = \frac{f'(c)g(c)-f(c)g'(c)}{g(c)^2}$.*

Dokaz. Dokažimo najprije tvrdnju teorema (1). Definiramo $h = f + g$ te primjenom definicije derivabilnosti imamo:

$$\frac{h(x)-h(c)}{x-c} = \frac{(f(x)-f(c))+(g(x)-g(c))}{x-c} = \frac{f(x)-f(c)}{x-c} + \frac{g(x)-g(c)}{x-c}.$$

Primjenom limesa na obje strane jednakosti slijedi:

$$\lim_{x\to c}\frac{h(x)-h(c)}{x-c} = \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} + \lim_{x\to c}\frac{g(x)-g(c)}{x-c}$$

čime je dokazana jednakost pod (1).
Slično, za pokazati drugu tvrdnju teorema definiramo funkciju $h = fg$ za koju imamo:

$$\frac{h(x)-h(c)}{x-c} = \frac{f(x)g(x)-f(c)g(c)}{x-c} = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}g(x) + f(c)\frac{g(x)-g(c)}{x-c}.$$

Ponovno, primjenom limesa i neprekidnost funkcije g u točki c, slijedi tvrdnja teorema:

$$\lim_{x\to c}\frac{h(x)-h(c)}{x-c} = \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\lim_{x\to c} g(x) + f(c)\lim_{x\to c}\frac{g(x)-g(c)}{x-c}.$$

Dokazujemo i treću tvrdnju teorema. Ovoga puta za funkciju h odabiremo $h = \frac{1}{g}$ i slično prethodnim postupcima imamo:

$$\frac{h(x)-h(c)}{x-c} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(c)}}{x-c} = -\frac{\frac{g(x)-g(c)}{x-c}}{g(c)g(x)}.$$

Primjenom limesa i neprekidnosti funkcije g u točki c dolazimo do:

$$\lim_{x\to c}\frac{h(x)-h(c)}{x-c} = -\frac{\lim_{x\to c}\frac{g(x)-g(c)}{x-c}}{g(c)\lim_{x\to c} g(x)}.$$

Iz toga slijedi da je $h'(c) = \frac{-g'(c)}{g(c)^2}$. Primjenom druge tvrdnje teorema koju smo već dokazali za funkciju $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ slijedi treća tvrdnja. $\square$

Korolar 1 (vidi [5]). *Neka su funkcije $f, g : I \to \mathbb{R}$ diferencijabilne u točki c otvorenog intervala I. Tada je za sve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ funkcija $\lambda f + \mu g$ diferencijabilna u točki c i vrijedi:*

$$(\lambda f + \mu g)'(c) = \lambda f'(c) + \mu g'(c).$$

Osnovne elementarne funkcije deriviraju se na način kako je prikazano u sljedećoj tablici. Dokazi navedenih formula mogu se naći u [5].

$f(x)$	$f'(x)$
$c, c \in \mathbb{R}$	0
x	1
x^n	$nx^{n-1}, n \in \mathbb{R}$
e^x	$e^x, x \in \mathbb{R}$
a^x	$a^x ln\ a, a > 0, x \in \mathbb{R}$
lnx	$\frac{1}{x}, x > 0$
$log_a x$	$\frac{1}{x} log_a e, x > 0$
$sin(x)$	$cos(x), x \in \mathbb{R}$
$cos(x)$	$-sin(x), x \in \mathbb{R}$
$tg(x)$	$\frac{1}{cos^2(x)}, x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
$ctg(x)$	$-\frac{1}{sin^2(x)}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \lvert x\rvert < 1$
$arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \lvert x\rvert < 1$
$arctg(x)$	$\frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$
$arcctg(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$

Primijenimo prethodni teorem i tablicu derivacija na neke proizvoljne funkcije.

Primjer 2. *Za navedene funkcije, odredite njihove derivacije:*

(a) $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x^3}}$.
Primijetimo da $\sqrt{x^3}$ *možemo zapisati kao* $x^{-\frac{3}{2}}$. *Tada je prema pravilu za deriviranje produkta:*
$f'(x) = (e^x \cdot x^{-\frac{3}{2}})' = (e^x)' \cdot x^{-\frac{3}{2}} + e^x \cdot (x^{\frac{3}{2}})' = e^x x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} e^x x^{-\frac{5}{2}} = \frac{e^x}{\sqrt{x^3}} - \frac{3e^x}{2\sqrt{x^5}}$.

(b) $f(x) = x^6 lnx + 7^x$.
Primjenjujemo pravilo za deriviranje produkta i formule za deriviranje, pa slijedi:
$f'(x) = (x^6 lnx + 7^x)' = (x^6)' \cdot lnx + x^6 \cdot (lnx)' + 7^x ln7 = 6x^5 lnx + x^5 + 7^x ln7$.

(c) $f(x) = cosx\ arcctgx - \frac{3x+2}{sinx}$.
Prema pravilima za deriviranje dobivamo:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(cosx\ arcctgx - \frac{3x+2}{sinx}\right)' \\ &= (cosx)' \cdot arcctgx + cosx \cdot (arcctgx)' - \frac{(3x+2)'\ sinx - (3x+2) \cdot (sinx)'}{sin^2 x} \\ &= -sinx\ arcctgx - \frac{cosx}{1+x^2} - \frac{3}{sinx} + \frac{(3x+2)\ cosx}{sin^2 x}. \end{aligned}$$

1.4 Derivacija složene i inverzne funkcije

Sada ćemo iskazati teoreme koji nam govore od derivaciji kompozicije funkcija i derivaciji inverzne funkcije. Dokazi ovih teorema mogu se naći u [5]

Teorem 3 (Derivacija kompozicije funkcija, vidi [5]). *Neka su $f : I \to \mathbb{R}$ i $g : J \to \mathbb{R}$ i neka je $f(I) \subseteq J$, odnosno neka je kompozicija $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ dobro definirana na I.*
Ako je funkcija f derivabilna u točki $c \in I$ i funkcija g derivabilna u točki $d = f(c) \in J$, onda je kompozicija $g \circ f$ derivabilna u c i vrijedi:

$$(g \circ f)'(c) = g'(d) \cdot f'(c).$$

Nadalje, promotrimo primjenu Teorema 3 na proizvoljnu funkciju.

Primjer 3. *Neka je zadana funkcija $h(x) = ln(5x - 1)$. Primijetimo da je h kompozicija funkcija $f(x) = lnx$ i $g(x) = 5x - 1$. Stoga vrijedi:*

$$h'(x) = (ln(5x - 1))' = \frac{1}{5x - 1} \cdot (5x - 1)' = \frac{5}{5x - 1}.$$

Teorem 4 (Derivacija inverzne funkcije, vidi [5]). *Neka je $f : I \to J$, $I, J \subseteq \mathbb{R}$, I otvoren interval i neka je f neprekidna bijekcija na I. Ako f ima derivaciju u točki $c \in I$ i ako je $f'(c) \neq 0$, onda je f^{-1} derivabilna u točki $d = f(c)$ i vrijedi:*

$$(f^{-1})'(d) = \frac{1}{f'(c)}.$$

Primjer 4. *Odredimo derivaciju inverzne funkcije od $f(x) = \frac{1}{x+3}$.*

Rješenje: Primijetimo da $f(x)$ možemo zapisati i u obliku $f(x) = (x + 3)^{-1}$. Nađimo najprije derivaciju polazne funkcije.

$$f'(x) = ((x + 3)^{-1})' = -(x + 3)^{-2} \cdot (x + 3)' = -\frac{1}{(x + 3)^2}.$$

Sada primjenom Teorema 4 slijedi:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{-\frac{1}{(x+3)^2}} = -(x + 3)^2.$$

Zbog $y = f(x) = \frac{1}{x+3}$ nadalje imamo:

$$(f^{-1})'(y) = -\left(\frac{1}{y}\right)^2 = -\frac{1}{y^2},$$

što možemo zapisati u obliku

$$(f^{-1})'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

2 Primjene derivacija

Derivacija se može primijenjivati u različitim znanstvenim disciplinama kao što biologija, kemija, medicina i fizika koje ćemo detaljnije obraditi u nastavku. Također ćemo promotriti vezu između lokalnih ekstrema i derivacije funkcije kao i vezu između monotonosti i derivacije funkcije.

2.1 Lokalni ekstremi i derivacija funkcije

Kako bismo mogli pokazati vezu između lokalnih ekstrema i derivacije funkcije, najprije moramo definirati što nam lokalni ekstremi predstavljaju i iskazati pomoćnu lemu.

Lema 1. *Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ diferencijabilna u točki c otvorenog intervala $I \subseteq \mathbb{R}$. Ako je $f'(c) > 0$, onda $\exists\ \delta > 0$ takav da vrijedi:*

$$\begin{aligned} x \in \langle c-\delta, c\rangle &\Rightarrow f(x) < f(c); \\ x \in \langle c, c+\delta\rangle &\Rightarrow f(c) < f(x). \end{aligned}$$

Ako je $f'(c) < 0$, onda $\exists\ \delta > 0$ takav da vrijedi:

$$\begin{aligned} x \in \langle c-\delta, c\rangle &\Rightarrow f(x) > f(c); \\ x \in \langle c, c+\delta\rangle &\Rightarrow f(c) > f(x). \end{aligned}$$

Definicija 4. *Za funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ kažemo da u točki c otvorenog intervala $I \subseteq \mathbb{R}$ ima:*

(a) lokalni maksimum $f(c)$, ako $\exists\ \delta > 0$ takav da $\forall\ x \in I$, $|x-c| < \delta \Rightarrow f(x) \le f(c)$;

(b) strogi lokalni maksimum $f(c)$, ako $\exists\ \delta > 0$ takav da $\forall\ x \in I$, $0 < |x-c| < \delta \Rightarrow f(x) < f(c)$;

(c) lokalni minimum $f(c)$, ako $\exists\ \delta > 0$ takav da $\forall\ x \in I$, $|x-c| < \delta \Rightarrow f(x) \ge f(c)$;

(d) strogi lokalni minimum $f(c)$, ako $\exists\ \delta > 0$ takav da $\forall\ x \in I$, $0 < |x-c| < \delta \Rightarrow f(x) > f(c)$.

Te točke zovemo ***točke lokalnog****, tj.* ***strogog lokalnog ekstrema funkcije*** *f.*

Jedan od bitnijih teorema diferencijalnog računa zasigurno je Fermatov [3] teorem koji će nam olakšati određivanje lokalnih ekstrema funkcije. Dokaz ovog teorema može se naći u [5].

Teorem 5 (Fermatov teorem, vidi [5])**.** *Neka $f : I \to \mathbb{R}$ u točki c otvorenog intervala $I \subseteq \mathbb{R}$ ima lokalni ekstrem. Ako je f diferencijabilna u c, onda je $f'(c) = 0$.*

Uvjet $f'(c) = 0$ nam je nužan, ali ne i dovoljan kako bismo mogli reći da funkcija f u točki $c \in I$ ima lokalni ekstrem. Upravo one točke otvorenog intervala I za koje vrijedi da je $f'(c) = 0$ zovemo **stacionarne točke** funkcije f. Bitno je primijetiti da obrat Fermatovog teorema ne vrijedi.

[3] P. Fermat, 1607. - 1665., francuski matematičar i pravnik

Kako bismo mogli iskazati dodatan teorem, čiji dokaz možemo vidjeti u [6], koji će nam također pomoći u određivanju lokalnih ekstrema funkcije, moramo najprije vidjeti što nam predstavlja druga derivacija funkcije. Stoga, promotrimo slučaj kada je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ derivabilna na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Tada će nam $\forall x \in I$, funkcija $f' : I \to \mathbb{R}$ biti dobro definirana. Tu funkciju f' nazivamo derivacijom funkcije f na otvorenom intervalu I. Analogno, neka je sad funkcija f' derivabilna na I. Tada će $\forall x \in I$, funkcija $f'' : I \to \mathbb{R}$ biti dobro definirana i nazivamo ju drugom derivacijom funkcije f na otvorenom intervalu I.

Teorem 6 (vidi [6]). *Ako je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ dva puta derivabilna na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$, onda f u točki $c \in I$ postiže:*

(a) lokalni minimum, ako je $f'(c) = 0$ i $f''(c) > 0$;

(b) lokalni maksimum, ako je $f'(c) = 0$ i $f''(c) < 0$.

Pogledajmo sada na primjeru kako možemo pomoću derivacija funkcije riješiti određene probleme vezane uz lokalne ekstreme.

Primjer 5. *Trebamo izraditi vazu zapremnine 2l tako da potrošimo što je manje moguće materijala. Koje su dimenzije te vaze?*

RJešenje: Ako sa r označimo polumjer baze vaze, a sa h njezinu visinu, onda oplošje i volumen možemo računati na sljedeći način:

$$V = r^2\pi \cdot h = 2l = 2\ dm^3,$$
$$O = 2B + P = 2r^2\pi + 2r\pi \cdot h.$$

Iz formule za volumen možemo izraziti visinu kao

$$h = \frac{V}{r^2\pi} \Rightarrow h = \frac{2}{r^2\pi}.$$

Kada tu visinu uvrstimo u formulu za oplošje dobivamo funkciju koja ovisi samo u jednoj varijabli, tj.

$$O(r) = 2r^2\pi + 2r\pi \cdot \frac{2}{r^2\pi} = 2r^2\pi + \frac{4}{r}.$$

Kako bismo mogli koristiti prethodna dva teorema trebamo derivirati tu funkciju i naći njene stacionarne točke.

$$O'(r) = 4r\pi - \frac{4}{r^2} = 0, r \neq 0 \ \Rightarrow \ r = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} \approx 0.683\ dm.$$

Drugi puta deriviramo funkciju $O(r)$ i za stacionarnu točku ($r = 0.683$) vrijedi sljedeće:

$$O''(r) = 4\pi + \frac{8}{r^3} > 0,$$

pa primjenjujući Teorem 6 zaključujemo da funkcija $O(r)$ u točki $r = 0.683$ postiže lokalni minimum. Preostalo nam je još odrediti visinu vaze kada je $r \approx 0.683\ dm$:

$$h = \frac{2}{r^2\pi} \cdot \frac{r}{r} = \frac{2r}{r^3\pi} = \frac{2r}{\frac{1}{\pi} \cdot \pi} = 2r \approx 1.366\ dm.$$

2.2 Monotonost i derivacija funkcije

U ovom poglavlju promatrat ćemo kako predznak derivacije određuje pada li funkcija ili raste, tj. određuje njezinu monotonost. Zbog toga ćemo najprije definirati kakva je to monotono padajuća, tj. monotono rastuća funkcija.

Definicija 5. *Kažemo da je funkcija $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ monotono rastuća [monotono padajuća] na intervalu $I = \langle a, b\rangle$ ako vrijedi*

$$x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \leq f(x_2) \; [f(x_1) \geq f(x_2)].$$

Ako u ovoj definiciji znak "$\leq$" "[$\geq$]" zamijenimo znakom "$<$" "[$>$]", kažemo da je funkcija f strogo monotono rastuća [strogo monotono padajuća] na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Pogledajmo neke od primjera monotono padajuće i monotono rastuće funkcije.

Primjer 6. *Neka su zadane funkcije $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je $f(x) = -5x-3$ i $g(x) = x^3+x$. Iz definicije lako vidimo da je funkcija f strogo monotono padajuća na $\mathbb{R}$, dok je funkcija g strogo monotono rastuća na $\mathbb{R}$.*

Kako bismo preko predznaka derivacije mogli odrediti monotonost funkcije, točnije, odrediti njezin pad i rast, potreban nam je sljedeći teorem čiji dokaz možemo vidjeti u [6].

Teorem 7 (vidi [6])**.** *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na segmentu $[a, b]$ i derivabilna na intervalu $\langle a, b\rangle$. Tada*

(a) funkcija f monotno raste [strogo monotono raste] na $\langle a, b\rangle$ ako i samo ako je $f'(x) \geq 0$, za sve $x \in \langle a, b\rangle$ [ako je $f'(x) > 0$, za sve $x \in \langle a, b\rangle$];

(b) funkcija f monotno pada [strogo monotono pada] na $\langle a, b\rangle$ ako i samo ako je $f'(x) \leq 0$, za sve $x \in \langle a, b\rangle$ [ako je $f'(x) < 0$, za sve $x \in \langle a, b\rangle$].

Primjer 7. *Primijenimo Teorem 7 kako bismo odredili intervale monotonosti funkcije $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x$.*

Rješenje: Nađimo stacionarne točke tako da prvu derivaciju izjednačimo s 0:

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 2x - 3 = x^2 + 2x - 3 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = -3, \; x_2 = 1.$$

Odredimo sada vrijednosti prve derivacije u proizvoljnim točkama intervala $\langle -\infty, -3\rangle$, $\langle -3, 1\rangle$, $\langle 1, \infty\rangle$, tj. između stacionarnih točaka:

$$f'(-4) = 5; \; f'(-2) = -3; \; f'(3) = 12.$$

Nadalje, zaključujemo da funkcija f strogo monotono raste na $\langle -\infty, -3\rangle \bigcup \langle 1, \infty\rangle$, a strogo monotono pada na $\langle -3, 1\rangle$.

2.3 Primjena derivacije u kemiji

Primjene derivacije u kemiji se najčešće pojavljuju u fizikalnoj kemiji, točnije u kemijskoj kinetici. Intuitivno se nameće da ćemo u ovom odlomku proučavati brzinu kemijske reakcije jer se kemijska kinetika bavi proučavanjem brzine kemijske reakcije kao i čimbenicima koji na nju utječu. Kemijska reakcija podrazumijeva kemijsko mijenjanje određene tvari što rezultira stvaranjem novih tvari različitih svojstava. U njoj sudjeluju reaktanti, tvari koje međusobno reagiraju, i produkti, tj. tvari koje tijekom kemijske reakcije nastaju. Pod brzinom kemijske reakcije podrazumijevamo napredovanje kemijske reakcije s vremenom. Općenito, kemijsku reakciju možemo zapisati u obliku jednadžbe:

$$aA + bB \to cC + dD,$$

koju možemo opisati tako da uzevši a molekula reaktanta A i b molekula reaktanta B dobivamo c molekula produkta C i d molekula produkta D.
Na brzinu kemijske reakcije, između ostalog, utječe množinska koncentracija reaktanata i produkata. Njihovu množinsku koncentraciju izražavamo preko mola po litri (mol/l) i označavamo s $[A], [B], [C]$ i $[D]$. Koncentracije se tijekom reakcije mijenjaju, zato te veličine ovise o t. Sada brzinu kemijske reakcije definiramo kao:

$$-\frac{1}{a}[A]'(t) = -\frac{1}{b}[B]'(t) = \frac{1}{c}[C]'(t) = \frac{1}{d}[D]'(t).$$

Pogledajmo kako možemo zapisati jednadžbu brzine kemijske reakcije na nekoliko primjera.

Primjer 8. *Neka su zadane jednadžbe kemijske reakcije:*

(a) $2Ca + O_2 \to 2CaO,$

(b) $H_2 + Cl_2 \to 2HCl.$

Postavimo jednadžbe za brzinu kemijske reakcije.

Rješenje:

(a) Brzinu kemijske reakcije zapisujemo u sljedećem obliku:

$$v = -\frac{1}{2}\frac{d[Ca]}{dt} = -\frac{d[O_2]}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d[CaO]}{dt}$$

tj. brzina potrošnje kalcija istovrijedna je brzini stvaranja kalcijeva oksida, dok je brzina potrošnje kisika dva puta manja od brzine stvaranja kalcijeva oksida.

(b) Brzinu kemijske reakcije zapisujemo u sljedećem obliku:

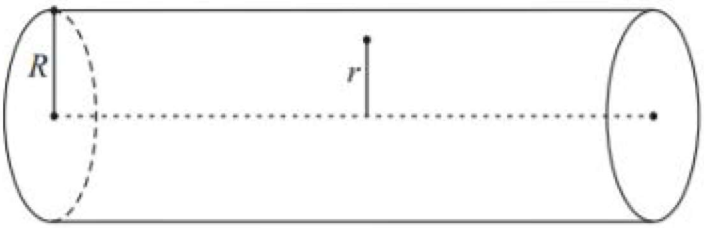
$$v = -\frac{d[H_2]}{dt} = -\frac{d[Cl_2]}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d[HCl]}{dt}$$

tj. brzina potrošnje vodika dva je puta manja od brzine stvaranja klorovodika. Analogno za klor, brzina njegove potrošnje dva je puta manja od brzine stvaranja klorovodika.

2.4 Primjena derivacije u medicini i biologiji

Medicina kao jedna od najvažnijih znanosti u suvremenome svijetu koja nastoji u svakom pogledu pomoći čovjeku pri liječenju tjelesne i duševne bolesti također se može povezati s matematikom. Drugim riječima, matematika na različite načine postaje alat kojim medicina razvija i potvrđuje određena istraživanja. U ovome konkretnom slučaju ovrsnut ćemo se na kardiologiju, koja kao grana medicine podrazumijeva liječenje bolesti srca i krvnih žila. Kada krv promatramo s fizičkog stajališta, onda treba spomenuti da ono što je svojstveno krvi je da je ona nekompresibilan viskozan fluid. Pod nekompresibilan podrazumijevamo da tijekom kompresije,tj. tijekom povećanja tlaka, krv ne mijenja svoj volumen, dok pod viskozan podrazumijevamo postojanje trenja koje se odupire toku fluida, a nalazi se među njegovim slojevima.

Objekt promatranja cilindrična je krvna žila radijusa R te krv koja kroz nju protječe.



Slika 2: Cilindrična krvna žila, vidi [2, Krvna žila]

Prvo takvo promatranje izveo je francuski fizičar i matematičar Poiseuille [4], koji u svom zakonu navodi da je tok krvi laminaran, točnije da brzina toka u promatranoj točki ovisi isključivo o udaljenosti r dane točke od središta žile. Tu brzinu računamo preko zadane formule:

$$v(r) = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2). \tag{3}$$

Parametri su te formule sljedeći: P je pad tlaka (mjerna jedinica je Pascal[5] $[Pa]$, η koeficijent viskoznosti krvi (mjerna jedinica Pascal sekunda $[Pa\ s]$) te l duljina žile.

[4]Jean Léonard Marie Poiseuille, Pariz, 1797. - Pariz, 1869., francuski fizičar i matematičar
[5]Blaise Pascal, Clermont-Ferrard, 1623. - Pariz, 1662.

Promatrajući prethodno navedenu formulu možemo zaključiti da će brzina toka biti najveća u slučaju kada je $r = 0$, odnosno na sredini krvne žile. S druge strane, brzina će nam postizati vrijednost 0 kada je $r = R$, a to se postiže na samim rubovima krvne žile. Rezultat deriviranja formule (3) je gradijent brzine dan izrazom:

$$\frac{dv}{dr} = v'(r) = -\frac{Pr}{2\eta l},$$

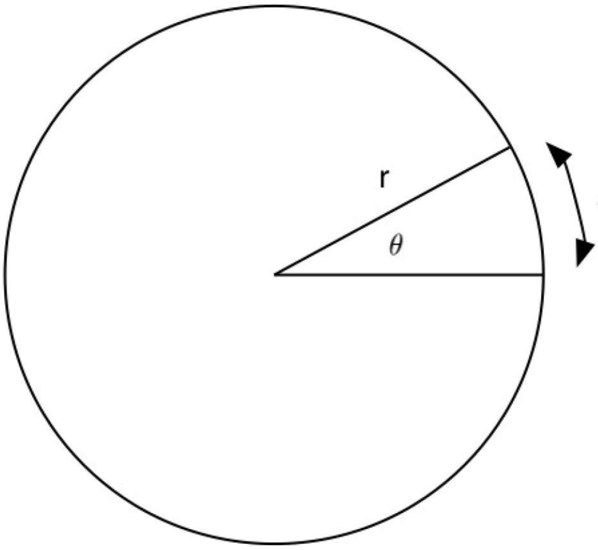
kojim mjerimo mijenjanje brzine toka krvi s obzirom na udaljenost r.

Primjer 9. *Neka krvna žila ima polumjer $R = 0.02$ cm, duljinu $l = 5$ cm, pad tlaka $P = 350$ Pa i viskoznost $\eta = 0.005 Pa \cdot s$. Potrebno je izračunati brzinu toka krvi i njen gradijent na udaljenostima $r = 0.015$ cm i $r = 0.02$ cm.*

Rješenje: Ranije smo pokazali da brzinu toka krvi računamo preko formule $v(r) = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)$. Stoga je $v(0.015) = 0.6125\ cm/s$ i $v(0.02) = 0\ cm/s$. Deriviranjem te formule dobili smo izraz kojim računamo gradijent brzine, tj. $\frac{dv}{dr} = v'(r) = -\frac{Pr}{2\eta l}$. Tada vrijedi $v'(0.015) = -105\ cm/s$ i $v'(0.02) = -140\ cm/s$.

2.5 Primjena derivacije u fizici

U prvom poglavlju ovoga rada analizirali smo problem brzine i zaključili da brzinu materijalne točke u trenutku t možemo definirati kao derivaciju puta po vremenu, a to zapisujemo na način $v(t) = s'(t)$. Na problem nailazimo kada promatramo jednoliko ubrzano gibanje, ali na analogan način akceleraciju, tj. ubrzanje tijela možemo definirati kao derivaciju brzine po vremenu. Tada za akceleraciju vrijedi: $a(t) = v'(t)$.
U slučaju kad akceleracija materijalne točke s brzinom zatvara kut koji nije 0, točnije kad se ne giba po jednakom pravcu kao brzina, materijalna točka će se gibati po kružnici. Upravo takvo gibanje nazivamo kružno gibanje materijalne točke, prikazano na Slici 3, gdje nam je $l(t)$ duljina kružnog luka nad kutem $\theta(t)$, kut $\theta(t)$ je kut koji spojnica tijela zatvara s pozitivnim dijelom osi x izražen u radijanima, a r radijus kružnice koju tvori gibanje promatrane materijalne točke.



Slika 3: Kružno gibanje materijalne točke, vidi [4]

Kako bismo najlakše promatrali kružno gibanje, nek nam se središte promatrane kružnice, koju smo u ravnini smjestili u koordinanti sustav, podudara sa samim ishodištem koordirnatnog sustava. Tada takvo kružno gibanje možemo prikazati preko *kružnih veličina.*
Kutnu brzinu možemo odrediti preko kuta $\theta(t)$ kao promjenu kuta po vremenu, tj. $\omega(t) = \theta'(t)$ jer nam je u trenutku t položaj tijela jedinstveno određen s $\theta(t)$. Duljinu kružnog luka $l(t)$ računamo preko definicije, pa je $l(t) = \theta(t) \cdot r$ i upravo funkcijom l mjerimo put koji je tijelo prešlo prilikom gibanja. Ako deriviramo izraz za $l(t)$, dobit ćemo upravo linearnu (obodnu) brzinu koja je jednaka $v(t) = l'(t) = \theta'(t) \cdot r = \omega(t) \cdot r$. Ovime smo pokazali vezu između linearne (obodne) i kutne brzine.

Primjer 10. *Neka se materijalna točka giba u smjeru suprotnom od kazaljke na satu. Tada je njezin prijeđeni kut u trenutku* t *dan formulom* $\theta(t) = \frac{t^3}{16} - 2t$*, izražen u radijanima i gdje je* $t \geq 0$*. Potrebno je odrediti prijeđeni kut, kutnu brzinu i kutnu akceleraciju u trenutku* $t = 8\ s$*.*

Rješenje: Kako bismo izračunali prijeđeni kut, dovoljno je da u zadanu formulu za prijeđeni kut uvrstimo dani trenutak. Time imamo da je $\theta(8) = 16\ rad$. Ranije smo u izvodu pokazali da je kutna brzina zapravo promjena kuta po vremenu, tj. $\omega(t) = \theta'(t) = \frac{3t^2}{16} - 2$. Kutnu akceleraciju dobijemo deriviranjem kutne brzine, pa imamo da je $\alpha(t) = \frac{d\theta}{dt} = \frac{3t}{8}$. Tada će za $t = 8\ s$ vrijediti da je $\omega(8) = 10\ rad/s$, a $\alpha(8) = 3\ rad/s^2$.

Literatura

[1] F.M. Bruckler, I. Pažanin, *Matematika 1 za kemičare, PMF - Kemijski odsjek, Sveučilište u Zagrebu, 2012.*

[2] K. Burazin, I. Kuzmanović, I. Soldo, J. Jankov, *Primjene diferencijalnog i integralnog računa funkcija jedne varijable, Odjel za matematiku, Sveučilište J. J. Storssmayera u Osijeku, 2017.*

[3] A. Corn, *Brzina u prirodnim i društvenim znanostima, Osječki matematički list 18, 2018.*

[4] R. Evans, *Derivation of the centripetal force, Thecuriousastronomer*

[5] B. Guljaš, *Matematička analiza I i II*, PMF - Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu, skripta.

[6] K. Novaković, *Derivacija funkcije i primjene, Odjel za matematiku, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, završni rad, 2018.*

[7] L. Rupčić, *Primjene diferencijalnog i integralnog računa u prirodnim znanostima, Odjel za matematiku, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, diplomski rad, 2020.*

[8] S. Ružičić, *Modeli protoka krvi u arterijama, PMF, Univerzitet u Novom Sadu, diplomski rad, 2015.*

[9] M. Štefan Trubić, I. Radošević, *Diferencijalni račun, Poučak : časopis za metodiku i nastavu matematike, Vol. 18 No. 69, 2017.*