Topološki prostori s naglaskom na topologije definirane na skupu R

Brković, Iva

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku

Fakultet primijenjene matematike i informatike

Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Iva Brković

Topološki prostori s naglaskom na topologije definirane na skupu $\mathbb{R}$

Završni rad

Osijek, 2023.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku

Fakultet primijenjene matematike i informatike

Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Iva Brković

Topološki prostori s naglaskom na topologije definirane na skupu $\mathbb{R}$

Završni rad

Voditelj: Izv. prof. dr. sc. Dragana Jankov Maširević

Osijek, 2023.

Sažetak:

U ovom završnom radu baviti ćemo se topološkim prostorima i upoznati se s pripadnim topologijama. U prvom poglavlju uvesti ćemo pojam topologije i topološkog prostora, definirati ćemo bazu i podbazu topologije i izvesti nekoliko rezultata vezanih uz bazu koje ćemo koristiti u narednim poglavljima. Drugo poglavlje bavi se topologijama definiranim na skupu $\mathbb{R}$ te pripadnim bazama. U preostalim poglavljima proučiti ćemo uređajnu, produktnu te relativnu topologiju.

Ključne riječi:

topologija, topološki prostor, baza topologije, uređajna topologija, produktna topologija, Hausdorffov prostor, relativna topologija

Topological space with an emphasis on topologies defined on the set $\mathbb{R}$

Abstract: In this bachelor's thesis we observe topological spaces and the appropriate topologies. In the first chapter, we will recall the concepts of topology and topological space, we will define the base and subbase of the topology and derive several results related to the base that will be used in the next chapters. The second chapter includes topologies defined on the set $\mathbb{R}$ and the associated bases. In the remaining chapters we will consider order topology, product topology and subspace topology.

Key words:
topology, topological space, base of the topology, order topology, product topology, Hausdorff space, subspace topology

Sadržaj

Uvod

Topologija kao grana matematike nastaje proučavanjem općenitih svojstava euklidskog prostora i kontinuiranih funkcija na njemu. Prisjetimo se kako je euklidski prostor realan n-dimenzionalan vektorski prostor na kojemu je zadan skalarni produkt.
Topologija se u matematici ponajviše razvija krajem 19. stoljeća kada njemački matematičar Felix Hausdorff uvodi pojam topološkog prostora. Iako su se topologija i topološki prostori razmatrali i ranije, Hausdorff je uz uvođenje pojma topološkog prostora doprinjeo drugim temeljnim pojmovima ove grane matematike pa ga se smatra i jednim od utemeljitelja moderne topologije.

U prvom poglavlju ovog rada uvesti ćemo se u pojam topologije te ga kroz primjere ilustrirati. Definirat ćemo i topološki prostor. Nadalje, definirati ćemo bazu topologije, ilustrirati ju primjerom i izvesti neke bitne tvrdnje koje ćemo koristiti i u nastavku.

U drugom poglavlju baviti ćemo se raznim topologijama na $\mathbb{R}$ i bazama kojima su one generirane. Tako ćemo definirati i primjerom opisati standardnu, odozdo ograničenu i K-topologiju.

U trećem poglavlju definirati ćemo uređajnu topologiju kao i otvorene okoline koje toj topologiji formiraju podbazu.

Kada promatramo topološke prostore, uz Kartezijev produkt možemo definirati produktnu topologiju. U četvrtom poglavlju pokazati ćemo kako izgleda baza takve topologije. Produktnu topologiju možemo definirati i na familiji topoloških prostora. Za tako definiranu topologiju izvesti ćemo nekoliko tvrdnji koje ju povezuju s Hausdorffovim prostorom te definirati još neke topološke prostore koji imaju dodatne uvjete.

Na posljetku, u petom poglavlju, spomenuti ćemo i topologiju na podskupovima nekog otvorenog skupa, tzv. relativnu topologiju.

1. Baza toplogije

1.1. Uvodni pojmovi

Prisjetimo se najprije nekoliko bitnih definicija koje će dovesti do vrlo važne definicije za naredna poglavlja.

Definicija 1.1. *Neka je X neprazan skup. Svako preslikavanje $d_1 : X \times X \to \mathbb{R}$ koje ima sljedeća svojstva:*
(M1) $d_1(x, y) \geq 0$, *za sve* $x, y \in X$
(M2) $d_1(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, *za sve* $x, y \in X$
(M3) $d_1(x, y) = d_1(y, x)$, *za sve* $x, y \in X$
(M4) $d_1(x, y) \leq d_1(x, z) + d_1(z, y)$, *za sve* $x, y, z \in X$
nazivamo metrikom na skupu X.

Uređen par (X, d_1) nepraznog skupa X i metrike d_1 na njemu naziva se metrički prostor.

Definicija 1.2. *Neka je (X, d_1) metrički prostor, $x_0 \in X$ te $r \in \mathbb{R}_0^+$. Otvorena kugla sa središtem u x_0 polumjera r, u oznaci $K(x_0, r)$, je skup svih $x \in X$ takvih da je udaljenost od x do x_0 manja od r. Dakle, $K(x_0, r) := \{x \in X : d_1(x, x_0) < r\}$.*

Definicije 1.1 i 1.2 potrebne su kako bismo došli do prvog važnog pojma kojega ćemo koristiti i u nastavku.

Definicija 1.3. *Skup $Y \subseteq X$ u metričkom prostoru (X, d_1) naziva se otvoren ukoliko se oko svake točke tog skupa može opisati otvorena kugla koja je cijela sadržana u tom skupu.*

Propozicija 1.1. *Otvorena kugla sa središtem u x_0 radijusa r iz metričkog prostora (X, d_1) je otvoren skup.*

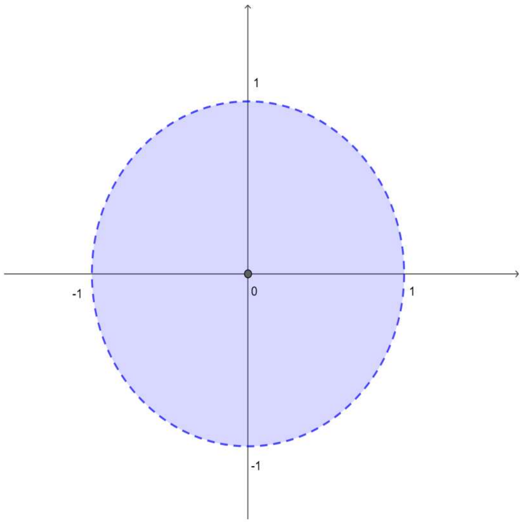
Dokaz. Dokaz tvrdnje može se pronaći u [2]. $\square$

Pogledajmo sada primjere otvorenih kugli sa istim središtima i radijusom, no u dva različita euklidska prostora.

Primjer 1.1.
(a) Na slici 1. prikazana je otvorena kugla sa središtem u 0 radijusa 1 u euklidskom prostoru $\mathbb{R}$.

Slika 1:

(b) Na slici 2. prikazana je otvorena kugla sa središtem u 0 radijusa 1 u euklidskom prostoru $\mathbb{R}^2$.



Slika 2:

1.2. Topologija

Definicija 1.4. *Topologija na nepraznom skupu X je familija $\mathcal{U}$ otvorenih podskupova od X koja ima sljedeća svojstva:*
(1) unija svake familije članova iz $\mathcal{U}$ je član iz $\mathcal{U}$
(2) presijek konačno mnogo članova iz $\mathcal{U}$ je član iz $\mathcal{U}$
(3) $\emptyset \in \mathcal{U}$; $X \in \mathcal{U}$.

Drugim riječima topologija na X bila bi svaka familija skupova na X koja je zatvorena na proizvoljne unije i konačne presjeke te sadrži prazan skup i cijeli skup.

Napomena 1.1. *Presjek otvorenih skupova ne mora biti otvoren skup.*

Prethodnu napomenu možemo ilustrirati primjerom.

Primjer 1.2. *Uzmimo skupove oblika $(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}), k \in \mathbb{N}$. Svaki od njih je otvoren, no u presjeku oni daju jednočlan skup $\{0\}$, tj.*

$$\{0\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Big(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k} \Big).$$

Jednočlane skupove ne možemo prikazati pomoću unije otvorenih skupova pa stoga skup $\{0\}$ nije otvoren.

Definicija 1.5. *Uređen par $(X, \mathcal{T})$ za X neprazan skup i $\mathcal{T}$ topologiju na njemu nazivamo topološki prostor.*

Topološki prostor je osnovni objekt topologije, dok elemente topologije nazivamo otvorenim skupovima.

Navedimo nekoliko primjera topologija.

Primjer 1.3. *Diskretna topologija na nepraznom skupu X je familija svih podskupova od X te ju označavamo s $\mathcal{P}(X)$.*

Primjer 1.4. *Trivijalna topologija na nepraznom skupu X je familija koja sadrži samo prazan skup $\emptyset$ i neprazan skup X te ju možemo zapisati na ovaj način $\mathcal{T}= \{\emptyset,\ X\}$.*

Primjer 1.5. *Neka je $X= \{3,4,5\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{3\}, X\}$. Uređeni par $(X, \mathcal{T})$ tada čini topološki prostor jer su zadovoljena svojstva (1)-(3) iz definicije 1.4.*

Kako je

$$\begin{gathered}\emptyset \cup \{3\} = \{3\}\\ \emptyset \cup X = X\\ \{3\} \cup X = X\\ \emptyset \cup \{3\} \cup X = X,\end{gathered}$$

slijedi da je unija svake familije skupova iz $\mathcal{T}$ član iz $\mathcal{T}$ i s time je prvo svojstvo ispunjeno.
Zbog

$$\begin{gathered}\emptyset \cap \{3\} = \emptyset\\ \emptyset \cap X = \emptyset\\ \{3\} \cap X = \{3\}\\ \emptyset \cap \{3\} \cap X = \emptyset,\end{gathered}$$

zaključujemo da je presjek konačno mnogo članova iz $\mathcal{T}$ ponovno član iz $\mathcal{T}$ te je ispunjeno i drugo svojstvo.
Treće svojstvo je trivijalno jer vidimo kako su zaista $\emptyset$ i cijeli X u $\mathcal{T}$.
Pokazali smo da vrijede svojstva (1)-(3) iz definicije 1.4 pa $\mathcal{T}$ čini topologiju na X.

Primjer 1.6. *Za $X = \{3,4,5\}$ iz primjera 1.5 te $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{3,4\}, X\}$ uređen par $(X,\ \mathcal{T}_1)$ također čini topološki prostor.*

Primjer možemo provjeriti koristeći se istim postupkom kao iz primjera 1.5.

1.3. Baza topologije

Kako bismo definirali bazu topologije preko otvorenih skupova uvedimo najprije definiciju pokrivača.

Definicija 1.6. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor i $Y \subseteq X$. Familija $S = \{S_\alpha : \alpha \in A\}$ podskupova S_α skupa X naziva se pokrivač skupa Y ako je Y podskup unije svih S_α za $\alpha \in A$, tj. $Y \subseteq \bigcup_{\alpha\in A} S_\alpha$.*

Sada imamo sve kako bismo definirali bazu topologije.

Definicija 1.7. *Neka je $(X,\mathcal{T})$ topološki prostor. Baza topologije $\mathcal{T}$ je podfamilija $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ otvorenih skupova od X takva da vrijedi:*
(1) $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ je pokrivač od X
(2) ako za $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ je $x_0 \in B_1 \cap B_2$ tada postoji $B \in \mathcal{B}$ koji sadrži x_0 takav da je $B \subseteq B_1 \cap B_2$.

Topologija $\mathcal{T}$ generirana bazom $\mathcal{B}$ definira se kao podskup $\mathcal{U}$ otvorenog skupa X ako za svaki x iz $\mathcal{U}$ postoji element baze $\mathcal{B}$ (B $\in \mathcal{B}$) takav da je $x \in B$ i $B \subseteq \mathcal{U}$.
Drugim riječima, topologija $\mathcal{T}$ generirana bazom $\mathcal{B}$ sadrži prazan skup i sve proizvoljne unije članova iz $\mathcal{B}$.

Precizirajmo rečeno sljedećom lemom.

Lema 1.1. *Neka je $(X,\mathcal{T})$ topološki prostor. Za $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ kažemo da je baza topologije $\mathcal{T}$ ako i samo ako je svaki $U \in \mathcal{T}, U \neq \emptyset$ unija elemenata iz $\mathcal{B}$.*

Dokaz.
$\Rightarrow$ Uzmimo da je $\mathcal{B}$ baza za topologiju $\mathcal{T}$, $U \in \mathcal{T}, U \neq \emptyset$ te $x \in U$. Tada postoji element $B_x \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B_x \subset U$. Kako je x proizvoljan tada vrijedi $U = \bigcup_{x \in X} B_x$, tj. U je unija elemenata iz $\mathcal{B}$.
$\Leftarrow$ Neka se svaki $U \in \mathcal{T}, U \neq \emptyset$ može prikazati kao unija elemenata iz $\mathcal{B}$. Ti elementi ujedno su i iz $\mathcal{T}$. Kako je $\mathcal{T}$ topologija zaključujemo da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$. □

Primjer 1.7. *Uzmimo (X, d_1) metrički prostor. Unije otvorenih kugli definiranih u definiciji 1.2 čine topologiju na X. Tu topologiju nazivamo topologijom generiranom metrikom d_1. Uzmemo li familiju $\mathcal{F}$ otvorenih kugli na X ona tada čini bazu topologije na X jer su ispunjena oba uvijeta za bazu iz definicije 1.7.*

Primjer 1.8. *Vratimo se na otvoren skup X iz primjera 1.6. Prisjetimo se X=$\{3,4,5\}$, a $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{3,4\}, X\}$ čini topologiju na njemu. Skup $\mathcal{B} = \{X, \{3\}, \{4\}\}$ tada zadovoljava svojstva (1) i (2) za bazu iz definicije 1.7 i generira jedinstvenu topologiju $\mathcal{T}_1$.*

Primjer 1.9. *Diskretna topologija na X je familija svih podskupova skupa X.* [1]
Familija $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$ zadovoljava svojstva baze iz definicije 1.7. $\mathcal{P}(X)$ je jednako upravo familiji svih unija elemenata iz $\mathcal{B}$, pa je $\mathcal{B}$ baza diskretne topologije.

Teorem 1.1. *Neka je familija $\mathcal{B}$ podskupova skupa X sa svojstvima (1) i (2) iz definicije 1.7. Tada postoji samo jedna toplogija $\mathcal{T}$ na X sa svojstvom da je $\mathcal{B}$ baza te topologije $\mathcal{T}$. Elementi topologije $\mathcal{T}$ mogu se dobiti kao unije elemenata iz $\mathcal{B}$.*

Dokaz. Dokaz tvrdnje može se pronaći u [2]. □

Topologiju ćemo najčešće zadavati tako da uzmemo familiju $\mathcal{B}$ podskupova nepraznog otvorenog skupa X koja ispunjava uvjete (1) i (2) iz definicije 1.7., tj. koja je baza te topologije.

Do sada smo definirali kako doći od baze do topologije koju ona generira. No kako bismo dobili obrat? Sljedećom propozicijom pokazati ćemo kada je neka familija skupova upravo baza topologije.

[1] vidi primjer 1.3.

Propozicija 1.2. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Pretpostavimo da je $\mathcal{C}$ familija otvorenih skupova u X takvih da za svaki otvoreni skup $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$ i za svaki $x \in \mathcal{U}$ postoji $C \in \mathcal{C}$ takav da je $x \in \mathcal{C} \subset \mathcal{U}$. Tada $\mathcal{C}$ nazivamo bazom za topologiju $\mathcal{T}$.*

Dokaz.
Potrebno je pokazati kako je ovako definirana familija $\mathcal{C}$ baza, tj. da zadovoljava oba uvjeta iz definicije baze topologije.

(1) Za $x \in X$, X otvoreni skup, postoji $C \in \mathcal{C}$ takav da je $x \in C \subseteq \mathcal{C}$.

(2) Neka su $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ takvi da je $C_1 \cap C_2 \in \mathcal{C}$ te neka je $x \in C_1 \cap C_2$. Kako su C_1, C_2 otvoreni skupovi slijedi da je i $C_1 \cap C_2$ otvoren stoga postoji element C_3 iz $\mathcal{C}$ takav da je $x \in C_3 \subseteq C_1 \cap C_2$.
Time smo pokazali tražena dva svojstva. Pokažimo još da je takva topologija jedinstvena. Stoga, pretpostavimo da imamo topologiju $\mathcal{T}'$ generiranu s $\mathcal{C}$.
Svaki otvoreni skup $\mathcal{U}$ pripada topologiji $\mathcal{T}$ te za $x \in \mathcal{U}$ tada po iskazu propozicije imamo $C \in \mathcal{C}$ takav da je $x \in C \subset \mathcal{U}$. Kako je $\mathcal{T}'$ generirana s $\mathcal{C}$ tada U pripada i toplogiji $\mathcal{T}'$.
S druge strane ako otvoren skup W pripada toplogiji $\mathcal{T}'$ tada je W jednak uniji elemenata iz $\mathcal{C}$, a kako svaki element iz $\mathcal{C}$ pripada i familiji $\mathcal{T}$, a $\mathcal{T}$ je topologija pa W također pripada i u $\mathcal{T}$.
Dakle $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$. □

Sljedeća propozicija govori o uspoređivanju dviju topologija koje su zadane na pripadajućim bazama. Da bismo ju iskazali i dokazali definirajmo prvo odnos među topologijama.

Definicija 1.8. *Neka su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$ dvije topologije na nepraznom skupu X. Ako je $\mathcal{T}' \supseteq \mathcal{T}$ kažemo da je topologija $\mathcal{T}'$ finija (tj. veća) od $\mathcal{T}$. Također tada za topologiju $\mathcal{T}$ kažemo da je grublja (tj. manja) od $\mathcal{T}'$. Ukoliko se radi od pravom podskupu tj. $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$ tada je $\mathcal{T}'$ strogo finija od $\mathcal{T}$.*

Propozicija 1.3. *Neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ baze topologija $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$ na nepraznom skupu X. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalente:*
(1) $\mathcal{T}'$ je finija od $\mathcal{T}$
(2) za svaki $x \in X$ i za svaki $B \in \mathcal{B}$ takav da vrijedi da je $x \in B$ postoji element $B' \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B' \subset B$.

Dokaz.
Dokažimo prvo da (1) povlači (2).
Za $x \in X, B \in \mathcal{B}$ vrijedi da je $x \in B$. Imamo da je $\mathcal{T}'$ finija od $\mathcal{T}$ pa je $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. Za $B \in \mathcal{T}$ tada je i $B \in \mathcal{T}'$. $\mathcal{T}'$ je generirana s $\mathcal{B}'$ pa postoji element $B' \in \mathcal{B}'$ takav da je $x \in B' \subset B$.
Sada pokažimo i obratno, da iz (2) slijedi (1).
Za $U \in \mathcal{T}$ želimo pokazati kako je i $U \in \mathcal{T}'$.
Neka je $x \in U$. Kako je $\mathcal{T}$ generirana bazom $\mathcal{B}$ postoji element $B \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B \subset U$. Sada iz (2) slijedi kako postoji element $B' \in \mathcal{B}'$ takav da je $x \in B' \subset B$. Zaključujemo kako je $x \in B' \subset U$ pa je $U \in \mathcal{T}'$. Dakle $\mathcal{T}'$ je finija od $\mathcal{T}$. □

Napomena 1.2. *Trivijalna topologija na nekom nepraznom skupu X je najslabija topologija, tj. svaka topologija $\mathcal{T}'$ različita od te topologije je finija. S druge strane, diskretna topologija na tom skupu X je najjača topologija, tj. diskretna topologija je finija od svih drugih topologija na X.*

1.4. Podbaza topologije

Definicija 1.9. *Podbaza topologije $\mathcal{T}$ na X je familija S podskupova od X ako familija svih konačnih presjeka članova od S čini bazu topologije $\mathcal{T}$.*

Topologija generirana podbazom S definira se kao familija svih konačnih presjeka članova iz S takvih da je X unija svih tih podskupova.

Primjer 1.10. *Uzmimo otvoren skup X i topologiju $\mathcal{T}$ generiranu bazom $\mathcal{B}$ na njemu. Bilo koja baza topologije $\mathcal{T}$ je ujedno i podbaza te topologije. Ako je S podskup od $\mathcal{T}$, tada je i topologija generirana sa S podskup topologije $\mathcal{T}$.*

Primjer 1.11. *Familija S koja se sastoji od svih otvorenih intervala $(-\infty, a)$ ili od svih $(b, +\infty)$, za $a, b \in \mathbb{R}$ čini podbazu topologije na skupu realnih brojeva.*

2. Tri topologije na $\mathbb{R}$

2.1. Bitni pojmovi

Prije nego li se krenemo baviti različitim topologijama na $\mathbb{R}$ navedimo prvo nekoliko osnovnih definicija koje će nam biti potrebne u nastavku.

Definicija 2.1. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor i $Y \subseteq X$. Unija svih otvorenih skupova sadržanih u Y naziva se nutrina skupa Y.*

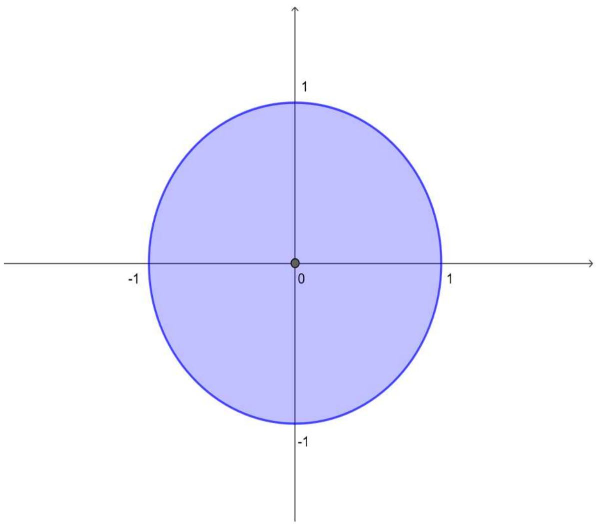
Nutrinu skupa Y još nazivamo i interior skupa Y i označavamo s $\operatorname{Int} Y$.

Primjer 2.1. *Neka je $Y = [2, 3]$, te neka je $X = \mathbb{R}$. Nutrina skupa Y je skup $(2, 3)$.*

Definicija 2.2. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor i $x_0 \in X$. Svaki skup $Y \subseteq X$ takav da se x_0 nalazi u njegovoj nutrini naziva se okolina točke x_0.*

Definicija 2.3. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Skup $Y \subseteq X$ nazivamo zatvoren ako je njegov komplement $Y^c = X \setminus Y$ otvoren.*

Primjer 2.2. *U metričkom prostoru (X, d_1) skup svih $x \in X$ takvih da je udaljenost od X do $x_0 \in X$ manja ili jednaka od $r \in \mathbb{R}_0^+$ je zatvoren i nazivamo ga zatvorena kugla. Na slici 3. prikazana je zatvorena kugla sa središtem u 0 radijusa 1 u eklidskom prostoru $\mathbb{R}^2$.*



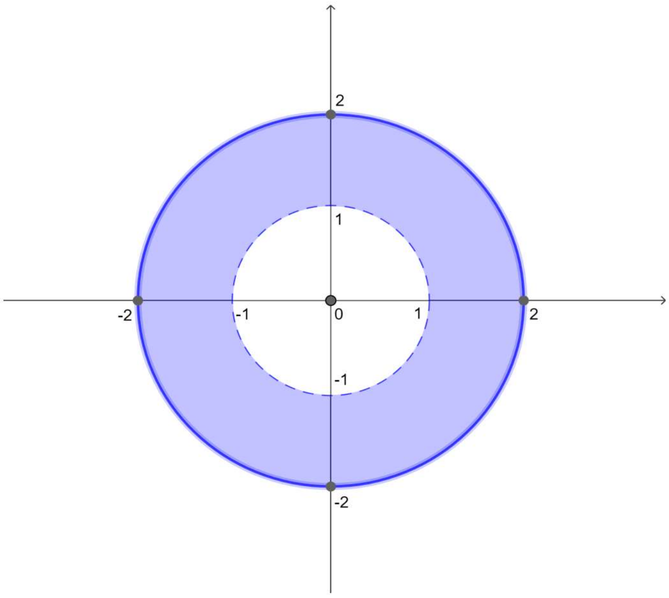
Slika 3:

Primjer 2.3. *Unija zatvorenih skupova ne mora činiti zatvoren skup. Uzmemo li skupove oblika $[0, 1 - \frac{1}{k}], k \in \mathbb{N}$ svaki od njih je zatvoren, no u uniji ne čine zatvoren skup, odnosno*

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} [0, 1 - \frac{1}{k}] = [0, 1).$$

Primijetimo da unija iz prethodnog primjera ne čini niti otvoren niti zatvoren skup pa takve skupove onda nazivamo skupovima koji nisu niti otvoreni niti zatvoreni.

Primjer 2.4. *Na slici 4. prikazana je kugla koja nije niti otvorena niti zatvorena. Njeno središte je u 0, a radijus je manji ili jednak od 2, a veći od 1.*



Slika 4:

Napomena 2.1. *Topologiju možemo definirati i uz pomoć zatvorenih skupova.*

Zaista, topologiju na nepraznom skupu X definiramo kao familiju podskupova tog skupa X. Uzmemo li familiju zatvorenih skupova za nju vrijedi da je presjek svih familija zatvorenih skupova zatvoren te da unija konačno mnogo zatvorenih skupova također čini zatvoren skup. Precizirajmo rečeno definicijom.

Definicija 2.4. *Topologija na nepraznom skupu X je familija $\mathcal{U}$ zatvorenih podskupova od X koja ima sljedeća svojstva:*

(a) unija konačno mnogo članova iz $\mathcal{U}$ je član iz $\mathcal{U}$
(b) presjek svake familije članova iz $\mathcal{U}$ je član iz $\mathcal{U}$
(c) $\emptyset \in \mathcal{U}$; $X \in \mathcal{U}$.

Definicija 2.5. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor i $Y \subseteq X$. Presjek svih zatvorenih skupova koji sadrže Y nazivamo zatvarač skupa Y.*

Zatvarač skupa Y označavamo s Cl Y.

Primjer 2.5. *Uzmimo ponovno isti skup $Y = [2, 3]$ kao iz primjera 2.1 te $X = \mathbb{R}$. Zatvarač tog skupa je isti taj skup, tj. Cl Y=$[2, 3]$, što znači da je skup Y zatvoren. (Vidi [2] str. 26.)*

Primjer 2.6. *Uzmimo sada skup* $Y_1 = (2,3)$. *Neka je i dalje* $X = \mathbb{R}$. *Zatvarač tog skupa također je skup* $[2,3]$ *tj.* $Cl\, Y_1 = [2,3]$.

Definicija 2.6. *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor i* $Y \subseteq X$. *Granica skupa* Y *je skup kojeg čini presjek zatvarača skupa* Y *i zatvarača skupa* $X \setminus Y$ *odnosno*

$$Cl\,(Y) \cap Cl\,(X \setminus Y).$$

Granicu skupa Y još nazivamo rub skupa Y te označavamo s ∂Y.

Primjer 2.7. *Vratimo se skupu* $Y = [2,3]$, *te neka je* $X = \mathbb{R}$. *Tada je*

$$\begin{aligned} \partial Y &= Cl\,([2,3]) \cap Cl\,((-\infty,2) \cup (3,+\infty)) \\ &= [2,3] \cap ((-\infty,2] \cap [3,+\infty)) = \{2,3\}. \end{aligned}$$

Definicija 2.7. *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor i* $Y \subseteq X$. *Točku* $x_0 \in X$ *nazivamo gomilište skupa* Y *ukoliko svaka njena okolina sadrži barem jednu točku iz* Y *koja je različita od* x_0.

Skup svih gomilišta skupa Y označavamo s Y'.

Primjer 2.8. *Neka je* $K = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. *Jedino gomilište tog skupa je 0 pa je* $Y' = \{0\}$.

2.2. Standardna topologija

Definicija 2.8. *Topologija na $\mathbb{R}$ koja je generirana bazom $\mathcal{B}$ koju čine svi otvoreni intervali $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ naziva se standardna topologija.*

Kada god razmatramo skup $\mathbb{R}$, pretpostaviti ćemo da se radi upravo o standardnoj topologiji osim ako je naznačeno drugačije.

2.3. Odozdo ograničena topologija

Definicija 2.9. *Topologija na $\mathbb{R}$ koja je generirana bazom $\mathcal{B}'$ koju čine svi poluotvoreni intervali $[a, b) \subseteq \mathbb{R}$, za $a, b \in \mathbb{R}$, naziva se odozdo ograničena topologija.* [2]

Primjer 2.9. *Skup $[0, 1) \cup [2, 3)$ je otvoreni skup u odozdo ograničenoj topologiji jer uključuje točke 0,2, a isključuje 1,3.*

Propozicija 2.1. *Odozdo ograničena topologija je strogo finija od standardne topologije.*

Dokaz.
Označimo sa $\mathcal{T}$ standardnu topologiju, a sa $\mathcal{T}'$ odozdo ograničenu topologiju.
Neka je dan element (a, b) baze topologije $\mathcal{T}$ te $x \in (a, b)$. Element $[x, b)$ baze topologije $\mathcal{T}'$ sadrži x i leži u (a, b).
Uzmimo sada element $[x, c)$ baze topologije $\mathcal{T}'$. Tada ne možemo pronaći otvoreni interval (a, b) koji sadrži x, a da leži u $[x, c)$. Zaključujemo da je $\mathcal{T}'$ je strogo finija od $\mathcal{T}$. $\square$

Drugim riječima mogli bismo reći kako je odozdo ograničena topologija finija od standardne topologije na $\mathbb{R}$ jer se svaki otvoreni interval može zapisati kao unija poluotvorenih intervala.

Primjer 2.10. *Promotrimo jednakost $(a, b) = \bigcup_{n=n_0}^{\infty}[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]$ koja vrijedi za dovoljno veliki prirodan broj n_0. Pogledajmo što se događa sa desnom stranom kada n ide u beskonačost. Izraz $b - \frac{1}{n}$ ide ka b ali će uvijek biti manji od njega dok kako se n povećava tako se i izraz $a + \frac{1}{n}$ pribliva a, ali nikada neće biti manji ili jednak od a. Za $n \in \mathbb{N}$ svi intervali oblika $[a + \frac{1}{n}, b)$ su podskupovi od (a, b).*
Obratno, za $x \in (a, b)$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in [a + \frac{1}{n}, b)$ pa x mora biti i iz $\bigcup_{n=n_0}^{\infty}[a + \frac{1}{n}, b)$. Dakle vrijedi jednakost $(a, b) = \bigcup_{n=n_0}^{\infty}[a + \frac{1}{n}, b)$.

Primjerom 2.10 smo pokazali kako se svaki otvoren interval zaista može zapisati kao unija poluotvorenih intervala.

Napomena 2.2. *Analogno definiciji 2.9 možemo definirati i odozgo ograničenu topologiju*[3] *kao topologiju na $\mathbb{R}$ koja je generirana bazom koju čine svi poluotvoreni intervali $(a, b] \subseteq \mathbb{R}$ za $a, b \in \mathbb{R}$.*

2.4. K-topologija

Definicija 2.10. *Neka je $K = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Topologiju na $\mathbb{R}$ koja je generirana bazom $\mathcal{B}''$ koju čine svi otvoreni intervali (a, b) zajedno sa skupovima oblika $(a, b) \setminus K$ nazivamo K-topologija.*

[2] eng. lower limit topology
[3] eng. upper limit topology

Primjer 2.11. *Skup* $(-1,1) \setminus \{0\}$ *je otvoren skup u K-topologiji.*

Propozicija 2.2. *K-topologija na* $\mathbb{R}$ *je strogo finija od standardne topologije na* $\mathbb{R}$.

Dokaz.
Dokaz provodimo slično dokazu propozicije 2.1.
Označimo sa $\mathcal{T}$ standardnu topologiju, a sa $\mathcal{T}''$ odozdo ograničenu topologiju.
Neka je dan element (a, b) baze topologije $\mathcal{T}$ te $x \in (a, b)$. Taj element tada je i element baze topologije $\mathcal{T}''$ koja sadrži x. No, ako uzmemo element baze $\mathcal{T}''$ npr. $A = (-1, 1) \setminus K$ te točku 0 iz A, tada ne postoji otvoreni interval koji sadrži točku 0, a da leži u A. Zaključujemo kako je $\mathcal{T}''$ strogo finija od $\mathcal{T}$. $\square$

Drugim riječima, K-topologija na $\mathbb{R}$ je strogo finija od standardne topologije na $\mathbb{R}$ jer skup K (u odnosu na $\mathbb{R}$ i standardnu topologiju) nije zatvoren jer ovako definiran ne sadrži točku svoga limesa, tj. 0.

Napomena 2.3. *Iako su i odozdo ograničena topologija i K-topologija finije od standardne, njih dvije ne možemo uspoređivati.*

3. Uređajna topologija

Neka je X neprazan skup na kojemu je dana operacija "manje" $<$. Za $c, d \in X$ takve da je $c < d$ tada imamo četiri podskupa koje nazivamo intervali kako slijedi:

$$\begin{aligned}(c,d) &= \{x \in X : c < x < d\}\\ (c,d] &= \{x \in X : c < x \leq d\}\\ [c,d) &= \{x \in X : c \leq x < d\}\\ [c,d] &= \{x \in X : c \leq x \leq d\}.\end{aligned}$$

Prvi interval nazivamo otvoreni, druga dva poluotvoreni, dok četvrti interval nazivamo zatvoreni interval.

Definicija 3.1. *Neka je $(X,<)$ uređen skup koji ima više od jednog elementa te neka je $\mathcal{B}$ baza koju čine sljedeći skupovi:*

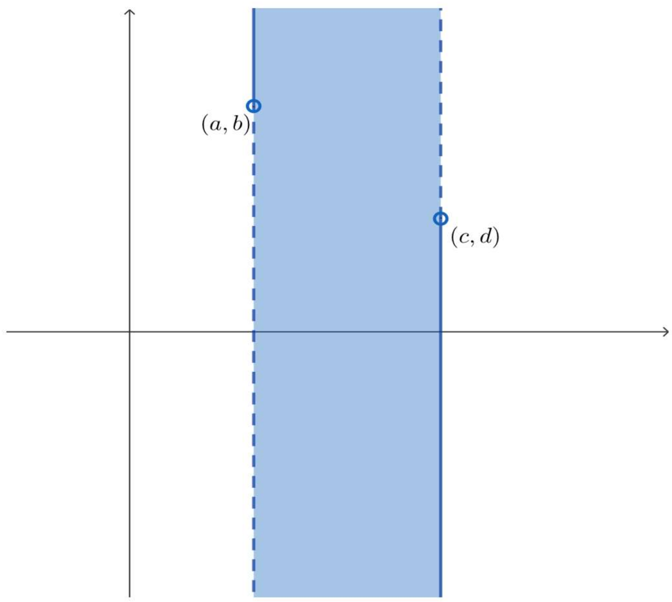
- *otvoreni intervali (c,d)*
- *poluotvoreni intervali $[c_0, d)$ za $c_0 = \min X$, ako minimum postoji*
- *poluotvoreni intervali $(c, d_0]$ za $d_0 = \max X$, ako maksimum postoji.*

Tada $\mathcal{B}$ generira topologiju koju nazivamo uređajna topologija.

Primjer 3.1. *Primjer uređajne topologije na $\mathbb{N}$ bila bi diskretna topologija jer se na tom skupu njih dvije podudaraju.*

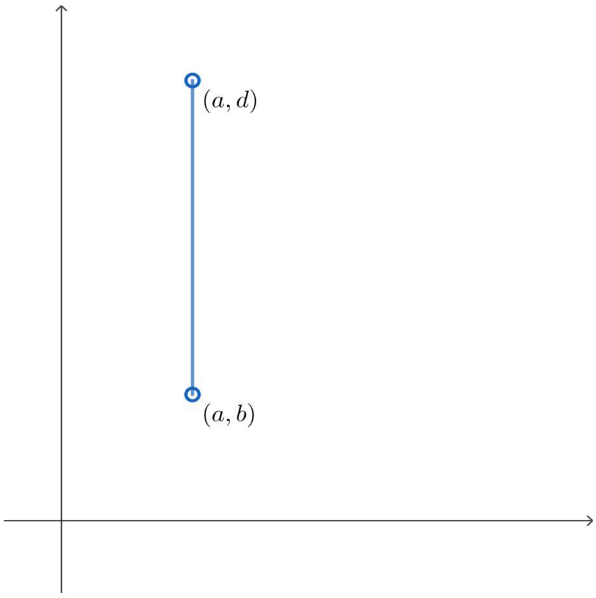
Primjer 3.2. *Za uobičajeni uređaj na $\mathbb{R}$ primjer uređajne topologije je standardna topologija.*

Primjer 3.3. *Uspostavimo relaciju uređaja na $\mathbb{R}^2$ na način $(a,b) < (c,d)$. Takav uređaj nazivamo leksikografski uređaj, a možemo ga jednostavno ilustrirati. Za prvi slučaj uzmimo samo uvjet $a < c$.*



Slika 5:

Za drugi slučaj uzmimo $a = c$ i $b < d$.



Slika 6:

Podfamilije sačinjene od intervala kao na slici 6. također čine bazu uređajne topologije na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Uzmimo da je X uređen skup (skup na kojemu uspostavljamo relaciju uređaja kao u definiciji 3.1), te neka je $Y \subseteq X$. Tada Y nasljeđuje uređaj od X.
Uređajnu topologiju na Y nazivamo inducirana uređajna topologija.

Definicija 3.2. *Za otvoreni skup X i $c \in X$ postoji četiri podskupa od X koje nazivamo okoline određene elementom c:*

$$
\begin{gathered}
(c, +\infty) = \{x \in X : x > c\} \\
(-\infty, c) = \{x \in X : x < c\} \\
[c, +\infty) = \{x \in X : x \geq c\} \\
(-\infty, c] = \{x \in X : x \leq c\}.
\end{gathered}
$$

Prva dva skupa nazivamo otvorene okoline, a druga dva zatvorene okoline.

Otvorene okoline formiraju podbazu u uređajnoj topologiji. Otvorene okoline su otvoreni skupovi u uređajnoj topologiji pa je topologija koju generiraju sadržana u uređajnoj topologiji. Svaki element baze uređajne topologije može se dobiti kao konačan presjek otvorenih okolina.
Primjerice, interval $(c, d) = (-\infty, c) \cap (d, +\infty)$ za $c > d$.

4. Produktna topologija

Za topološke prostore X i Y postoji način definiranja topologije na njihovom Kartezijevom produktu $X \times Y$, što nam je veoma korisno u teoriji te ćemo se time detaljnije baviti u nastavku.

Definicija 4.1. *Neka su X, Y topološki prostori. Produktna topologija na $X \times Y$ je topologija generirana bazom $\mathcal{B}$ svih otvorenih skupova oblika $U \times V$ za $U \in X$, $V \in Y$, za U, V otvorene skupove.*

Provjerimo čini li $\mathcal{B}$ zaista bazu.
Prvi uvjet iz definicije je trivijalan jer je $X \times Y$ i sam element baze.
Drugi uvjet dobivamo iz činjenice da je presjek bilo koja dva elementa baze $U_1 \times V_1$, $U_2 \times V_2$ također element baze, odnosno vrijedi

$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2).$$

Kako su $(U_1 \cap U_2)$ i $(V_1 \cap V_2)$ otvoreni u X, tj. u Y tako je i lijeva strana te jednakosti element baze.

Teorem 4.1. *Neka je $\mathcal{B}$ baza za topologiju na X, te $\mathcal{C}$ baza za topologiju na Y. Tada je familija*

$$\mathcal{D} = \{B \times C : B \in \mathcal{B}, C \in \mathcal{C}\}$$

baza topologije na $X \times Y$.

Dokaz.
Iskoristimo propoziciju 1.2 kako bismo dokazali ovaj teorem.
Neka je W otvoren skup na $X \times Y$ i $x \times y \in W$. Po definiciji produktne topologije tada postoji element baze $U \times V$ takav da je $x \times y \in U \times V \subseteq W$.
$\mathcal{B}, \mathcal{C}$ su baze od X tj. Y, pa možemo pronaći elemente $B \in \mathcal{B}$, $C \in \mathcal{C}$ takve da je $x \in B \subset U$, a $y \in C \subset V$. Tada je $x \times y \in B \times C \subset W$, stoga familija $\mathcal{D}$ zadovoljava propoziciju 1.2.
Dakle $\mathcal{D}$ je baza od $X \times Y$. □

Primjer 4.1. *Standardna topologija na $\mathbb{R}^2$ dobar je primjer produktne topologije na $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.*

Zaista, ta topologija kao bazu ima familiju svih produkata otvorenih skupova na $\mathbb{R}$.
Teoremom 4.1 pokazali smo da baza topologije na $\mathbb{R}^2$ može biti i znatno manja familija svih $(b_1, c_1) \times (b_2, c_2)$ otvorenih intervala na $\mathbb{R}$, za $b_1, c_1, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$.

Općenito ne vrijedi da je svaki jednočlan skup zatvoren. Hausdorff na topološki prostor postavlja dodatan uvjet kako bi osigurao to svojstvo jer raditi na takvim skupovima i nije pretjerano interesantno.
No također postoji još topoloških prostora na kojima uvodimo dodatne uvijete koji razvrstavaju topološke prostore po načinu na koji odvajaju točke ili zatvorene skupove jedne od drugih.

Definicija 4.2. *Topološki prostor* $(X, \mathcal{T})$ *nazivamo* T_0*-prostor ukoliko za* $x, y \in Y$, $x \neq y$ *postoji okolina koja sadrži* x*, ali ne i* y *ili obratno da postoji okolina koja sadrži* y*, no ne i* x.

Definicija 4.3. *Topološki prostor* $(X, \mathcal{T})$ *nazivamo* T_1*-prostor ukoliko za* $x, y \in Y$, $x \neq y$ *postoji okolina koja sadrži* y*, ali ne i* x.

Iz definicija T_0 i T_1-prostora vidimo kako su svi T_1-prostori istovremeno i T_0-prostori. Dodatno za T_1-prostore vrijedi sljedeća karakterizacija.

Propozicija 4.1. *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor.* $(X, \mathcal{T})$ *je* T_1*-prostor ako i samo ako je* $\{x\}$ *zatvoren za svaki* $x \in X$.

Dokaz.
Ako je $(X, \mathcal{T})$ T_1-prostor i $x \in X$, tada za svaki $y \in X$, $y \neq x$ postoji okolina U_y koja sadrži y, ali ne sadrži x. Unija svih takvih okolina, tj. $\bigcup_{y \neq x} U_y$ jednaka je $\{x\}^c$. Ta unija otvoren je skup pa je njen komplement tj, $\{x\}$ zatvoren.
Obratno, ako je $\{x\}$ zatvoren skup tada je njegov komplement $\{x\}^c$ otvoren skup koji sadrži sve $y \in X$, $y \neq x$. □

Definicija 4.4. *Topološki prostor* $(X, \mathcal{T})$ *nazivamo* T_2*-prostor ukoliko za* $x, y \in X$, $x \neq y$ *postoje otvoreni skupovi* U *i* V*, međusobno disjunktni, takvi da je* U *okolina točke* x*, a* V *okolina točke* y.

Mogli bismo drugačije reći kako je topološki prostor T_2-prostor ukoliko svake dvije točke tog prostora koje su različite imaju međusobno disjunktne okoline.

T_2-prostor još nazivamo i Hausdorffov prostor.

Definicija 4.5. *Topološki prostor* $(X, \mathcal{T})$ *nazivamo* T_3*-prostor ukoliko je* $(X, \mathcal{T})$ T_1*-prostor te vrijedi da za zatvoren skup* $Y \subset X$ *i* $x \in Y^c$ *postoje disjunktne okoline* U *skupa* Y *i* V *točke* x.

T_3-prostor još nazivamo regularan prostor.

Definicija 4.6. *Topološki prostor* $(X, \mathcal{T})$ *nazivamo* T_4*-prostor ukoliko je* $(X, \mathcal{T})$ T_1*-prostor te vrijedi da za disjunktne zatvorene skupove* $A, B \subseteq X$ *postoje njihove okoline koje su također međusobno disjunktne.*

T_4-prostor još nazivamo normalan prostor.

Propozicija 4.1 daje povezanost T_2,T_3 i T_4-prostora na način da je svaki T_4-prostor ujedno i T_3-prostor te svaki T_3-prostor ujedno i T_2-prostor.

Za X otvoren i $A \subset X$ zatvoren možemo definirati bilo koju familiju topoloških prostora $\{\{X_\alpha\} : \alpha \in A\}$. Produktna topologija na X tada se može definirati i kao $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. Kako bi definirali podbazu ove topologije potrebno je definirati funkciju koju nazivamo projekcija.

Definicija 4.7. *Funkciju $\pi_\beta : X_\alpha \to X_\beta$ koja svakom elementu pridružuje njegovu β-tu koordinatu tj. $\pi_\beta((x_\alpha) : \alpha \in A) = x_\beta$ nazivamo projekcija.*

Sada je podbaza produktne topologije na X zadana kao $\bigcap_{j=1}^n \pi_{\alpha_j}^{-1}(U_{\alpha_j})$ za $n \in \mathbb{N}$, $U_{\alpha_j} \subseteq X_{\alpha_j}$, gdje su U_{α_j} otvoreni u X_{α_j}, $1 \leq j \leq n$.

Definicija 4.8. *Neka su X, Y topološki prostori. Za $h : X \to Y$ kažemo da je neprekidna ukoliko je $h^{-1}(V) \in X$ otvoren za svaki $V \subset Y$.*

Propozicija 4.2. *Ako je X_α Hausdorffov prostor za svaki $\alpha \in A$ tada je i $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ Hausdorffov prostor produktne topologije.*

Dokaz.
Za $x, y \in X, x \neq y$ vrijedi $\pi_\alpha(x) \neq \pi_\alpha(y)$ za neki α. Neka je U okolina $\pi_\alpha(x)$, te neka je V okolina $\pi_\alpha(y)$, pri čemu su U i V međusobno disjunktni skupovi. Tada je $\pi_\alpha^{-1}(U)$ okolina točke x, a $\pi_\alpha^{-1}(V)$ okolina od y pa je i $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ Hausdorffov. $\square$

Propozicija 4.3. *Neka su $X_\alpha, \alpha \in A$ i Y topološki prostor te $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ s produktnom topologijom. Funkcija $f : Y \to X$ je neprekidna ako i samo ako je $\pi_\alpha \circ f$ neprekidna za svaki $\alpha \in A$.*

Dokaz.
$\Rightarrow$ Funkcija projekcija π_α je neprekidna kako je za $U_\beta \in X_\beta$ skup $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ element baze topologije na X_α pa je i otvoren. Kako je f neprekidna tada je i kompozicija neprekidnih funkcija neprekidna.
$\Leftarrow$ Ako je $\pi_\alpha \circ f$ neprekidna za svaki α tada je $f_\alpha^{-1}(\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha))$ otvoren u Y (za svaki $U_\alpha \in X_\alpha$) te je f tada neprekidna. $\square$

Promotrimo još i realne funkcije na topološkim prostorima.

Definicija 4.9. *Neka je X otvoren skup. Prostor svih omeđenih funkcija na X označavamo s $B(X)$, a prostor svih neprekidnih funkcija na X sa $C(X)$. Tada definiramo*

$$BC(X) = B(X) \cap C(X).$$

Dakle, $BC(X)$ predstavlja prostor svih omeđenih i neprekidnih funkcija na X.

Propozicija 4.4. *Ako je X topološki prostor tada je $BC(X)$ podprostor od $B(X)$. Preciznije, $BC(X)$ je potpun prostor.*

5. Relativna topologija

Definicija 5.1. *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor. Za* $Y \subseteq X$ *familija*

$$\mathcal{T}_y = \{Y \cap U : U \in \mathcal{T}\}$$

je topologija na Y *koju nazivamo relativna topologija.*

Y tada nazivamo podprostor od X. To zaista i jest jer otvoreni skupovi od Y sadrže sve presjeke otvorenih skupova od X i Y.
Uvjerimo se još kako je $\mathcal{T}_y$ zaista topologija. Za $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ vrijedi:

$$\emptyset = Y \cap \emptyset,\ Y = Y \cap X.$$

Zatvorenost na konačne presjeke slijedi iz jednakosti

$$(U_1 \cap Y) \cap \cdots \cap (U_n \cap Y) = (U_1 \cap \cdots \cap U_n) \cap Y$$

dok zatvorenost na proizvoljne unije slijedi iz jednakosti

$$\bigcup_{\alpha \in A} (U_\alpha \cap Y) = (\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha) \cap Y.$$

Uzmimo sada ponovno da je X uređen skup (skup na kojemu uspostavljamo relaciju uređaja kao u definiciji 3.1), te neka je $Y \subseteq X$. Tada Y nasljeđuje uređaj od X.
Kako je $Y \subseteq X$ tada i na Y možemo uspostaviti relativnu topologiju.
Relativna topologija je finija od inducirane uređajne topologije.

Propozicija 5.1. *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor i* $\mathcal{B}$ *baza od* $\mathcal{T}$. *Tada je familija*

$$\mathcal{B}_y = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$$

baza relativne topologije na Y.

Dokaz.
Neka je $U \in X$ otvoren, te neka je $y \in U \cap Y$. Tada postoji element $B \in \mathcal{B}$ takav da je $y \in B \subset U$. Vrijedi da je $y \in B \cap Y \subset U \cap Y$.
Po propoziciji 1.2. $\mathcal{B}_y$ čini bazu relativne topologije na Y. □

Literatura

[1] G. B. Folland, *Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications*, John Wiley & Sons, 1999.

[2] D. Jukić, *Mjera i integral*, Sveučilšte Josipa Jurja Strossmayera - Odjel za matematiku, Osijek, 2014.

[3] D. Jukić, *Realna analiza*, Sveučilšte Josipa Jurja Strossmayera - Odjel za matematiku, Osijek, 2020.

[4] J. R. Munkres, *Topology Second Edition*, Prentice Hall, 2000.

[5] L. A. Steen, J. A. Seebach, *Counterexamples in Topology* preuzeto s https://editorialdinosaurio.files.wordpress.com/2012/03/counterexamples_in_topology_-_l-_steen__j-_seebach__1970__ww.pdf [pristupljeno 10.7.2023.]