# Pitagorine trojke i njihova generalizacija

**Penava, Ivana**

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

**Ivana Penava**

# Pitagorine trojke i njihova generalizacija

Završni rad

Osijek, 2016.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

**Ivana Penava**

# Pitagorine trojke i njihova generalizacija

Završni rad

Mentor: doc. dr. sc. Ivan Soldo

Osijek, 2016.

# Sažetak

Glavna tema ovog rada su Pitagorine trojke, tj. trojke prirodnih brojeva koje su rješenje Pitagorine jednadžbe.

U prvom poglavlju bavit ćemo se definicijom i osnovnim svojstvima Pitagorinih trojki. Iskazat ćemo i dokazati Euklidov teorem kojim se one generiraju. Na kraju poglavlja na primjeru ćemo pokazati da je svaki prirodan broj član neke Pitagorine trojke.

U drugom poglavlju obradit ćemo najvažnije teoreme vezane uz Pitagorine trojke. Kroz brojne primjere pokazat ćemo vezu Pitagorinih trojki s potpunim kvadratima cijeloga broja. Provjerit ćemo mogu li površine i duljine stranica Pitagorinih trokuta biti potpuni kvadrati. Nakon toga, obradit ćemo specifičnu vrstu trojki, s dvije ili tri uzastopne duljine stranica. Na kraju poglavlja istražit ćemo postoje li različiti Pitagorini trokuti iste površine.

U posljednjem poglavlju susrest ćemo se s generalizacijom Pitagorinih trojki. Opisat ćemo način za generiranje svih Pitagorinih trojki (primitivnih i neprimitivnih), te s nekoliko primjera pokazati postupke njihova dobivanja.

# Ključne riječi

Pitagorine trojke, Pitagorin trokut, primitivne trojke, primitivno rješenje, Fermatov teorem, kvadrati prirodnih brojeva, uzastopne duljine stranica, generalizacija Pitagorinih trojki

# Pythagorean triples and their generalization


## Summary

The main topic of this thesis are Pythagorean triples, i.e., triples of positive integers satisfying the Pythagorean equation.

In Section 1 we'll deal with definition and basic conditions of Pythagorean triples. We will show and prove Euclid's theorem for their generalization. At the end of first section, we'll show that every positive integer is member of some Pythagorean triple.

In Section 2 we will present the most important theorems associated with Pythagorean triples. By many examples we'll show connection between Pythagorean triples and perfect squares. We'll test whether areas and sides of Pythagorean triangles are perfect squares. Furthermore, we'll deal with their specific kind, where at least two sides are consecutive positive integers. Finally, we'll explore whether there exist different Pythagorean triangles with the same areas.

In the last section we'll meet with generalization of Pythagorean triples. We'll describe a way to generate all Pythagorean triples (primitive and non-primitive), and in few examples show how to make them.



## Key words

Pythagorean triples, Pythagorean triangles, primitive triples, primitive solution, Fermat's theorem, perfect squares, consecutive sides, generalization of Pythagorean triples

# Sadržaj

# Uvod

Pitagorine trojke su trojke koje se sastoje od tri prirodna broja $x$, $y$ i $z$ koji predstavljaju katete i hipotenuzu pravokutnog trokuta, tj. zadovoljavaju jednadžbu

$$x^2 + y^2 = z^2. \tag{1}$$

Kao što znamo, ova jednadžba je posebno važna u trigonometriji i analitičkoj geometriji. Njen poseban slučaj, za $x = y$, povezan je s najjednostavnijim dokazom postojanja iracionalnih brojeva.

Pitagorina jednadžba je posebna vrsta diofantske jednadžbe. Podsjetimo se definicije diofantske jednadžbe:

**Definicija 1.** *Diofantska jednadžba je algebarska (polinomna) jednadžba s dvjema ili više nepoznanica, s cjelobrojnim koeficijentima, kojoj se traže cjelobrojna ili racionalna rješenja.*

Polinomna jednadžba je jednadžba čije je rješenje polinom.

**Definicija 2.** *Polinom $f$ je realna ili kompleksna funkcija realne ili kompleksne varijable $x$ koju možemo zapisati u obliku*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

*pri čemu je $n \in \mathbb{N}_0, a_n \neq 0$. Realne ili kompleksne brojeve $a_0, a_1, ..., a_n$ zovemo koeficijenti polinoma $f$, broj $a_0$ slobodni koeficijent, a broj $a_n$ vodeći koeficijent. Broj $n$ zovemo stupanj polinoma $f$ i označavamo $st f = n$.*

Pitagorine trojke ime su dobile prema Pitagorinom teoremu koji glasi:

**Teorem 1** (Pitagorin poučak)**.** *Zbroj kvadrata nad katetama pravokutnog trokuta jednak je kvadratu nad njegovom hipotenuzom.*

Primjetimo kako prema definiciji Pitagorine trojke mogu formirati samo prirodni brojevi, dok u Pitagorinom teoremu to nije slučaj.

Na primjer, stranice $x = 1$, $y = 1$ i $z = \sqrt{2}$ danoga trokuta zadovoljavaju Pitagorin poučak, ali $(1, 1, \sqrt{2})$ nije Pitagorina trojka jer $\sqrt{2}$ nije prirodan broj.

Pitagorejci su spomenuti teorem interpretirali u kontekstu površina. Njihovo shvaćanje Pitagorinog poučka bilo je: Ako bismo uzeli kvadrat čija je duljina stranice jednaka duljini hipotenuze pravokutnog trokuta i podijelili ga na cjeline, mogli bismo preslagivanjem dobiti druga dva kvadrata od kojih je duljina stranice jednog duljina jedne katete, a duljina stranice drugog jednaka je duljini druge katete.

Suprotno općeproširenom vjerovanju, Pitagora nije prvi otkrio navedeni teorem već ga je prvi dokazao i zbog toga se naziva Pitagorin poučak.

U ovom radu razradit ćemo algebarski zapis Pitagorinih trojki, generirat ćemo sva prirodna rješenja Pitagorine jednažbe, isključivši očita, u kojima je jedan od brojeva $x, y$ jednak 0, te ćemo kroz teoreme i primjere dati neke od najvažnijih svojstava Pitagorinih trojki.

Napomenimo kako smo neke primjere preuzeli iz [2, 6], gdje se može naći još vrlo korisnih primjera i zadataka.

U prvom poglavlju definirat ćemo Pitagorine trojke te odrediti osnovni oblik koji će svaka Pitagorina trojka zadovoljavati. Prikazat ćemo i dokazati Euklidovu formulu po kojoj možemo generirati jedan dio Pitagorinih trojki.

U drugom poglavlju bavit ćemo se osnovnim teoremima vezanim za Pitagorine trojke, te kroz neke primjere pokazati njihovu primjenu. Najprije ćemo se susresti s Fermatovim teoremom za Pitagorine trojke, a zatim nastaviti obrađivati njihovu vezu s kvadratima prirodnih brojeva. Istražit ćemo mogu li, i pod kojim uvjetima, duljine stranica i površina Pitagorinih trokuta biti kvadrati prirodnih brojeva. U nastavku ćemo se baviti Pitagorinim trojkama kod kojih su duljine barem dviju stranica uzastopni brojevi. Na kraju poglavlja, istražit ćemo koje uvjete moraju zadovoljavati Pitagorini trokuti različitih hipotenuza kako bi imali iste površine.

U posljednjem poglavlju obradit ćemo generalizaciju Pitagorinih trojki. Najprije ćemo se zabaviti primitivnim Pitagorinim trojkama, čije ćemo generaliziranje razdvojiti na tri slučaja, u ovisnosti o duljini početne katete. Zatim ćemo na primjerima pokazati generiranje kako primitivnih, tako i neprimitivnih Pitagorinih trojki.

# 1 Osnovni oblik Pitagorinih trojki

Neka su $x, y, z$ relativno prosti prirodni brojevi koji zadovoljavaju jednadžbu (1). Tada kažemo da je $(x, y, z)$ primitivna Pitagorina trojka. Takav trokut zovemo primitivni Pitagorin trokut, a $x, y, z$ primitivnim rješenjima jednadžbe (1).

Ako su $x_1, y_1, z_1$ primitivna rješenja jednadžbe (1) i $d$ prirodan broj, onda su $x = dx_1$, $y = dy_1$, $z = dz_1$ također rješenje od (1). Ako je

$$x_1^2 + y_1^2 = z_1^2,$$

onda množenjem obje strane s $d^2$ dobijemo jednadžbu (1).

Obratno, ako su $x, y, z$ rješenja jednadžbe (1) u prirodnim brojevima, onda zamjenom $(x, y, z) = d$ imamo $x = dx_1$, $y = dy_1$, $z = dz_1$ gdje je $(x_1, y_1, z_1) = 1$. Tada imamo

$$(dx_1)^2 + (dy_1)^2 = (dz_1)^2.$$

Dijeljenjem ove jednadžbe s $d^2$ vidimo da su prirodni brojevi $x_1, y_1, z_1$ primitivno rješenje jednadžbe (1).

Kažemo da rješenje jednadžbe (1) u prirodnim brojevima $x, y, z$ pripada $d$-toj klasi ako je $(x, y, z) = d$.

Pretpostavimo da je $x, y, z$ primitivno rješenje jednadžbe (1). Dokazat ćemo da je jedan od brojeva $x, y$ paran, a drugi neparan. Pretpostavimo suprotno, tj. neka su oba ili parna ili neparna.

- U prvom slučaju, ako bi $x$ i $y$ bili parni, onda trojka ne bi bila primitivna jer bi imali najmanjeg zajedničkog djelitelja 2, što je u kontradikciji s pretpostavkom.

- Kako bismo dokazali da je i drugi slučaj nemoguć dokazujemo da dijeljenjem kvadrata neparnog prirodnog broja s 8 dobijemo ostatak 1.

  Neparni prirodan broj zapisujemo kao $2k - 1$, gdje je $k$ prirodan broj. Nadalje,

  $$(2k - 1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 4k(k - 1) + 1.$$

  Jedan od brojeva $k$ i $k - 1$ mora biti paran, pa je umnožak sigurno djeljiv s 2 te je $4k(k - 1)$ djeljivo s 8. Stoga, podijelimo li $(2k - 1)^2$ s 8, dobijemo ostatak 1.

  Dakle, ako bi $x$ i $y$ bili neparni, onda bi imali $x^2 + y^2 \equiv 2 (\bmod 4)$. To pokazuje da suma kvadrata dva neparna broja nije kvadrat neparnog broja. Ne može biti ni kvadrat parnog broja, jer bi suma u tom slučaju bila djeljiva s 4, pa bi ostatak pri djeljenju s 8 bio 0 ili 4, što je kontradikcija s prethodno dokazanom tvrdnjom.

Obično se uzima za $x$ neparan, a za $y$ paran prirodan broj.

**Primjer 1** (vidi [2, Zadatak 1.]). *Dokažite da je u svakom Pitagorinom trokutu:*

1. *Duljina barem jedne katete djeljiva s* 3.

2. *Duljina barem jedne katete djeljiva s 4.*

3. *Duljina barem jedne stranice djeljiva s 5.*

*Rješenje:*
Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je Pitagorina trojka $(x, y, z)$ primitivna.

1. Uočitmo kako kvadrat prirodnog broja koji nije djeljiv s 3, pri djeljenju s 3 daje ostatak 1. Prirodne brojeve koji nisu djeljivi s 3 možemo zapisati u obliku $3n \pm 1, n \in \mathbb{N}$ i promatramo njihove kvadrate:

$$(3n \pm 1)^2 = 9n^2 \pm 6n + 1 = 3(3n^2 \pm 2n) + 1.$$

   Ako ni $x$ ni $y$ ne bi bili djeljivi s 3, $z^2$ bi pri dijeljenju s 3 davao ostatak 2, što je nemoguće jer smo dokazali da kvadrat prirodnog broja pri dijeljenju s 3 daje ostatak 0 ili 1. Slijedi da je jedna kateta uvijek djeljiva s 3.

2. Iskoristit ćemo dvije ranije dokazane činjenice: duljina jedne od kateta mora biti paran broj; kvadrat neparnog broja pri dijeljenju s 8 daje ostatak 1. Bez smanjenja općenitosti, neka je $y$ paran. Tada su $x$ i $z$ neparni te iz $y^2 = z^2 - x^2$ zaključujemo da je $y^2$ djeljiv s 8. Sada $y$ mora biti djeljiv s 4. Dakle, druga kateta je uvijek djeljiva s 4.

3. Za dokaz treće tvrdnje, promotrit ćemo kako izgledaju kvadrati brojeva koji nisu djeljivi s 5. Te brojeve zapisat ćemo u obliku $5n \pm 1$ i $5n \pm 2, n \in \mathbb{N}$.

   Sada slijedi

$$(5n \pm 1)^2 = 25n^2 \pm 10n + 1 = 5n(5n \pm 2) + 1$$

   i

$$(5n \pm 2)^2 = 25n^2 \pm 20n + 4 = 5n(5n \pm 4) + 4,$$

   iz čega vidimo da kvadrat prirodnog broja pri dijeljenju s 5 daje ostatak 0,1 i 4. Ako ni $x$ ni $y$ ne bi bili djeljivi s 5, $x^2$ i $y^2$ pri dijeljenju s 5 mogli bi dati ostatke 1 ili 4. Iz toga bi slijedilo da broj $z^2$ pri dijeljenju s 5 može dati ostatak 2, 3 ili 0. S obzirom da 2 i 3 ne mogu biti ostatci pri dijeljenju prirodnog broja s 5, zaključujemo da je ostatak pri djeljenju broja $z^2$ s 5 jednak 0. Kako je $z^2$ djeljiv s 5, samim time je i $z$, pa je tvrdnja dokazana.

## 1.1 Parametrizacija Pitagorinih trojki

U idućem teoremu dana nam je osnovna formula za pronalazak primitivnih Pitagorinih trojki:

**Teorem 2** (Euklidova formula, [1, Teorem 7.3.]). *Sve primitivne Pitagorine trojke $(x, y, z)$ u kojima je $y$ paran, dane su formulama*

$$x = m^2 - n^2, y = 2mn, z = m^2 + n^2 \tag{2}$$

*gdje je $m < n$ i $m, n$ su relativno prosti prirodni brojevi različite parnosti.*

*Dokaz:*
Iz jednadžbe (1) slijedi da je $y^2 = z^2 - x^2$. Tada $y^2$ možemo pisati u obliku $y^2 = (z+x)(z-x)$. Zbog parnosti, $y$ možemo zapisati kao $y = 2c, c \in \mathbb{N}$. Budući da su po pretpostavci $x$ i $z$ neparni, brojevi $z+x$ i $z-x$ su parni kao suma i razlika neparnih brojeva, pa postoje prirodni brojevi $a$ i $b$ takvi da je $z + x = 2a$, $z - x = 2b$. Sada je

$$c^2 = ab.$$

Zbrajanjem i oduzimanjem prethodne dvije jednadžbe dobijamo

$$z = a + b, x = a - b.$$

Nadalje, pretpostavimo da je $(a, b) > 1$, tj. da $a$ i $b$ nisu relativno prosti. Tada postoji zajednički djelitelj $d > 1$ tako da vrijedi $x = kd$, $z = ld$, gdje su $k$ i $l$ neki prirodni brojevi, te je $y^2 = x^2 - z^2 = (k^2 - l^2)d^2$. No, to je u kontradikciji s primitivnošću od $x, y, z$. Slijedi da je $(a, b) = 1$.

Dakle, postoje $m, n \in \mathbb{N}$, $(m, n) = 1$, takvi da je $a = m^2$, $b = n^2$. Odavde je

$$x = m^2 - n^2, z = m^2 + n^2, y = 2mn.$$

Brojevi $m$ i $n$ moraju biti različite parnosti jer je broj $x = m^2 - n^2$ neparan. Zaista,

$$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4 = (m^2 + n^2)^2.$$

Treba još provjeriti da su relativno prosti. Pretpostavimo da je $(x, z) = d > 1$. Tada je $d$ neparan,

$$d \mid (m^2 + n^2) + (m^2 - n^2) = 2m^2$$

i

$$d \mid (m^2 + n^2) - (m^2 - n^2) = 2n^2.$$

No, ovo je u kontradikciji s pretpostavkom da su $m$ i $n$, pa stoga i $m^2$ i $n^2$, relativno prosti. $\square$

Iz Teorema 2 slijedi da su sve Pitagorine trojke dane identitetom:

$$[d(m^2 - n^2)]^2 + [2dmn]^2 = [d(m^2 + n^2)]^2. \tag{3}$$

**Primjer 2.** *Nađite sve Pitagorine trojke kojima je jedna stranica jednaka* 15.

*Rješenje:*
Budući da $d$ mora dijeliti duljinu stranice, u našem slučaju imamo tri mogućnosti, a to su $d = 1$, $d = 3$, i $d = 5$. S obzirom da je $2mn \neq 15$ uvijek, razmatramo samo preostale dvije stranice.

Neka je $d = 1$:
Jer je $m^2 + n^2 \neq 15$, mora biti $m^2 - n^2 = (m - n)(m + n) = 15$. Odavde je $m - n = 1$, $m + n = 15$ ili $m - n = 3$, $m + n = 5$ što povlači da je $m = 8$, $n = 7$ ili $m = 4$, $n = 1$. Tada su Pitagorine trojke: $(15, 112, 113)$ i $(15, 8, 17)$.

Neka je $d = 3$:
Moguće je i $m^2 + n^2 = 5$ i $m^2 - n^2 = 5$, što povlači da je $m = 2$, $n = 1$ ili $m = 3$, $n = 2$. Tada su Pitagorine trojke: $(9, 12, 15)$ i $(15, 36, 39)$.

Ako je $d = 5$:
moguć je samo slučaj $m^2 - n^2 = 3$ i tada je $m = 2$, $n = 1$. Pitagorina trojka je $(15, 20, 25)$.

**Napomena 1.** *Kako bismo našli primitivno rješenje jednadžbe $x^2 + y^2 = z^2$ , odnosno brojeve $m$ i $n$, dovoljno je prikazati racionalni broj $\frac{x+z}{y}$ u obliku ireducibilnog razlomka $\frac{m}{n}$.*

*Podsjetimo se, za razlomak $(a, b)$ kažemo da je ireducibilan ako je $(a, b) = 1$.*

**Primjer 3.** *Koristeći prethodnu formulu, napišite tablicu prvih 15 Pitagorinih trojki, prema veličini broja $m$.*

*Rješenje:*

| m | n | x | y | z |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 3 | 4 | 5 |
| 3 | 2 | 5 | 12 | 13 |
| 4 | 1 | 15 | 8 | 17 |
| 4 | 3 | 7 | 24 | 25 |
| 5 | 2 | 21 | 20 | 29 |
| 5 | 4 | 9 | 40 | 41 |
| 6 | 1 | 35 | 12 | 37 |
| 6 | 5 | 11 | 60 | 61 |
| 7 | 2 | 45 | 28 | 53 |
| 7 | 4 | 33 | 56 | 65 |
| 7 | 6 | 13 | 84 | 85 |
| 8 | 1 | 63 | 16 | 65 |
| 8 | 3 | 55 | 48 | 73 |
| 8 | 5 | 39 | 80 | 89 |
| 8 | 7 | 15 | 112 | 113 |
| 9 | 2 | 77 | 36 | 85 |

Tablica 1: *Prvih 15 primitivnih Pitagorinih trojki*

**Napomena 2.** *Ako želimo poredati Pitagorine trojke u tablicu kao u prethodnom primjeru, po veličini broja $m$, to radimo tako što za svaki $m$ promatramo samo one brojeve $n$ koji su manji od njega i relativno prosti s njim.*
*Kako bismo došli do ostalih rješenja, koja nisu primitivna, morali bismo brojeve iz tablice množiti svim prirodnim brojevima te na kraju tim rješenjima dodati ona u kojima su katete $x$ i $y$ zamijenjene.*

U idućem primjeru pokazat ćemo da je svaki prirodan broj član neke Pitagorine trojke. Drugim riječima, da za svaki prirodan broj postoji pravokutni trokut takav da mu je duljina jedne stranice jednaka upravo tom broju.

**Primjer 4** (vidi [6]). *Dokažite da za svaki $k \geq 3$ postoji Pitagorina trojka čija je jedna duljina stranice jednaka $k$.*

*Rješenje:*
Problem ćemo razdvojiti na dva slučaja, u ovisnosti o parnosti broja $k$.

1° Neka je $k$ neparan broj.

Zapišimo ga kao $k = 2t+1 = (t+1)^2 - t^2, t \in \mathbb{N}$ Označimo s $m = t+1$ i $n = t$. Iz toga vidimo da je $k = m^2 - n^2$, tj. da je $k$ jedan član jednadžbe (2). Dobili smo Pitagorinu trojku $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$, čiji je prvi član $k$.

2° Pretpostavimo sada da je $k$ paran broj.

Zapišimo ga u obliku $k = 2^r t$, pri čemu je $r$ prirodan broj i $t$ neparan prirodan broj.

Ako je $r \geq 2$, označimo $m = 2^{r-1}t$ i $n = 1$. Iz toga vidimo da je $k = 2mn$ član primitivne trojke $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$.

Ako je $r = 1$, bit će $k = 2t$. Kako je $t$ neparan, iz prvog slučaja znamo da postoji primitivna trojka $(x, y, z)$ takva da je $x = t$. Slijedi da je $(2x, 2y, 2z)$ trojka čiji je prvi član $k$.

# 2 Osnovni teoremi Pitagorinih trojki

U ovom dijelu iskazat ćemo i dokazati neke od najvažnijih teorema vezanih uz Pitagorine trojke.

## 2.1 Fermatov teorem

**Teorem 3** (Fermatov teorem, [1, Teorem 7.4.]). *Jednadžba*

$$x^4 + y^4 = z^2 \tag{4}$$

*nema rješenja u prirodnim brojevima. Drugim riječima, ne postoji pravokutni trokut kojem su duljine kateta kvadrati prirodnih brojeva.*

*Dokaz:*
Pretpostavimo da takav trokut postoji i izaberimo među svim takvim trokutima onaj s najmanjom hipotenuzom. Tako dobivamo Pitagorinu trojku $(x^2, y^2, z)$. Pokažimo da su $x$ i $y$ relativno prosti. U protivnom bi bilo $x = a \cdot d$, $y = b \cdot d$, $d > 1$. Tada bi iz $z^2 = d^4(a^4 + b^4)$ slijedilo da postoji $c \in \mathbb{N}$ takav da je $z = d^2 \cdot c$, te bi dobili Pitagorinu trojku $(a^2, b^2, c)$ s hipotenuzom manjom od $z$, što je kontradikcija.

Dakle, $(x^2, y^2, z)$ je primitivna Pitagorina trojka, pa po Teoremu 2 (ako odaberemo da je $y$ paran) postoje relativno prosti prirodni brojevi različite parnosti $m$ i $n$ tako da vrijedi

$$x^2 = m^2 - n^2, y^2 = 2mn, z = m^2 + n^2.$$

Iz $x^2 + n^2 = m^2$ slijedi da je $n$ paran, a $m$ neparan. Stavimo: $n = 2k$, $y = 2t, k, t \in \mathbb{N}$ pa dobivamo

$$t^2 = mk.$$

Odavde slijedi da postoje prirodni brojevi $r$ i $s$ takvi da je $m = r^2$ i $k = s^2$. Budući da je $(x, n, m)$ primitivna Pitagorina trojka, po Teoremu 2 postoje $u, v \in \mathbb{N}$ takvi da je $(u, v) = 1$, $n = 2uv$, $m = u^2 + v^2$. Sada iz $n = 2s^2$ slijedi da je $s^2 = uv$, pa postoje $a, b \in \mathbb{N}$ takvi da je $u = a^2$, $v = b^2$. Prema tome, $a^4 + b^4 = r^2$, pa je $(a^2, b^2, r)$ Pitagorina trojka za čiju hipotenuzu vrijedi: $r < r^2 = m < m^2 + n^2 = z$, što je u suprotnosti s minimalnošću od $z$. $\square$

**Napomena 3.** *Iz Teorema 2 slijedi da jednadžba $x^4 + y^4 = z^4$ nema rješenja u prirodnim brojevima. Ovo je specijalni slučaj tzv. Velikog Fermatovog teorema koji kaže da jednadžba $x^n + y^n = z^n$ nema rješenja u prirodnim brojevima za $n \geq 3$ (vidi [3, Chapter 13., Theorem 13.1 (Fermatov posljednji teorem)]). Malo lakšu tvrdnju od te dokazat ćemo u idućem primjeru.*

**Primjer 5.** *Pokažimo da ako je $x^2 + y^2 = z^2$, onda $x^n + y^n < z^n$, za svaki $n \geq 3$.*

*Rješenje:*
Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka $x, y$ i $z$ zadovoljavaju jednadžbu (1). Znamo da je tada $x < z$ i $y < z$,

a budući da je $n$ prirodan broj onda je i $x^n < z^n$ te $y^n < z^n$.
Sada vrijedi:

$$z^n = z^2 z^{n-2} = (x^2 + y^2) z^{n-2} = x^2 z^{n-2} + y^2 z^{n-2} > x^2 x^{n-2} + y^2 y^{n-2} = x^n + y^n.$$

## 2.2 Veza s kvadratima prirodnih brojeva

U Fermatovom teoremu pokazali smo da duljine kateta Pitagorinog trokuta ne mogu biti kvadrati prirodnih brojeva. Istražimo sada može li ijedna stranica biti kvadrat prirodnog broja, te u kojem slučaju je površina Pitagorinog trokuta potpun kvadrat.

**Propozicija 1** (vidi [1, Propozicija 7.5.]). *Ne postoji Pitagorin trokut u kome su hipotenuza i jedna kateta kvadrati prirodnih brojeva.*

*Dokaz:*
Pretpostavimo suprotno i neka je $(x, y, z)$ Pitagorina trojka s najmanjom hipotenuzom koja ima zadano svojstvo. Jasno je da je trojka $(x, y, z)$ primitivna. Neka je $x = a^2$, $z = c^2$. Ako je $y$ paran, onda postoje $m, n \in \mathbb{N}$ takvi da je $a^2 = x = m^2 - n^2$, $y = 2mn$, $c^2 = z = m^2 + n^2$. Odavde je $(ac)^2 = m^4 - n^4$, pa je u Pitagorinoj trojki $(n^2, ac, m^2)$ hipotenuza $m^2 < z$, te smo dobili kontradikciju. Prema tome, $y$ mora biti neparan, što znači da je $a$ paran. Iz $y^2 = c^4 - a^4 = (c^2 - a^2)(c^2 + a^2)$, slijedi da postoje prirodni brojevi $r, s$ takvi da je

$$c^2 - a^2 = r^2, c^2 + a^2 = s^2.$$

Odavde je $2c^2 = r^2 + s^2$, odnosno $c^2 = (\frac{s+r}{2})^2 + \frac{s-r}{2}^2$. Dakle, postoje $m, n \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$\frac{s \pm r}{2} = m^2 - n^2, \frac{s \mp r}{2} = 2mn, c = m^2 + n^2,$$

pa je $2a^2 = s^2 - r^2 = 8mn(m - n)(m + n)$. Budući da su $m$ i $n$ relativno prosti brojevi različite parnosti, brojevi $m$, $n$, $m - n$ i $m + n$ su u parovima relativno prosti. Stoga postoje $k, l, p, q \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$m = k^2, n = l^2, m - n = p^2, m + n = q^2.$$

Odavdje je $k^4 - l^4 = (pq)^2$, pa smo dobili Pitagorinu trojku $(l^2, pq, k^2)$ s hipotenuzom $k^2 = m < m^2 + n^2 = c < c^2 = z$, što je kontradikcija. $\square$

**Primjer 6** (vidi [2, Zadatak 7.]). *Dokažimo da postoji beskonačno mnogo Pitagorinih trokuta čija je:*

1. *hipotenuza;*

2. *jedna kateta*

*jednaka kvadratu prirodnog broja.*

*Rješenje:*

1. U prvom slučaju, neka je $(n, m, k)$ bilo koja primitivna Pitagorina trojka, pri čemu je $n < m < k$. S obzirom da brojevi $n$ i $m$ moraju biti različite parnosti i relativno prosti, oni upravo zadovoljavaju Teorem 2, pa postoji Pitagorina trojka $(x, y, z)$ za čiju hipotenuzu vrijedi:
$$z = m^2 + n^2.$$
Budući da brojevi $n$, $m$ i $k$ zadovoljavaju jednadžbu (1) slijedi da je
$$z = k^2.$$

2. U drugom slučaju, tvrdnja proizilazi direktno iz identiteta:
$$(n^4 - 4)^2 + (4n^2)^2 = (n^4 + 4)^2.$$

U idućem korolaru dana nam je veza između Pitagorinih trokutova i kvadrata prirodnih brojeva:

**Korolar 1** (vidi [1, Korolar 7.6.]). *Ne postoji Pitagorin trokut čija je površina potpun kvadrat.*

*Dokaz:*
Pretpostavimo da takav trokut $(x, y, z)$ postoji. Tada je
$$x^2 + y^2 = z^2$$
i
$$xy = 2P,$$
pri čemu je $P = n^2, n \in \mathbb{N}$. Točnije, $\frac{xy}{2} = n^2$ odnosno $2xy = (2n)^2$. Sada je
$$z^2 + (2n)^2 = (x + y)^2, \tag{5}$$
$$z^2 - (2n)^2 = (x - y)^2. \tag{6}$$
Množenjem jednadžbi (5) i (6) dobivamo:
$$(z^2 - (2n)^2)(z^2 + (2n)^2) = ((x - y)(x + y))^2,$$
pa slijedi
$$z^4 - (2n)^4 = (x^2 - y^2)^2.$$
Dakle, dobili smo Pitagorin trokut čija je hipotenuza $z^2$, a jedna kateta $(2n)^2$, što je u suprotnosti s Propozicijom 1. $\square$

## 2.3 Pitagorini trokuti s uzastopnim duljinama stranica

Prva Pitagorina trojka s kojom se uglavnom susrećemo je $(3, 4, 5)$ i to je upravo primjer trojke čije su duljine stranica uzastopni brojevi. U idućim primjerima ispitat ćemo koliko je još takvih trojki i trojki kojima su bar dvije stranice uzastopni brojevi, te koji uvjeti pri tome moraju biti zadovoljeni.

**Primjer 7.** *Nađimo sve Pitagorine trojke koje se sastoje od tri susjedna prirodna broja.*

*Rješenje:*
Označimo brojeve sa $n-1$, $n$ i $n+1$ te ih uvrstimo u jednadžbu (1). Tada iz

$$(n-1)^2 + n^2 = (n+1)^2$$

sređivanjem dobivamo da je $n^2 = 4n$. S obzirom da je $n \neq 0$, slijedi da je $n = 4$. Dakle, jedina Pitagorina trojka s traženim svojstvom je $(3, 4, 5)$.

Nakon što smo pronašli jedinu primitivnu Pitagorinu trojku kojoj su sve tri stranice uzastopni brojevi, zanima nas koliko je Pitagorinih trojki kojima su dvije stranice uzastopni brojevi. U idućem ćemo primjeru to pomnije razmotriti.

**Primjer 8.** *Pronađimo Pitagorine trojke kojima su dvije stranice uzastopni brojevi.*

*Rješenje:*
S obzirom da je $z$ neparan broj, $z - y = 1$ je moguće samo ukoliko je $y$ paran broj. Koristeći formulu (2) dobivamo da je

$$1 = z - y = m^2 + n^2 - 2mn,$$

odnosno

$$(m-n)^2 = 1.$$

Budući je $m > n$ to vrijedi samo ako je

$$m - n = 1,$$

pa je

$$m = n + 1.$$

Sada dobivamo da je

$$\begin{aligned} x &= m^2 - n^2 = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1, \\ y &= 2n(n+1), \\ z &= y + 1 = 2n(n+1) + 1, \end{aligned} \tag{7}$$

za $n = 1, 2, 3, ...$
Dobili smo formulu kojom formiramo sve Pitagorine trojke traženog oblika.

Prikazat ćemo u tablici prvih 10 trojki koje zadovoljavaju taj uvjet.

| n | x | y | z |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 5 | 12 | 13 |
| 3 | 7 | 24 | 25 |
| 4 | 9 | 40 | 41 |
| 5 | 11 | 60 | 61 |
| 6 | 13 | 84 | 85 |
| 7 | 15 | 112 | 113 |
| 8 | 17 | 144 | 145 |
| 9 | 19 | 180 | 181 |
| 10 | 21 | 220 | 221 |

Tablica 2: *Primitivne Pitagorine trojke s uzastopnim duljinama stranica*

U iduća dva primjera vidjet ćemo mogu li se Pitagorine trojke povezati s nizovima prirodnih brojeva.

**Primjer 9** (vidi [1, Zadatak 2.]). *Pronađimo sve Pitagorine trojke čiji su članovi tri uzastopna člana aritmetičkog niza.*

*Rješenje:*
Označimo tri uzastopna člana nekog aritmetičkog niza sa $n-d$, $n$ i $n+d$, pri čemu je $d$ diferencija tog aritmetičkog niza i $n$ prirodan broj. Uvrštavanjem tih brojeva u jednadžbu (1) dobivamo

$$(n-d)^2 + n^2 = (n+d)^2.$$

Sređivanjem te jednadžbe dobivamo da je $n^2 = 4nd$, odnosno $n = 4d$. Dakle, tražene trojke su oblika $(3d, 4d, 5d)$.

**Primjer 10.** *Pronađimo sve Pitagorine trojke čiji su članovi tri uzastopna člana geometrijskog niza.*

*Rješenje:*
Označimo tri uzastopna člana nekog geometrijskog niza sa $\frac{n}{q}$, $n$ i $nq$, pri čemu je $q$ kvocijent tog geometrijskog niza i $n$ prirodan broj. Uvrštavanjem u jednadžbu (1) dobivamo

$$\left(\frac{n}{q}\right)^2 + n^2 = (nq)^2.$$

Pomnožimo li obje strane s $q^2$ dobijemo $q^4n^2 - q^2n^2 - n^2 = 0$. Uvedemo li supstituciju $q^2 = u$, imamo da je $n^2(u^2-u-1) = 0$. S obzirom da je $n \neq 0$, slijedi $u^2-u-1=0$. Budući da ta jednadžba nema rješenja u cijelim brojevima, došli smo do kontradikcije. Slijedi da ne postoje Pitagorine trojke s traženim svojstvom.

### 2.3.1 Rješenja Pitagorine jednadžbe u kojoj su katete uzastopni brojevi

Ranije smo pronašli jedno rješenje jednadžbe $x^2 + y^2 = z^2$ kojemu su duljine sve tri stranice uzastopni brojevi, a to je $(3, 4, 5)$. U idućoj lemi, uz korištenje tog rješenja, pokazat ćemo metodu kojom lako pronalazimo Pitagorine trokutove s uzastopnim duljinama kateta.

**Lema 1** (vidi [5, Chapter 2, Lemma.]). *Ako prirodni brojevi $x$ i $z$ zadovoljavaju jednadžbu*

$$x^2 + (x+1)^2 = z^2 \tag{8}$$

*i ako je $x > 3$, tada su*

$$x_1 = 3x - 2z + 1, \tag{9}$$

$$z_1 = 3z - 4x - 2, \tag{10}$$

*prirodni brojevi koji zadovoljavaju jednadžbu*

$$x_1^2 + (x_1+1)^2 = z_1^2$$

*i $z_1 < z$.*

*Dokaz:*
Uvrštavanjem jednadžbi (9) i (10) u jednadžbu (8) dobivamo:

$$\begin{aligned} x_1^2 + (x_1+1)^2 &= 2x_1^2 + 2x_1 + 1 = 2(9x^2 - 12xz - 6x - 4z^2 - 4z - 1) + 2(3x - 2z + 1) \\ &= 18x^2 + 8z^2 - 34xz + 18x - 12z + 5, \\ z_1^2 &= 16x^2 + 9z^2 - 24xz + 16x - 12z + 4. \end{aligned}$$

Ako izjednačimo desne strane prethodnih dviju jednadžbi, tj.

$$16x^2 + 9z^2 - 24xz + 16x - 12z + 4 = 8z^2 + 18x^2 - 24xz + 18x - 12z + 5$$

dobijemo

$$z^2 = 2x^2 + 2x + 1,$$

što znamo da vrijedi iz jednadžbe (8). Trebamo još pokazati da su $x_1$ i $z_1$ prirodni i da je $z_1 < z$. To je ekvivalentno dokazivanju da vrijedi

$$3x - 2z + 1 > 0$$

i

$$0 < 3z - 4x - 2 < z,$$

tj. ekvivalentno tvrdnjama:

$$2z < 3x + 1,$$

$$3z > 4x + 2$$

i

$$z < 2x + 1.$$

Kako je $x > 3$, slijedi da je

$$x^2 > 3x = 2x + x > 2x + 3.$$

Ako to uvrstimo u jednadžbu (8) dobijemo

$$4z^2 = 8x^2 + 8x + 4 = 9x^2 + 8x + 4 - x^2 < 9x^2 + 8x + 4 - (2x + 3) = 9x^2 + 6x + 1 = (3x + 1)^2.$$

To povlači da je $2z < 3x + 1$. Zbrajanjem te jednadžbe s $x > 0$ dobivamo $2z < 4x + 1$, iz čega lako slijedi da je $z < 2x + 1$. Uvrštavanjem nejednakosti $x > 0$ u jednadžbu (8) dobijemo:

$$9z^2 = 18x^2 + 18x + 9 > 16x^2 + 16 + 4 = (4x + 2)^2,$$

iz čega slijedi da je $3z > 4x + 2$. Time je tvrdnja leme u potpunosti dokazana. $\square$

**Primjer 11.** *Pronađimo prvih nekoliko primitivnih Pitagorinih trojki kojima su duljine kateta uzastopni brojevi.*

*Rješenje:*
Prva takva trojka nam je već poznata, tj. $(x_1, y_1, z_1) = (3, 4, 5)$. Drugu trojku dobivamo na sljedeći način:

$$\begin{aligned} x_2 &= 3x_1 + 2z_1 + 1 = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 1 = 20, \\ y_2 &= x_2 + 1 = 21, \\ z_2 &= 4x_1 + 3z_1 + 2 = 4 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 2 = 29. \end{aligned}$$

Lako provjerimo kako dobiveni brojevi zadovoljavaju Pitagorinu jednadžbu. Treću primitivnu Pitagorinu trojku dobivamo na analogan način, pomoću druge:

$$\begin{aligned} x_3 &= 3 \cdot 20 + 2 \cdot 29 + 1 = 119, \\ y_3 &= 120, \\ z_3 &= 4 \cdot 20 + 3 \cdot 29 + 2 = 169. \end{aligned}$$

U sljedećoj tablici navedeno je prvih pet Pitagorinih trojki s uzastopnim duljinama kateta.

| x | y | z |
|---|---|---|
| 3 | 4 | 5 |
| 20 | 21 | 29 |
| 119 | 120 | 169 |
| 696 | 697 | 985 |
| 4059 | 4060 | 5741 |

Tablica 3: *Pitagorine trojke s uzastopnim duljinama kateta*

Pretpostavimo sada da postoje Pitagorine trojke $(x, x + 1, z)$ koje se razlikuju od svih trojki $(x_n, x_n + 1, z_n)$ dobivenih prethodnim postupkom. Izaberemo onu trojku za koju je $z$ najmanji. Sada neka je

$$x' = 3x - 2z + 1, \;\; z' = 3z - 4x - 2. \tag{11}$$

Iz Leme 1 znamo da je $(x', x'+1, z')$ Pitagorin trokut i da je $z' < z$. No, kako je $z$ bio najmanji među svim hipotenuzama u Pitagorinim trojkama koje se razlikuju od trojki $(x_n, x_n+1, z_n)$, slijedi da trojka $(x', x'+1, z')$ nije među trojkama koje se razlikuju od navedenih. Iz toga slijedi da za neki $n$ vrijedi da je $x' = x_n$ i $z' = z_n$ te da je:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 3x' + 2z' + 1, \\ y_{n+1} &= x_{n+1} + 1, \\ z_{n+1} &= 4x' + 3z' + 2. \end{aligned}$$

Sada iz jednadžbe (11) imamo:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 3(3x - 2z + 1) + 2(3z - 4x - 2) + 1 = x, \\ z_{n+1} &= 4(3x - 2z + 1) + 3(3z - 4x - 2) + 2 = z. \end{aligned}$$

Slijedi da trojka $(x, x+1, z)$ pripada trojkama $(x_n, y_n, z_n)$, što je u suprotnosti s pretpostavkom.

Dakle, dokazali smo da su trojke $(x_n, x_n+1, z_n)$ sve Pitagorine trojke za koje vrijedi da su im katete uzastopni brojevi.

## 2.4 Pitagorini trokuti istih površina

Za početak, primjetimo da su dva Pitagorina trokuta koja imaju istu površinu i jednake hipotenuze kongruentni.

Neka su $(x_1, y_1, z_1)$ i $(x_2, y_2, z_2)$ trokuti s hipotenuzama jednake duljine i istim površinama te neka je $x_1 \geq y_1$ i $x_2 \geq y_2$. Po pretpostavci vrijedi da je $x_1 y_1 = x_2 y_2$ i $z_1 = z_2$, odnosno da je $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$. Ako prvu tvrdnju pomnožimo s 2 i dodamo, odnosno oduzmemo od posljednje jednadžbe dobivamo da je

$$\begin{aligned} (x_1 - y_1)^2 &= (x_2 - y_2)^2, \\ (x_1 + y_1)^2 &= (x_2 + y_2)^2. \end{aligned}$$

Odavde je $x_1 - y_1 = x_2 - y_2$ i $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ te iz toga slijedi da je $x_1 = x_2$ i $y_1 = y_2$. Dakle, ako su hipotenuze trokuta iste površine jednake duljine, slijedi kako su i odgovarajuće katete jednake duljine.

Zanima nas postoji li proizvoljno puno Pitagorinih trokuta s različitim hipotenuzama i istom površinom. U idućem teoremu i lemi dan je odgovor na to.

**Teorem 4** (vidi [5, Chapter 2, Theorem 2.]). *Za svaki prirodan broj $n$ postoji $n$ Pitagorinih trokuta s različitim hipotenuzama i istom površinom.*

Kako bismo dokazali tvrdnju teorema potrebna nam je sljedeća lema:

**Lema 2** (vidi [5, Chapter 2, Lemma.]). *Ako imamo $n$ Pitagorinih trokuta s različitim hipotenuzama i istom površinom i ako je hipotenuza bar jednog od tih trokutova neparan broj, tada možemo konstruirati $n+1$ Pitagorin trokut s različitom hipotenuzom i istom površinom takav da je hipotenuza bar jednog od trokutova neparna.*

*Dokaz:*
Neka je $n$ prirodan broj i neka su $(x_k, y_k, z_k)$, pri čemu je $x_k < y_k < z_k, k = 1, 2, ..., n$, $n$ Pitagorinih trokuta s istim površinama i međusobno različitim hipotenuzama. Neka je $z_1$ neparan.

Neka su:

$$\begin{aligned} x'_k &= 2z_1(y_1^2 - x_1^2)x_k, \\ y'_k &= 2z_1(y_1^2 - x_1^2)y_k, \\ z'_k &= 2z_1(y_1^2 - x_1^2)z_k, \end{aligned} \tag{12}$$

za $k = 1, 2, ..., n$, te neka su

$$\begin{aligned} x'_{n+1} &= (y_1^2 - x_1^2)^2, \\ y'_{n+1} &= 4x_1y_1z_1^2, \\ z'_{n+1} &= 4x_1^2y_1^2 + z_1^4. \end{aligned} \tag{13}$$

Za $k = 1, 2, .., n$ trokuti $(x'_k, y'_k, z'_k)$ su slični trokutima $(x_k, y_k, z_k), k = 1, 2, ..., n$ iz čega slijedi da su Pitagorini trokuti.

Ako bismo uvrstili jednakosti iz (12) u jednadžbu (1) primjetili bismo da zadovoljavaju tu jednadžbu, tj. da vrijedi

$$(y_1^2 - x_1^2)^4 + 16x_1^2y_1^2z_1^4 = (4x_1^2y_1^2 + z_1^4)^2,$$

pri čemu smo iskoristili činjenicu da je $x_1^2 + y_1^2 = z_1^2$.

Iz toga slijedi da i trojka $(x'_{n+1}, y'_{n+1}, z'_{n+1})$ čini Pitagorin trokut.

Trebamo dokazati da vrijede i ostali uvjeti, odnosno da trokuti $(x'_k, y'_k, z'_k)$, $k = 1, 2, ..., n+1$ imaju iste površine i različite hipotenuze.

Neka je $P$ površina trokuta $(x_k, y_k, z_k)$, $k = 1, 2, ..., n$. Tada je

$$P = \frac{x_k y_k}{2},$$

za svaki $k = 1, 2, ..., n$.

Površina trokuta $(x'_k, y'_k, z'_k)$, pri čemu je $k = 1, 2, ..., n$ je

$$P' = \frac{x'_k y'_k}{2},$$

a prema (11) slijedi da je

$$\frac{x'_k y'_k}{2} = 2z_1^2(y_1^2 - x_1^2)^2 x_k y_k = 4z_1^2(y_1^2 - x_1^2)^2 P.$$

Budući da su $x_1, y_1, z_1$ i $P$ fiksni brojevi, slijedi da svi trokuti $(x'_k, y'_k, z'_k)$, $k = 1, 2, ..., n$ imaju istu površinu. Trebamo još dokazati za trokut $(x'_{k+1}, y'_{k+1}, z'_{k+1})$.

Površina trokuta $(x'_{k+1}, y'_{k+1}, z'_{k+1})$ je tada

$$\frac{x'_{n+1} y'_{n+1}}{2} = 2(y_1^2 - x_1^2)^2 x_1 y_1 z_1^2 = 4z_1^2(y_1^2 - x_1^2)^2 P.$$

Dakle, svi trokuti $(x'_k, y'_k, z'_k)$, pri čemu je $k = 1, 2, ..., n+1$ imaju istu površinu.

Budući da su svi $z_k$, $k = 1, 2, ..., n$ različiti, lako vidimo iz jednadžbe (12) da su i sve hipotenuze trokuta $(x'_k, y'_k, z'_k)$, $k = 1, 2, ..., n$ različite, a pritom i parne. A jer je $z_1$ po pretpostavci neparan broj, iz jednadžbe (13) vidimo da je i $z'_{n+1}$ neparan, te stoga i različit od svih prethodnih. Time je lema dokazana. □

Tvrdnja Teorema 4 dobiva se indukcijom po prirodnom broju $n$.

**Primjer 12.** *Pokažimo da tvrdnja teorema vrijedi za $n = 2$.*

*Rješenje:*
Konstruirajmo pomoću Pitagorinog trokuta s duljinama stranica $(3, 4, 5)$ dva trokuta s različitim hipotenuzama i istom površinom. Označimo $(x_0, y_0, z_0) = (3, 4, 5)$.

Iz jednadžbe (12) dobivamo:

$$\begin{aligned} x'_1 &= 2z_0(y_0^2 - x_0^2)x_0 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 = 210, \\ y'_1 &= 2z_0(y_0^2 - x_0^2)y_0 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 4 = 280, \\ z'_1 &= 2z_0(y_0^2 - x_0^2)z_0 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 5 = 350. \end{aligned}$$

Iz jednadžbe (13) slijedi:

$$\begin{aligned} x'_2 &= (y_0^2 - x_0^2)^2 = (4^2 - 3^2)^2 = 49, \\ y'_2 &= 4x_0y_0z_0^2 = 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5^2 = 1200, \\ z'_2 &= 4x_0^2y_0^2 + z_0^4 = 4 \cdot 3^2 \cdot 4^2 + 5^4 = 1201. \end{aligned}$$

Površine ovako dobivenih Pitagorinih trokuta su:

$$\frac{x'_1 \cdot y'_1}{2} = \frac{x'_2 \cdot y'_2}{2} = 29400.$$

Primjenimo li ponovo postupak opisan u Lemi 2 na dobivene Pitagorine trokute, dobili bismo tri Pitagorina trokuta s različitim hipotenuzama i istom površinom, no njihove stranice bi bile veće od $10^{10}$.

# 3 Generiranje Pitagorinih trojki

U prvom poglavlju iskazali smo i dokazali formulu pomoću koje je za bilo koja dva cijela broja $m$ i $n$, za koje je $m > n$, moguće dobiti Pitagorin trokut. Iako dana formula generira beskonačan broj Pitagorinih trojki, ne može generirati sve, a posebno ne one koje nisu primitivne. Zbog toga ćemo uvesti direktnu metodu za generiranje svih mogućih primitivnih i neprimitivnih trojki za dani broj (koji predstavlja jednu katetu pravokutnog trokuta).

**Primjer 13.** *Uzmemo li za $m = 3$ i $n = 2$, koristeći formulu (2) dobijamo Pitagorinu trojku $(5, 12, 13)$. No trojku $(15, 36, 39)$, koju dobijemo množenjem trojke $(5, 12, 13)$ brojem 3 ne možemo ni na koji način generirati iz formule (2), kao ni transponiranu trojku $(12, 5, 13)$.*

## 3.1 Generiranje primitivnih Pitagorinih trojki

Postupak se temelji na činjenici da razlika između vrijednosti preostale katete i hipotenuze može imati samo određene vrijednosti u ovisnosti o vrijednosti dane katete.

Neka je $x$ dana kateta i neka su $y$ i $z$ preostala kateta i hipotenuza trokuta. Želimo odrediti razliku između vrijednosti $z$ i $y$ u ovisnosti o $x$. Označimo tu razliku s $\triangle$ i razmatramo jednadžbu $z = y + \triangle$. Sada, iz jednadžbe (1) imamo:

$$x^2 + y^2 = (y + \triangle)^2.$$

Primjenimo li formulu za kvadrat zbroja dobivamo:

$$\begin{aligned} x^2 + \cancel{y^2} &= \cancel{y^2} + 2\triangle y + \triangle^2, \\ x^2 &= \triangle(2y + \triangle), \qquad (14) \\ y &= \frac{x^2 - \triangle^2}{2\triangle}. \qquad (15) \end{aligned}$$

Iz dobivene jednakosti vidimo da $\triangle$ mora biti faktor od $x^2$ kako bi $y$ imao cijelobrojnu vrijednost. S obzirom da $y$ mora biti pozitivan broj imamo

$$\frac{x^2 - \triangle^2}{2\triangle} > 0 \Rightarrow x^2 - \triangle^2 > 0,$$

pa imamo

$$x > \triangle\,. \qquad (16)$$

Za potrebu generaliziranja, podijelit ćemo brojeve u tri kategorije, na osnovu njihovog rastava na proste faktore:

1° parni brojevi koji su potencije broja 2;

2° neparni brojevi, umnošci prostih neparnih faktora;

3° parni brojevi koji sadrže uz potencije broja dva i druge proste faktore.

Sada, prema prethodnoj podjeli, generalizaciju možemo razdvojiti na tri slučaja, u ovisnosti o danoj vrijednosti katete $x$.

### 3.1.1 Generalizacija kada je $x$ potencija broja 2

Neka je $x = 2^n$ i $\triangle = 2^m$, gdje su $n$ i $m$ prirodni brojevi takvi da je $n > m$ kako bi bilo zadovoljeno $\triangle < x$. Iz jednadžbe (14) imamo

$$(2^n)^2 = 2^m(2y + 2^r),$$

pa slijedi

$$2^{m+1}y = (2^n)^2 - (2^m)^2.$$

Pomnožimo li obje strane jednadžbe s $2^{-(m+1)}$ imamo:

$$\begin{aligned} y &= 2^{-1}(2^{2n-m} - 2^m), \\ y &= 2^{m-1}(2^{2n-2m} - 1). \end{aligned} \tag{17}$$

S obzirom da je u ovom slučaju $x$ paran, $y$ mora biti neparan, a desna strana jednadžbe (17) će biti neparna samo ako je $m = 1$.

Sada će trojka biti $(2^m, 2^{2m-2} - 1, 2^{2m-2} + 1)$.

**Primjer 14.** *Neka je $n = 4$, $m = 2$.*

Tada je $x = 16$ i $\triangle = 2$, pa imamo

$$\begin{aligned} y &= 2^{1-1}(2^{2\cdot 4-2\cdot 1} - 1) = 64 - 1 = 63, \\ z^2 &= 16^2 + 63^5 = 4225 \Rightarrow z = 65. \end{aligned}$$

Dakle, dobili smo primitivnu Pitagorinu trojku $(16, 63, 65)$. Ako izaberemo $\triangle \neq 2$, na primjer $\triangle = 4$ dobijemo $y = 30$ i $z = 68$. Dobili smo trojku $(16, 30, 34)$ koja je neprimitivna. U ovom slučaju, jedina moguća vrijednost od $\triangle$ će biti 2.

### 3.1.2 Generalizacija kada je $x$ umnožak neparnih prostih faktora

Neka je $x = p^s k$, gdje je $p$ prosti faktor, a $k$ umnožak preostalih prostih faktora i $s$ prirodan broj. Tada je $\triangle = p^t$, gdje je $t$ također prirodan broj. Iz jednadžbe (14) imamo

$$(p^s k)^2 = p^t(2y + p^t),$$

tj.

$$2p^t y = (p^s k)^2 - p^{2t},$$

pa je

$$y = \frac{1}{2}(p^{2s-t}k^2 - p^t). \tag{18}$$

Kako bi trojka bila primitivna, $y$ ne smije imati $p$ kao faktor. Dakle, iz jednadžbe (18) slijedi $t = 0$ ili $t = 2s$.

Ako je $t = 0$, dobivamo

$$z^2 = p^{2s}k^2 + \frac{1}{4}(p^{2s}k^2 - 1)^2 = \frac{1}{4}p^{4s}k^4 + \frac{1}{2}p^{2s}k^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(p^{2s}k^2 + 1)^2,$$

tj.

$$z = \frac{p^{2s}k^2 + 1}{2},$$

Ako je $t = 2s$, dobivamo

$$z^2 = p^{2s}k^2 + \frac{1}{4}(k^2 - p^{2s})^2 = \frac{1}{4}k^4 + \frac{1}{2}p^{2s}k^2 + p^{4s} = \left(\frac{k^2 + p^{2s}}{2}\right)^2$$

tj.

$$z = \frac{k^2 + p^{2s}}{2}.$$

Dakle, za $\triangle = p^{2s}$ trojka će biti $\left(p^s k, \frac{k^2 - p^{2s}}{2}, \frac{k^2 + p^{2s}}{2}\right)$, a za $\triangle = 1$ $\left(p^s k, \frac{p^{2s}k^2 - 1}{2}, \frac{p^{2s}k^2 + 1}{2}\right)$.

Nadalje, $\triangle = 1$ nam osigurava da za svaki neparni broj postoji bar jedna primitivna trojka i to oblika $\left(x, \frac{x^2-1}{2}, \frac{x^2+1}{2}\right)$.

**Primjer 15.** *Pronađimo sve primitivne Pitagorine trojke u kojima je* $x = 3^2 \cdot 13 = 117$.

Tada $\triangle$ može imati vrijednosti $\triangle = 3^4 = 81$ i $\triangle = 1$. Za $\triangle = 81$, imamo

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}(3^{4-4} \cdot 13^2 - 3^4) = 44, \\ z &= 125. \end{aligned}$$

Dakle $(117, 44, 125)$ je primitivna trojka. Za $\triangle = 1$, imamo

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}(3^3 \cdot 13^2 - 3) = 2280, \\ z &= 2283 \end{aligned}$$

što daje drugu primitivnu trojku, $(117, 2280, 2283)$.

Slučaj $\triangle = 13^2 = 169$, ne bi bio moguć jer ne zadovoljava uvjet (16).

### 3.1.3 Generalizacija kada je $x$ umnožak potencije broja 2 i drugih prostih faktora

Neka je $x = 2^m p^s k$, gdje je $p$ prost faktor, $k$ produkt ostalih prostih faktora, a $m$ i $s$ prirodni brojevi. Tada je $\triangle = 2^n p^t$, gdje su $n$ i $t$ prirodni brojevi. Iz jednadžbe (14) imamo

$$(2^m p^s k)^2 = 2^n p^t (2y + 2^n p^t).$$

Pomnožimo li obje strane prethodne jednadžbe s $\frac{1}{2}2^{-n}p^{-t}$ dobivamo:

$$y = \frac{1}{2}(2^{2m-n}p^{2s-t}k^2 - 2^n p^t),$$

odnosno

$$y = 2^{n-1}(2^{2m-2n}p^{2s-t}k^2 - p^t). \tag{19}$$

U ovisnosti o odnosu brojeva $m$ i $n$, razmatranje ćemo razdvojiti na tri slučaja.

1° Neka je $m > n$.

Jer je $p^t$ neparan, a $2^{2m-2n}p^{2s-t}k^2$ paran, iz (19) slijedi kako je $y$ neparan jedino u slučaju $n = 1$. Kako bi trojka bila primitivna, $p$ ne smije biti faktor od $y$ pa slijedi da je ili $t = 0$ ili $t = 2s$.

Iz $t = 0$ dobivamo

$$z^2 = 2^{2m}p^{2s}k^2 + (2^{2m-2}p^{2s}k^2 - 1)^2 = 2^{4m-4}p^{4s}k^4 + 2 \cdot 2^{2m-1}p^{2s}k^2 + 1 = (2^{2m-2}p^{2s}k^2 + 1)^2,$$

pa je

$$z = 2^{2m-2}p^{2s}k^2 + 1.$$

Za $t = 2s$ slijedi

$$z^2 = 2^{2m}p^{2s}k^2 + (2^{2m-2}k^2 - p^{2s})^2 = 2^{4m-4}k^4 - 2 \cdot 2^{2m-2}p^{2s}k^2 + p^{4s} = (2^{2m-2}k^2 - p^{2s})^2,$$

tj.

$$z = 2^{2m-2}k^2 - p^{2s}.$$

Dakle, za $\triangle = 2$ trojka će biti $(2^m p^s k, 2^{2m-2}p^{2s}k^2 - 1, 2^{2m-2}p^{2s}k^2 + 1)$,
a za $\triangle = 2p^{2s}$ bit će $(2^m p^s k, 2^{2m-2}p^{2s}k^2 - 1, 2^{2m-2}k^2 + p^{2s})$.

**Primjer 16.** *Pronađimo sve primitivne Pitagorine trojke u kojima je* $x = 2^2 5^2 \cdot 21 = 2100$.

Tada $\triangle$ može imati dvije vrijednosti, $\triangle = 2$ i $\triangle = 2 \cdot 5^4 = 1250$. Za $\triangle = 2$ imamo

$$\begin{aligned} y &= 2^{4-2}5^4 \cdot 21^2 - 1 = 1102499, \\ z &= 1102501. \end{aligned}$$

Primitivna trojka će tada biti $(2100, 1102499, 1102501)$. U slučaju $\triangle = 1250$, dobijemo

$$\begin{aligned} y &= 2^{4-2} \cdot 21^2 - 5^4 = 1139, \\ z &= 2389. \end{aligned}$$

To nam daje primitivnu trojku $(2100, 1139, 2389)$.

2° Neka je $m < n$.

Jednadžba (19) ekvivalentna je:

$$\begin{aligned} y &= 2^{n-1}\left(\frac{p^{2s-t}k^2}{2^{2n-2m}} - 1\right), \\ y &= 2^{2m-n-1}(p^{2s-t}k^2 - 2^{2r-2m}p^t). \end{aligned} \tag{20}$$

Budući je izraz unutar zagrade na desnoj strani jednadžbe (20) neparan, slijedi da će $y$ biti neparan samo ako je $n = 2m - 1$. Kako bi trojka bila primitivna, $y$ ne bi trebao imati $p$ za faktor pa slijedi da mora biti $t = 0$ ili $t = 2s$.

**Primjer 17.** *Pronađimo primitivne trojke kad je* $x = 2^2 3^2 \cdot 25 = 900$.

U ovom slučaju $\triangle$ može poprimiti dvije vrijednosti: $\triangle = 2^3 = 8$ i $\triangle = 2^3 3^4 = 648$. Ako je $\triangle = 8$, dobivamo

$$\begin{aligned} y &= 2^{4-3-1}(3^4 \cdot 25^2 - 2^{6-4} \cdot 3^0) = 50621, \\ z &= 50629. \end{aligned}$$

Za $\triangle = 648$ slijedi

$$\begin{aligned} y &= 2^{4-3-1}(3^{4-4} \cdot 25^2 - 2^{6-4} \cdot 3^4) = 301, \\ z &= 949. \end{aligned}$$

Ako bismo uzeli $p = 5$ umjesto $p = 3$, tada bi $\triangle = 2^3 5^4 = 5000$, što nije moguće jer ne zadovoljava uvjet (16).

3° Neka je $m = n$.

Iz (19) slijedi

$$y = 2^{n-1}(p^{2s-t}k^2 - p^t). \tag{21}$$

Primjetmo da ćemo jedino za $m = n = 0$ dobiti primitivno rješenje, no to onda postaje jednadžba (18). Ako je $n > 1$, $y$ će biti paran, pa rješenja neće biti primitivna. Ako je $m = n = 1$, rješenje također neće biti primitivno zbog $p$. Primjetimo da cijeli brojevi oblika $4r + 2, r \in \mathbb{N}$ nikad neće dati primitivnu trojku.

**Primjer 18.** *Brojevi* $6 = 4 \cdot 1 + 2$,$10 = 4 \cdot 2 + 2, 14, ...$ *formiraju neprimitivne trojke:*

$$\begin{aligned} 6^2 + 8^2 &= 10^2, \\ 10^2 + 24^2 &= 26^2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Općenito, prikažemo li dani broj u obliku $x = 2^n p_1^{s_1} p_2^{s_2} ... p_k^{s_k}$, tada će $\triangle$ biti

$$\triangle = 2^r \cdot \prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i}, \tag{22}$$

pri čemu je $t_i = 0$ ili $t_i = 2s_i$, za $i = 1, 2, ..., k$.

**Primjer 19** (vidi [4, Chapter 2, Table 1.]). *Napišimo sve primitivne Pitagorine trojke u kojima je* $x = 792$.

*Rješenje:*
Primjetimo da je $792 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$. U ovom slučaju je $p_1 = 3$ i $p_2 = 11$. Primjenom jednakosti (22) dobivamo tablicu:

| $\triangle$ | y | $(x, y, z)$ |
|---|---|---|
| $2^1 3^0 11^0$ | 156815 | $(792, 156815, 156817)$ |
| $2^1 3^4 11^0$ | 1855 | $(792, 1855, 2017)$ |
| $2^1 3^0 11^2$ | 1175 | $(792, 1175, 1417)$ |
| $2^5 3^0 11^0$ | 9785 | $(792, 9785, 9817)$ |

Tablica 4: *Primitivne Pitagorine trojke s* $x = 792$

Vrijednosti $\triangle = 2592, 3872, 19602, 313632$ nismo uzeli u obzir jer ne zadovoljavaju uvjet (16).

**Napomena 4.** *Ukoliko želimo generirati neprimitivnu Pitagorinu trojku, najprije trebamo faktorizirati katetu* $x$ *i* $\triangle$ *će biti kombinacija tih faktora. Zatim će nam se postupak svesti na neki od ranije provedenih.*

**Primjer 20** (vidi [4, Chapter 3, Table 2.]). *Napišimo sve neprimitivne Pitagorine trojke u kojima je* $x = 60$.

*Rješenje:*
Primjetimo da je $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$.

Zamijenimo li u jednakosti (22) uvjet $t_i = \{0, 2s_i\}$ uvjetom $t_i = 0, ..., 2s_i$, $i = 1, 2, ..., k$, dobit ćemo sve Pitagorine trojke. Primjenom te jednakosti dobivamo tablicu:

| $\triangle$ | y | $(x, y, z)$ |
|---|---|---|
| $2^2 3^0 5^0$ | 448 | $(60, 448, 452)$ |
| $2^1 3^1 5^0$ | 297 | $(60, 297, 303)$ |
| $2^1 3^0 5^1$ | 175 | $(60, 175, 185)$ |
| $2^2 3^1 5^0$ | 144 | $(60, 144, 156)$ |
| $2^2 3^0 5^1$ | 80 | $(60, 80, 100)$ |
| $2^3 3^1 5^0$ | 63 | $(60, 63, 87)$ |
| $2^1 3^1 5^1$ | 45 | $(60, 45, 75)$ |
| $2^2 3^2 5^0$ | 32 | $(60, 32, 68)$ |
| $2^3 3^0 5^1$ | 25 | $(60, 25, 65)$ |

Tablica 5: *Neprimitivne Pitagorine trojke s* $x = 60$

Nismo uzeli u obzir vrijednosti $\triangle = 2, 8, 18, 50$ jer one generiraju primitivne trojke, a preostale kombinacije faktora nisu moguće jer ne zadovoljavaju uvjet $x > \triangle$ .

# Literatura

[1] A. Dujella, *Uvod u teoriju brojeva*, PMF - Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu, skripta.

[2] A. Dujella, *Pitagorine trojke*, dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/ duje/utb/pitagorine.pdf

[3] G.H. Hardy, E.M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, Oxford University Press, Oxford, 1960.

[4] T. Roy, F.N. Sonia, *A direct method to generate Pythagorean triples and its generalization to Pythagorean quadruples and n-tuples*, Department of Physics, Jadavpur University, Kolkata, India.

[5] W. Sierpinski, *Elementary theory of numbers*, North Holland, Amsterdam, 1988.

[6] I. Soldo, I. Vuksanović, *Pitagorine trojke*, Matematičko-fizički list **LXIV**(2013), 179–184.