Jordanova forma matrice

Puhanić, Monika

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Monika Puhanić

Jordanova forma matrice

Završni rad

Osijek, 2023.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Monika Puhanić

Jordanova forma matrice

Završni rad

Mentor: doc. dr. sc. Ljiljana Primorac Gajčić

Osijek, 2023.

Sažetak: Tema ovog rada je Jordanova forma matrice. U radu su definirani osnovni pojmovi iz linearne algebre, kao što su svojstvene vrijednosti, karakteristični i minimalni polinom, dijagonalizacija matrice, Jordanovi lanci te invarijantni potprostori. Predstavljena je motivacija za uvođenje Jordanove forme matrice, te je objašnjen postupak njezinog određivanja. Navedeni su teoremi o egzistenciji i jedinstvenosti navedene forme, te je na primjeru objašnjen postupak određivanja Jordanove forme matrice. Također su navedeni problemi pri numeričkom računanju Jordanove forme te je istaknuta njezina važnost kod primjene matričnih funkcija.

Ključne riječi: Jordanova matrica, Jordanov blok, elementarna Jordanova klijetka, Jordanovi lanci

Jordan form of a matrix

Abstract: The topic of this paper is the Jordan form of a matrix. In the paper are defined the basic terms from linear algebra such as eigenvalues, characteristic and minimum polynomial, matrix diagonalization, Jordan chains and invariant subspaces. The motivation for introducing Jordan form is presented and the procedure for its determination is explained. Theorems of the existence and uniqueness of the given form are stated, and the procedure for determining the Jordan form of the matrix is explained using an example. There are also stated problems in the numerical calculation of Jordan form and importance of its application for matrix functions.

Key words: Jordan matrix, Jordan block, elementary Jordan ventricle, Jordan chain

Sadržaj

Uvod

Francuski matematičar Jordan Camile (1838.-1922.) napisao je mnogo radova u području algebre, funkcija i grupa. Pojmovi koje je on uveo u linearnu algebru su: Jordanova klijetka, Jordanova matrica i Jordanova baza, a njegov rad "Jordanova forma matrice" objavljen je 1870. godine u "Treatise on substitutions and algebraic equations".

Elementarnom Jordanovom klijetkom nazivamo matricu koja na glavnoj dijagonali ima svojstvenu vrijednost λ, a na mjestima iznad glavne dijagonale ima jedinice dok su svi ostali elementi jednaki 0. Sve elementarne Jordanove klijetke jedne svojstvene vrijednosti možemo staviti u jednu blok-dijagonalnu matricu koju zovemo *Jordanov blok*. Dakle, ta matrica na glavnoj dijagonali ima svojstvenu vrijednost λ, a na gornjoj sporednoj dijagonali može imati 1 ili 0.
Jordanova forma matrice je specijalna blok-dijagonalna matrica koja na glavnoj dijagonali ima Jordanove blokove.
Jordanova forma je vrlo jednostavna matrica. Nije uvijek jednostavna kao dijagonalna (nekada će ona biti baš dijagonalna), no kao što ćemo vidjeti nema svaki operator za sebe pridruženu dijagonalnu matricu, ali zato ima onu u Jordanovoj formi. Za Jordanovu matricu kažemo da je najljepša matrica u klasi sličnih matrica.

U prvom poglavlju rada definirani su osnovni pojmovi usko vezani za teoriju Jordanove forme te potrebni za njeno bolje razumijevanje, poput svojstvenih vrijednosti, karakterističnog i minimalnog polinoma matrice, dijagonalizacije matrice, Jordanovih lanaca te invarijantnih potprostora. Teorija vezana uz Jordanovu formu matrice predstavljena je u drugom poglavlju rada gdje je prvo vidljiva ideja i struktura Jordanove forme, zatim teoremi vezani za nju, način na koji ju pronalazimo i druge njene karakteristike.

1. Osnovni pojmovi

Kako bismo u potpunosti razumjeli Jordanovu formu matrice potrebno je razumjeti neke osnovne pojmove koji su objašnjeni u nastavku. Sve definicije, teoremi, propozicije i korolari preuzeti su iz [1, 2, 3, 4].
Neka je $A\colon X \to X$ linearni operator definiran na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru X nad poljem $\mathbb{F}$. Označit ćemo s $\mathbf{A}$ kvadratnu matricu pridruženu tom operatoru.

1.1. Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori

Definicija 1.1. *Neka je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $A\colon X \to X$ linearni operator. Za skalar $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ kažemo da je* ***svojstvena vrijednost*** *operatora A ako postoji vektor $x \in X$, $x \neq 0$, takav da je $Ax = \lambda_0 x$. Skup koji čine sve svojstvene vrijednosti operatora A se zove spektar (operatora A) i označava sa $\sigma(A)$.*

Vektor x iz definicije nazivamo **svojstveni vektor** koji je pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_0. Za svojstveni vektor x pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_0 je i αx, $\forall \alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \neq 0$ također svojstveni vektor pridružen istoj toj svojstvenoj vrijednosti. Dakle, svojstveni vektor nije jedinstven. Štoviše, za jednu svojstvenu vrijednost možemo imati više linearno nezavisnih svojstvenih vektora.
Za svaku svojstvenu vrijednost λ možemo promatrati potprostor $Ker(A - \lambda I)$ (jezgru operatora $A - \lambda I$). Lako primijećujemo:

$$(A - \lambda I)(x) = 0 \Rightarrow Ax = \lambda x. \tag{1}$$

Dakle, svaki vektor x, $x \neq 0$ koji pripada tom potprostoru je svojstveni vektor operatora A, odnosno x je svojstveni vektor ako i samo ako se nalazi u $Ker(A - \lambda I)$. Potprostor $Ker(A - \lambda I) = \{x \in X : Ax = \lambda x\}$ nazivamo **svojstveni potprostor** koji pripada svojstvenoj vrijednosti λ. Dimenzija svojstvenog potprostora naziva se **geometrijska kratnost**.

1.2. Karakteristični polinom

Svojstvene vrijednosti su oni skalari λ za koje je potprostor $Ker(A - \lambda I)$ netrivijalan tj. za koje jednadžba (1) ima netrivijalno riješenje. Tada operator $A - \lambda I$ mora biti singularan. Neka je matrica $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]$ matrica operatora A u nekoj bazi, te $\mathbf{I}$ jedinična matrica koja odgovara jediničnom opertoru I. Dakle, operatoru $A - \lambda I$ odgovara matrica $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$. Ta matrica mora biti singularna, što znači da njena determinanta mora biti jednaka 0:

$$\left|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\right| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Očito je ova determinanta polinom n-tog stupnja po varijabli λ s koeficijentima iz $\mathbb{F}$. Taj polinom nazivamo **svojstveni** ili **karakteristični polinom** operatora A tj. matrice $\mathbf{A}$ i označavamo ga s $\kappa_A(\lambda)$,

$$\kappa_A(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}).$$

On je oblika:

$$\kappa_A(\lambda) = \kappa_n \lambda^n + \kappa_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \kappa_0.$$

Jednadžbu

$$\kappa_A(\lambda) = 0$$

nazivamo **karakteristična jednadžba** matrice $\mathbf{A}$. Njena rješenja su svojstvene vrijednosti operatora A. Kratnost svojstvene vrijednosti nazivamo **algebarska kratnost**.

Propozicija 1.1 (vidjeti [4], Propozicija 1, poglavlje 10.6.). *U karakterističnom polinomu matrice A su koeficijenti:*

$$\kappa_n = (-1)^n, \ \kappa_{n-1} = (-1)^{n-1} tr\mathbf{A}, \ \kappa_0 = \det \mathbf{A}.$$

Uvedimo pojam sličnosti matrica i korolar vezan za njih.

Definicija 1.2. *Za kvadratne matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ istog reda kažemo da su slične ako postoji regularna matrica $\mathbf{S}$ tako da vrijedi:*

$$\mathbf{A} = \mathbf{S^{-1}BS}.$$

Korolar 1.1 (Vidjeti [4], Korolar 3, poglavlje 10.5.). *Neka su matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{A}'$ matrični zapisi istog linearnog operatora $A\colon X \to X$ u različitim bazama prostora X. Tada su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{A}'$ slične matrice, $\mathbf{A} \simeq \mathbf{A}'$.*

Propozicija 1.2 (vidjeti [4], Propozicija 2, poglavlje 10.6.). *Matrice koje su slične imaju jednak karakteristični polinom.*

Kada se u $\kappa_A(\lambda)$ uvrsti $\lambda = \mathbf{A}$ tako da je $\mathbf{A}$ kvadratna matrica reda n imamo tzv. matrični polinom $\kappa_A(\mathbf{A})$ koji je zapravo matrica n-tog reda. Kažemo da nultočka poništi svoj polinom tako što mu daje vrijednost 0 pa isto tako možemo reći da i matrica poništi svoj polinom tako što mu svojim uvrštavanjem daje nul-matricu. Na temelju toga vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 1.1 (**Hamilton - Cayley**; vidjeti [2], poglavlje 31.). *Svaka kvadratna matrica $\mathbf{A}$ poništava svoj karakteristični polinom, tj. vrijedi:*

$$\kappa_A(\mathbf{A}) = \left[0\right].$$

Primjenom Hamilton-Cayleyevog teorema možemo naći, ako postoji, inverz matrice $\mathbf{A}$ na način da jednadžbu $\kappa_A(\mathbf{A}) = \left[0\right]$ množimo s $\mathbf{A}^{-1}$.

1.3. Minimalni polinom

Iz Hamilton-Cayleyevog teorema znamo da uvijek postoji polinom n-tog stupnja kojeg poništi matrica $\mathbf{A}$ n-tog reda. Naime, za neke matrice postoje polinomi stupnja nižeg od stupnja karakterističnog polinoma (n) kojeg matrica $\mathbf{A}$ također poništi. Pronađimo polinom najmanjeg stupnja kojeg će ta matrica poništiti.

Postojanje polinoma kojeg $\mathbf{A}$ poništi ovisi o tome je li skup matrica od nulte do neke potencije matrice $\mathbf{A}$ nezavisan ili ne. Definirajmo potencije matrice $\mathbf{A}$: $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$ (jedinična matrica), $\mathbf{A}^1 = \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A^2}$ itd. sve do $\mathbf{A}^n$. Znamo da je skup koji sadrži jedan element različit od nule linearno nezavisan. Prema tome neka skup matrica ide od $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$ do $\mathbf{A}^n$. Skup $\{\mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \ldots, \mathbf{A}^n\}$ nije linearno nezavisan za svaki n. Neka postoji m, $1 \leq m \leq n$ takav da je skup $\{\mathbf{I}, \mathbf{A}, \ldots, \mathbf{A}^{m-1}\}$ linearno nezavisan, a skup $\{\mathbf{I}, \mathbf{A}, \ldots, \mathbf{A}^{m-1}, \mathbf{A}^m\}$ linearno zavisan. To znači da $\mathbf{A}^m$ možemo prikazati kao linearnu kombinaciju svojih prethodnika, $\mathbf{A}^m = \mu_1 \mathbf{A}^{m-1} + \mu_2 \mathbf{A}^{m-2} + \cdots + \mu \mathbf{I}$.

Označimo s μ_A polinom:

$$\mu_A(\lambda) = \lambda^m - \mu_1\lambda^{m-1} - \mu_2\lambda^{m-2} - \cdots - \mu_{m-1}\lambda - \mu_m.$$

Tada je

$$\mu_A(\mathbf{A}) = \left[0\right],$$

odnosno matrica **A** poništava taj polinom. Polinom μ_A nazivamo **minimalni polinom**.
Navedimo neka svojstva minimalnog polinoma.
Za sljedeće propozicije vidjeti [2], poglavlje 32.

Propozicija 1.3. *Ne postoji polinom kojeg matrica* **A** *poništi, a čiji bi stupanj bio niži od stupnja minimalnog polinoma.*

Propozicija 1.4. *Ne postoji normiran polinom kojeg matrica* **A** *poništi koji bi imao stupanj jednak stupnju minimalnog polinoma, a koji bi bio od njega različit.*

Propozicija 1.5. *Svaki polinom P stupnja $p > m$ kojeg matrica* **A** *poništi djeljiv je s μ_A.*

Propozicija 1.6. *Nultočke karakterističnog polinoma su i nultočke minimalnog polinoma.*

Dakle, karakteristični i minimalni polinom imaju iste nultočke koje se mogu razlikovati u svojoj kratnosti.

$$\mu_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{p_s}$$
$$\kappa_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{r_s}$$

gdje je $p_1 + \cdots + p_s = m$ i $r_1 + \cdots + r_s = n, \ m \leq n, \ p_j \leq r_j, \ j = 1, \ldots, s.$

Propozicija 1.7. *Slične matrice imaju isti minimalni polinom.*

1.4. Dijagonalizacija operatora

Najjednostavniji matrični zapis linearnog operatora je dijagonalna matrica. To je matrica oblika:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Dakle, to je matrica koja na glavnoj dijagonali ima svojstvene vrijednosti dok su svi ostali elementi jednaki 0. Nije moguće svaki operator svesti na dijagonalnu matricu pa pogledajmo uz koje uvjete je to moguće i kako. Moramo pronaći bazu za prostor X u kojoj će se operator A moći prikazati u obliku dijagonalne matrice ako je to moguće.

Teorem 1.2 (vidjeti [3], Teorem 9.2.)**.** *Operator $A\colon X \to X$ se može dijagonalizirati ako i samo ako postoji baza koju čine svojstveni vektori operatora A.*

Budući da su svojstveni vektori koji pripadaju različitim svojstvenim vrijednostima međusobno linearno nezavisni vrijedi sljedeći korolar.

Korolar 1.2 (vidjeti [4], Korolar 3, poglavlje 10.10.)**.** *Ako operator A ima n različitih svojstvenih vrijednosti pri čemu je dimenzija od X jednaka n, onda se A može dijagonalizirati.*

U prijevodu, operator se može dijagonalizirati ako su mu algebarske i geometrijske kratnosti svake svojstvene vrijednosti jednake. Taj korolar nam predstavlja dovoljan, ali ne i nužan uvjet o prepoznavanju operatora koji se mogu dijagonalizirati.

Teorem 1.3 (Vidjeti [4], Teorem 4, poglavlje 10.10.). *Da bi linearni operator dopuštao dijagonalizaciju, nužan i dovoljan uvjet je da se njegov minimalni polinom može prikazati u obliku produkta međusobno različitih faktora s koeficijentima iz pripadnog polja.*

Postupak dijagonalizacije operatora:
Neka je $\mathbf{A}$ matrica operatora $A\colon X \to X$ u nekoj bazi od X te $dimX = n$.

1. Odredimo svojstvene vrijednosti operatora A.
2. Odredimo maksimalan skup l linearno nezavisnih vektora $x_1, x_2, \ldots, x_l$ operatora A.
3. Za slučaj kada je $l < n$ A se ne može dijagonalizirati.
4. Za slučaj $l = n$ određujemo matricu prijelaza $\mathbf{P}$ iz početne baze u bazu koju čine svojstveni vektori operatora.
5. Matrica operatora A u bazi svojstvenih vektora je dana s:
$$\mathbf{PAP^{-1}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$
gdje su $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ svojstvene vrijednosti operatora A.

Kao što smo rekli, ne može se svaka matrica dijagonalizirati, ali zato se svaka može svesti na gornje-trokutastu matricu.

Teorem 1.4 (vidjeti [3], Teorem 9.3.). *Za svaku matricu* $\mathbf{A}$ *postoji matrica* $\mathbf{B}$ *takva da je* $\mathbf{T} := \mathbf{B^{-1}AB}$ *gornje trokutasta matrica.*

1.5. Jordanovi lanci

Neka X predstavlja konačnodimenzionalni vektorski prostor $\mathbb{C}^n$ te neka je $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$. Baza u kojoj će operator A imati Jordanovu formu sadrži i svojstvene vektore, ali je sastavljena od tzv. Jordanovih lanaca.

Definicija 1.3. ***Jordanov lanac*** *pridružen svojstvenoj vrijednosti* λ_i, $i = 1, \ldots, k$ *je skup vektora* $x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(m_i)}$, *gdje je* m_i *kratnost svojstvene vrijednosti* λ_i, *koji su različiti od nul-vektora te za koje vrijedi:*

$$Ax_i^{(k)} = \lambda_i x_i^{(k)} + x_i^{(k-1)}, \quad k = 1, \ldots, m_i.$$

Uzimamo $x_i^{(0)} = 0$. To znači da vrijedi:

$$\lambda_i \neq 0 \begin{cases} Ax_i^{(1)} = \lambda_i x_i^{(1)} + x_i^{(0)} = \lambda_i x_i^{(1)} \\ Ax_i^{(2)} = \lambda_i x_i^{(2)} + x_i^{(1)} \\ \vdots \\ Ax_i^{(m_i)} = \lambda_i x_i^{(m_i)} + x_i^{(m_i-1)} \end{cases} \qquad \lambda_i = 0 \begin{cases} Ax_i^{(1)} = x_i^{(0)} = 0 \\ Ax_i^{(2)} = x_i^{(1)} \\ \vdots \\ Ax_i^{(m_i)} = x_i^{(m_i-1)} \end{cases}$$

Uočimo da to nisu nužno svojstveni vektori. Za $\lambda = 0$ je vektor $x^{(1)}$ u jezgri operatora A. On je također i svojstveni vektor (i za $\lambda \neq 0$) te njime počinje lanac. Ostali vektori $x^{(l)}$, $l > 1$ nisu u jezgri. Iz suprotne tvrdnje bi slijedilo da je $x^{(l-1)} = 0$ što je suprotno pretpostavci. Za $\lambda = 0$ gdje je $1 \leq l \leq m-1$ vektor $x^{(l)}$ se nalazi u slici operatora A. Za $\lambda \neq 0$ svi vektori $x^{(l)}$ za koje je $l > 1$ su u slici operatora A.

1.6. Invarijantni potprostori

Definicija 1.4. *Neka je $A\colon X \to X$ linearni operator. Kažemo da je potprostor $Y \subseteq X$* **A-*invarijantan*** *potprostor od X ako $\vec{y} \in Y$ povlači $A(\vec{y}) \in Y$.*

Dakle, možemo reći da je Y A-invarijantan potprostor ako vrijedi: $A(Y) \subset Y$. U tom slučaju, restrikcija $\tilde{A} = A|Y$ je linearni operator $\tilde{A}\colon Y \to Y$ koji je reduciran operatorom A. Primjeri invarijantnih potprostora su $KerA$, ImA, svojstveni potprostor koji pripada jednoj svojstvenoj vrijednosti λ, trivijalni invarijantni potprostori ($Y = X$ te $Y = \{\emptyset\}$),...
Operator je *reducibilan* ako ima i invarijantne potprostore koji su netrivijalni.
Uvedimo pojam direktne sume operatora.

Definicija 1.5. *Neka su Y i Z potprostori vektorskog prostora X. Kažemo da je suma potprostora Y i Z* ***direktna*** *i označavamo ju s $Y \oplus Z$ ako je $Y \cap Z = \{\emptyset\}$.*

Operator može dopuštati i više invarijantnih potprostora. Neka su npr. $Y < X$ i $Z < X$ invarijantni potprostori operatora A te vrijedi:

$$Y \oplus Z = X.$$

Iz navedenog slijedi propozicija:

Propozicija 1.8 (vidjeti [4], Propozicija 1, poglavlje 10.8.)**.** *Linearni operator potpuno je određen operatorima koje inducira na direktnim sumandima prostora X.*

Neka su A_1 i A_2 linearni operatori koji dijeluju na direktnim sumandima Y i Z takvima da je $A|Y = A_1$ i $A|Z = A_2$. Tada je operator $A\colon X \to X$ jednoznačno određen, odnosno $A = A_1 \oplus A_2$. Taj operator, koji sadrži netrivijalne invarijantne potprostore koji u sumi daju cijeli prostor, je *potpuno reducibilan.*

2. Jordanova forma matrice

Sljedeća teorija preuzeta je iz [2, 3, 4, 5, 6, 7]. U ovom poglavlju uzimamo da je za operator $A\colon X \to X$ vektorski prostor X isključivo nad poljem $\mathbb{C}$. Operator A ima pridruženu matricu $\mathbf{A}$ n-tog reda.

Promotrimo slične matrice. Ono što je nama zanimljivo je da slične matrice imaju iste svojstvene vrijednosti s jednakim algebarskim i geometrijskim kratnostima, isti karakteristični i minimalni polinom, rang, defekt, trag, determinantu. Na primjer, rang linearnog operatora je rang bilo koje njemu pridružene matrice jer su sve njemu pridružene matrice jedna s drugom slične te zato imaju isti rang. Isto vrijedi i za ostala navedena svojstva.
Slične matrice ne moraju naizgled biti slične. One zapravo mogu izgledati potpuno različito dok se neke matrice mogu razlikovati samo u pojedinim elementima, a ne biti slične.
Kako bi iz operatora mogli lakše vidjeti bitna svojstva, odnosno invarijantne linearnog operatora[1] kao što su rang, trag, determinanta itd., cilj nam je operator prikazati u što jednostavnijem matričnom zapisu. Dakle, moramo naći bazu u kojoj će operator imati što jednostavniji zapis u obliku matrice. Ako već imamo neku matricu koja je pridružena tom operatoru, moramo naći njoj sličnu matricu koja će biti što jednostavnijeg oblika. Najjednostavniji zapis je u obliku dijagonalne matrice koja na glavnoj dijagonali sadrži svojstvene vrijednosti operatora. Nažalost, nema svaki operator pridruženu dijagonalnu matricu. Npr. kada je svojstvena vrijednost višestruka, njen pridružen svojstveni potprostor može biti manje dimenzije od njene kratnosti. U tom slučaju se operator ne može prikazati u obliku dijagonalne matrice pa tražimo blok-dijagonalnu matricu takvu da blokovi budu što jednostavnije strukture. Taj oblik matrice nazivamo **Jordanova forma matrice** ($\mathbf{J}$), a blokove na glavnoj dijagonali **Jordanovi blokovi**($J(\lambda)$).

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J(\lambda_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J(\lambda_2) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & J(\lambda_k) \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Svaki Jordanov blok $J(\lambda_i)$ je kvadratna matrica m_i-tog reda koja odgovara jednoj svojstvenoj vrijednosti $\lambda_i,\ i = 1, \ldots, k$, gdje je m_i kratnost te svojstvene vrijednosti. Jordanov blok je i sam dijagonalna matrica specijalnog oblika, tj. matrica koja na glavnoj dijagonali ima tzv. Jordanove klijetke možda različitih redova, ali pridružene istoj svojstvenoj vrijednosti,

$$\mathbf{J}(\lambda_\mathbf{i}) = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & J_s \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Jordanova forma (2) će se pojaviti za karakteristični polinom matrice $\mathbf{A}$ koji je oblika:

$$\kappa_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}.$$

Tada je Jordanov blok $J(\lambda_1)$ reda m_1, $J(\lambda_2)$ reda m_2, ..., $J(\lambda_k)$ reda m_k.
Vrijedi $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$ gdje je n dimenzija operatora A, odnosno red matrice $\mathbf{A}$.

[1]svojstva koja možemo pročitati iz matričnog zapisa, a koja ne ovise o izboru baze

Elementarna Jordanova klijetka pridružena svojstvenoj vrijednosti λ_i je matrica:

$$\mathbf{J}_{\lambda_\mathbf{i},\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Ta matrica na glavnoj dijagonali ima svojstvenu vrijednost λ_i, dok na gornjoj sporednoj dijagonali ima jedinice, a na svim ostalim mjestima su nule. Obično Jordanove klijetke jedne svojstvene vrijednosti u Jordanovom bloku poredamo od najvećeg do najmanjeg reda. Redove najvećih Jordanovih klijetki vidimo iz minimalnog polinoma naše matrice $\mathbf{A}$. Neka je minimalan polinom oblika:

$$\mu(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1}(\lambda - \lambda_2)^{r_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{r_k},$$

pri čemu naravno vrijedi: $r_1 \leq m_1, r_2 \leq m_2, \ldots, r_k \leq m_k$. Tada su najveće Jordanove klijetke redova $r_1, r_2, \ldots, r_k$.

Broj elemenetarnih Jordanovih klijetki u jednom Jordanovom bloku pridruženom svojstvenoj vrijednosti λ_i odgovara geometrijskoj kratnosti od λ_i, dok suma redova svih elementarnih Jordanovih klijetki u Jordanovom bloku odgovara algebarskoj kratnosti od λ_i. Posebno, kada je algebarska vrijednost jednaka geometrijskoj vrijednosti, matrica (2) će biti dijagonalna.

Primjer 2.1. *Neka je dan karakteristični polinom nekog operatora:*

$$\kappa(\lambda) = (\lambda - 2)^3.$$

Njena Jordanova forma će biti jednog od sljedećih oblika:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

a točno kojeg je oblika ovisi o njenom minimlanom polinomu.

$$\mu(\lambda) = (\lambda - 2)^3 \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mu(\lambda) = (\lambda - 2)^2 \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \;\textit{ili}\; \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mu(\lambda) = (\lambda - 2)^1 \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Naime, kod matrica koje su reda većeg od tri, za definiranje Jordanove forme nisu nam dovoljni karakteristični i minimalni polinom.

Primjer 2.2. *Iz zadane matrice u Jordanovoj formi odredimo Jordanove blokove i elementarne Jordanove klijetke te njen pridruženi karakteristični i minimalni polinom.*

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Jordanovi blokovi su:

$$\mathbf{J}(5) = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad i \quad \mathbf{J}(-1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Jordanove klijetke su:

$$\mathbf{J_{5,1}} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J_{5,2}} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J_{-1,1}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad i \quad \mathbf{J_{-1,2}} = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}.$$

Uočimo da je dana Jordanova forma tog oblika kada je njen karakteristični polinom:

$$\kappa(\lambda) = (\lambda - 5)^5(\lambda + 1)^3.$$

Na temelju veze reda najveće Jordanove klijetke i kratnošću svojstvene vrijednosti, minimalni polinom glasi:

$$\mu(\lambda) = (\lambda - 5)^3(\lambda + 1)^2.$$

Uočimo da kada bismo raspisali Jordanove klijetke i Jordanove blokove kao što je to u matrici $\mathbf{J}$ u prethodnom primjeru, imali bismo da je Jordanova matrica $\mathbf{J}$ zapravo specijalni oblik gornje-trokutaste matrice. Jordanov blok je tada isto gornje-trokutasta matrica koja na mjestima iznad glavne dijagonale može imati ili 0 ili 1, ovisno o dimenzijama Jordanovih klijetki.
U slučaju kada su sve svojstvene vrijednosti različite, Jordanova matrica je tada dijagonalna matrica, a svi Jordanovi blokovi su reda 1, odnosno $J(\lambda_i) = \lambda_i$. Problem dijagonalizacije je dakle, specijalan slučaj nalaženja Jordanove forme, tj. Jordanova matrica je generalizacija dijagonalne matrice.

Sljedeći teorem nam govori o postojanju Jordanove forme za svaku matricu.

Teorem 2.1 (vidjeti [4], Teorem 6, poglavlje 10.10.). *Svaka kvadratna matrica nad algebarskim zatvorenim poljem*[2] *(posebno $\mathbb{C}$) je slična nekoj Jordanovoj matrici nad tim istim poljem. Ta Jordanova forma je jedinstvena do na poredak Jordanovih blokova na dijagonali.*

[2]polje u kojemu svaki nekonstantni polinom jedne varijable s koeficijentima iz toga polja ima korijen u tome polju

Ovaj teorem je egzistencijalne prirode i on nam govori da se svaka matrica može prikazati u obliku Jordanove forme na jedinstven način.

Isti teorem za operatore glasi:

Teorem 2.2 (Vidjeti [4], Teorem 7, poglavlje 10.10.). *Neka je A operator koji je definiran na prostoru X nad algebarski zatvorenim poljem. Tada postoji baza u prostoru X u kojoj je operator A prikazan Jordanovom matricom.*

Dok teoremi 2.1 i 2.2 govore o egzistenciji Jordanove forme, sljedeći dio je konstruktivnog karaktera. Objašnjava nam kako doći do naše Jordanove forme.
Definirali smo Jordanove lance, te rekli da će upravo oni činiti bazu prostora X u kojoj operator, odnosno matrica ima Jordanovu formu.
Sljedeći teorem vrlo je bitan.

Teorem 2.3 (vidjeti [2], poglavlje 35.). *Svaki potprostor Y koji je invarijantan na linearni operator A definiran na $\mathbb{C}^n$ sadrži barem jedan svojstveni vektor operatora A tj. njemu pridružene matrice* $\mathbf{A}$.

Dokaz. Neka je $\{\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m\}$ baza za prostor Y. Neka je $\{\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m, \vec{x}_{m+1}, \dots, \vec{x}_n\}$ baza za $\mathbb{C}^n$.
Uzmimo da je Q matrica koja ima stupce $\vec{y}_j,\ j = 1, \dots, m$.
$A\vec{y}_j$ je iz prostora W pa vrijedi:

$$A\vec{y}_j = \alpha_1\vec{y}_1 + \dots + \alpha_{m_j}\vec{y}_m.$$

Iz $Q^{-1}Q = I$ slijedi:

$$Q^{-1}\vec{y}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, j = 1, \dots, m$$

tako da je jedinica u j-tom retku. Slijedi:

$$Q^{-1}A\vec{y}_j = \begin{bmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1m} & \\ \vdots & E & \vdots & F \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mm} & \\ & & & \\ & 0 & & G \end{bmatrix}$$

Transformacija koja je određena s E na $\mathbb{C}^m$ sadrži barem jedan svojsteni vektor $\vec{v} = (v_1, \dots, v_m)$. Slijedi da $Q^{-1}AQ$ ima svojstveni vektor $\vec{w}$:

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \\ 0 \end{bmatrix} \implies Q^{-1}AQ\vec{w} = \lambda\vec{w} \Rightarrow AQ\vec{w} = \lambda Q\vec{w}.$$

Znači, $Q\vec{w} = v_1\vec{w}_1 + \cdots + v_m\vec{w}_m$ je svojstveni vektor od A iz potprostora Y.

$\square$

Propozicija 2.1 (vidjeti [2], poglavlje 34.). *Ako svaki A-invarijantni potprostor od X sadrži barem jedan svojstveni vektor onda X ima bazu od Jordanovih lanaca za operator A.*

Znamo da postoji baza konačnodimenzionalnog prostora X koja se sastoji od unije vektora iz disjunktnih Jordanovih lanaca:

$$\begin{array}{l} x_1^{(1)}, \ldots, x_1^{(m_1)} \text{ pripada svojstvenoj vrijednosti } \lambda_1 \\ x_2^{(2)}, \ldots, x_2^{(m_2)} \text{ pripada svojstvenoj vrijednosti } \lambda_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ x_k^{(1)}, \ldots, x_k^{(m_k)} \text{ pripada svojstvenoj vrijednosti } \lambda_k, \end{array}$$

gdje se neke svojstvene vrijednosti mogu ponavljati više puta, vrijedi: $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$. Sastavimo matricu $\mathbf{P}$ od stupaca $x_1^{(1)}, \ldots x_1^{(m_1)}, \ldots, x_k^{(m_k)}$. Tada vrijedi:

$$\mathbf{AP} = \mathbf{PJ}.$$

Transformacijom dobivamo

$$\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}.$$

Matricu $\mathbf{A}$ sveli smo na $\mathbf{J}$ koja je u Jordanovoj formi.

Primjer 2.3. *Odredimo Jordanovu formu za operator kojemu je pridružena matrica:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Najprije trebamo odrediti Jordanove lance. Karakteristični polinom matrice $\mathbf{A}$ *je:*

$$\kappa_A(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (3 - \lambda)^3.$$

Dakle, $\lambda_{123} = 3,\ k = 1,\ m_i = 3.$ *Za elemente Jordanovog lanca uzimamo:*

$$x_1^{(1)} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}, \quad x_1^{(2)} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}, \quad x_1^{(3)} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}x_1^{(1)} &= \lambda_1 x_1^{(1)} + x_1^{(0)} = 3x_1^{(1)} \\ \mathbf{A}x_1^{(2)} &= \lambda_1 x_1^{(2)} + x_1^{(1)} = 3x_1^{(2)} + x_1^{(1)} \\ \mathbf{A}x_1^{(3)} &= \lambda_1 x_1^{(3)} + x_1^{(2)} = 3x_1^{(3)} + x_1^{(2)} \end{aligned}$$

Iz jednadžbi tražimo Jordanove lance. Prvi član Jordanovog lanca.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\alpha_1 \\ 3\alpha_2 \\ 3\alpha_3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 0,\ \alpha_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Neka je npr. $\alpha_1 = 1,\ x_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$

Nađimo drugi član Jordanovog lanca.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\beta_1 \\ 3\beta_2 \\ 3\beta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \beta_2 = 0,\ \beta_3 = \frac{1}{2},\ \beta_1 \in \mathbb{R}$$

Uzmimo $\beta_1 = 0,\ x_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$

Preostalo nam je naći posljednji član.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\gamma_1 \\ 3\gamma_2 \\ 3\gamma_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \gamma_2 = \frac{1}{2},\ \gamma_3 = -\frac{1}{4},\ \gamma_1 \in \mathbb{R}$$

Neka je $\gamma_1 = 0,\ x_1^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}.$

Jordanov lanac je:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \right\}.$$

Dakle matrica **P** *izgleda ovako:*

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Njen inverz je:

$$\mathbf{P^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nađimo sada Jordanovu formu.

$$\mathbf{J} = \mathbf{P^{-1}AP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Promotrimo malo detaljnije jedinstvenost Jordanove forme.
Kada tražimo bazu u kojoj matrica **A** ima Jordanovu formu, osnovni podatak je do koje mjere je ta forma jedinstvena. Unutar Jordanove matrice moguć je svaki poredak Jordanovih blokova, a on ovisi o tome po kojem redu uzimamo svojstvene vrijednosti. Također, u Jordanovom bloku možemo imati različit redoslijed elementarnih Jordanovih klijetki. Poredak elementarnih Jordanovih klijetki unutar Jordanovog lanca je određen redosljedom lanaca koji su pridruženi elementarnim Jordanovim klijetkama. Za svaku svojstvenu vrijednost imamo jedinstveno određen broj Jordanovih lanaca duljine m. Broj elementarnih Jordanovih klijetki koje su određene duljine u Jordanovom bloku ne ovisi o

poretku lanaca.

Promatramo matricu $\mathbf{A}$ te jednu njenu svojstvenu vrijednost označimo s λ. Definirajmo matricu $\mathbf{S} = \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:

a) Broj lanaca koji su dugački barem m ima

$$\dim(KerS \cap ImS^{m-1}).$$

b) Broj lanaca koji su točno duljine m ima

$$\dim(KerS \cap ImS^{m-1}) - \dim(KerS \cap ImS^{m}).$$

c) Kratnost svojstvene vrijednosti regulira duljinu lanca.

Kao što je već rečeno, Jordanova forma je korisna u promatranju matričnih svojstava. Međutim, problemi se javljaju kod numeričkog računanja Jordanove forme pa se tada ona mora pažljivo koristiti. Može doći do promjene tipa Jordanove forme. Npr., Jordanov blok se može raspasti na niz manjih, višestruke svojstvene vrijednosti se mogu raspasti u nekoliko bliskih jednostrukih itd. To se događa zbog sitnih grešaka koje nastaju zbog nepreciznosti mjerenja ili zaokruživanjem konačnosti računalne aritmetike. Radi toga se Jordanova forma izbjegava u numeričkom računanju. U tom slučaju se koristi tzv. *Schurova dekompozicija.*
Na primjer, neka je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \delta & 1 \end{bmatrix}.$$

Za $\delta = 0$ $\mathbf{A}$ je Jordanova matrica. Kada je $\delta \neq 0$, a jako blisko 0, Jordanova forma je tada:

$$\begin{bmatrix} 1+\sqrt{\delta} & 1 \\ 0 & 1-\sqrt{\delta} \end{bmatrix}.$$

Jordanova forma nam je bitna kod **matričnih funkcija** jer znamo li Jordanovu formu, možemo napisati njihov opći oblik.
Neka je $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ spektar matrice $\mathbf{A}$ i g neka elementarna kompleksna funkcija koja je definirana u svakoj točki spektra. Uzmimo da je $\mathbf{P}$ matrica koja matricu $\mathbf{A}$ svodi na Jordanovu matricu $\mathbf{J}$;

$$\mathbf{A} = \mathbf{PJP^{-1}}.$$

Tada ćemo definirati matričnu funkciju na sljedeći način:

$$g(\mathbf{A}) = \mathbf{P}g(\mathbf{J})\mathbf{P}^{-1}.$$

$\mathbf{J}$ je blok-dijagonalna matrica, pa će i $g(\mathbf{J})$ biti blok-dijagonalna matrica:

$$g(\mathbf{J}) = \begin{bmatrix} g(\mathbf{J}(\lambda_1)) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g(\mathbf{J}(\lambda_2)) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & g(\mathbf{J}(\lambda_k)) \end{bmatrix},$$

a svaki blok matrične funkcije izgleda ovako:

$$g(\mathbf{J}(\lambda)) = \begin{bmatrix} g(\mathbf{J_1}) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g(\mathbf{J_2}) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & g(\mathbf{J_m}) \end{bmatrix}.$$

Elemenetarna Jordanova klijetka se definira na način:

$$g(\mathbf{J_1}) = \begin{bmatrix} g(\lambda) & g'(\lambda) & \frac{1}{2!}g''(\lambda) & \frac{1}{3!}g'''(\lambda) & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}g^{(n-1)}(\lambda) \\ 0 & g(\lambda) & g'(\lambda) & \frac{1}{2!}g''(\lambda) & \cdots & \frac{1}{(n-2)!}g^{(n-2)}(\lambda) \\ 0 & 0 & g(\lambda) & g'(\lambda) & \cdots & \frac{1}{(n-3)!}g^{(n-3)}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & g(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Definicija je ta jer takva formula vrijedi kada je g polinom. Zbog toga nam je u redu uzeti tu istu formulu u definiciji matrične funkcije kada je g neka po volji odabrana funkcija.

Literatura

[1] D. BAKIĆ, *Linearna algebra*, Školska knjiga, d.d., Zagreb, 2008.

[2] D. BUTKOVIĆ, *Predavanja iz linearne algebre*, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek, 2008.

[3] N. ELEZOVIĆ, *Linearna algebra* , Element, Zagreb, 2006.

[4] K. HORVATIĆ, *Linearna algebra*, PMF - Matematički odjel Sveučilište u Zagrebu, 2004.

[5] `https://en.wikipedia.org/wiki/Jordan_normal_form`

[6] `http://marjan.fesb.hr/~borka/files/PRED-3-LA-07.pdf`

[7] `http://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/BOR50.pdf`

[8] `https://hrcak.srce.hr/file/121553`