# Krivulje i plohe drugog reda

**Knežević, Barbara**

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

**Barbara Knežević**

# Krivulje i plohe drugog reda

Završni rad

Osijek, 2023.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

**Barbara Knežević**

# Krivulje i plohe drugog reda

Završni rad

Voditelj: doc. dr. sc. Ljiljana Primorac Gajčić

Osijek, 2023.

## Sažetak:

Tema ovoga završnoga rada su krivulje, odnosno plohe drugog reda promatrane s aspekta analitičke geometrije. Navedene su definicije krivulja drugog reda, tj. kružnice, elipse, parabole i hiperbole, te sfere, elipsoida, eliptičkog paraboloida, jednoplošnog i dvoplošnog hiperboloida. Svaka promatrana krivulja, odnosno ploha je grafički prikazana, dan je pregled osnovnih obilježja te je iskazana odgovarajuća jednadžba kojom se krivulja, odnosno ploha zadaje.



**Ključne riječi:**

krivulje drugog reda, kružnica, elipsa, parabola, hiperbola, plohe drugog reda, sfera, elipsoid, paraboloid, hiperboloid


## Curves and surfaces of the second order


## Abstract:

The topic of this final thesis are curves and surfaces of the second order viewed from the aspect of analytical geometry. Definitions of some second-order curves, respectively surfaces are given, i.e. circles, ellipses, parabolas and hyperbolas, spheres, ellipsoids, elliptical paraboloids, one-sheeted and two-sheeted hyperboloids. Each observed curve or surface is graphically displayed and the corresponding equation is given. We will also show an overview of basic characteristics for each curve, respectively surface.



**Key words:**

curves of the second order, circle, ellipse, parabola, hyperbola, surfaces of the second order, sphere, ellipsoid, paraboloid, hyperboloid

# Sadržaj

# Uvod

Krivulje drugog reda ili konike jedne su od prvih proučavanih krivulja. Radove o njima pisali su još stari Grci, pripadnici Platonove akademije. Prvi izvori sežu još u 4. st. prije Krista, spominje ih grčki matematičar Menehmo, prilikom rješavanja Delskog problema. Tek stotinjak godina kasnije grčki matematičar Apolonije iz Perge, napisao je opširnu studiju o krivuljama drugog reda, i to samo geometrijskim pristupom, te je uveo nazive koje i danas rabimo. Njegovo djelo pod nazivom "Konike" po prvi puta kružnicu, elipsu, parabolu i hiperbolu prikazuje kao ravninske presjeke kružnog stošca pod određenim kutom, zato se u hrvatskom jeziku nazivaju i čunjosječnice. Trebalo je proći gotovo dva tisućljeća da bi matematičari bolje shvatili krivulje drugog reda povezivanjem algebarskih i geometrijskih tehnika.

U ovom radu razmatramo krivulje i plohe drugog reda. U prvom poglavlju ovoga rada navode se svojstva četiri osnovna oblika krivulja drugog reda, iskazuju se njihove definicije i formule, te se prikazuju njihove slike u koordinatnom sustavu. U drugom poglavlju ovog rada navode se svojstva pet osnovih oblika ploha drugog reda, te također njihove definicije, formule i slike.

# 1. Krivulje drugog reda

Krivulja drugog reda je skup svih točaka dvodimenzionalnog prostora za koje je sljedeća jednadžba zadovoljena

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Cy + F = 0. \tag{1}$$

## 1.1. Kružnica

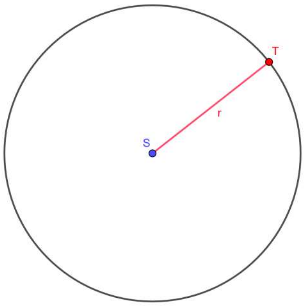
Kružnica spada u krivulje drugog reda koje nazivamo čunjosječnice. Naziv je dobila zato što ju dobijemo kao presjek stošca i ravnine paralelne s bilo kojom bazom stošca.

Sljedeća definicija je preuzeta iz [2].

**Definicija 1.** *Kružnica je skup svih točaka u ravnini $\pi$ jednako udaljenih od čvrste točke u ravnini.*

$S$ se naziva **središte** ili **centar** kružnice, a udaljenost $r$ naziva se **radijus** ili **polumjer**. Kraće, radi se o skupu $K$ koji je definiran na sljedeći način

$$K = \{T \in \pi : d(S,T) = r\}.$$

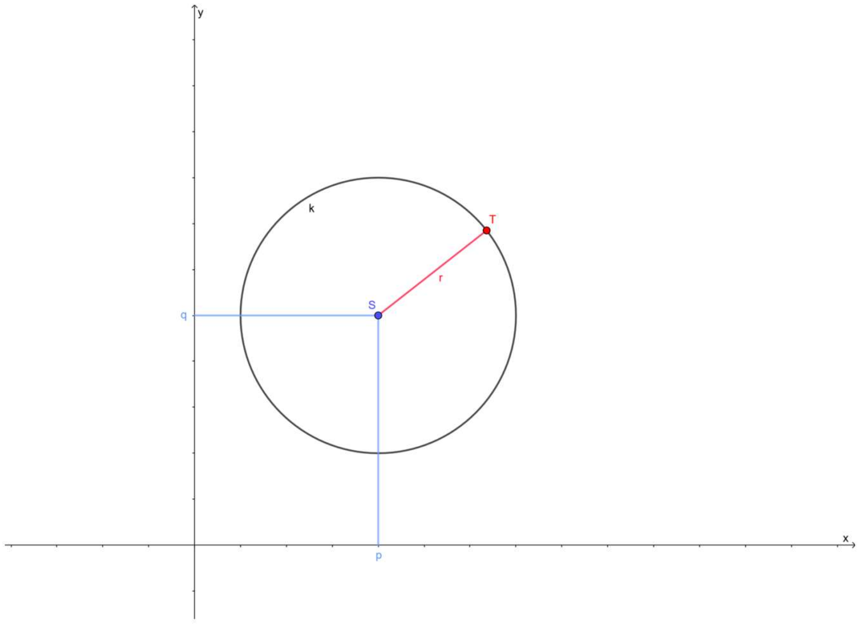



Slika 1: Kružnica sa središtem S i polumjerom r

Svaka točka $T = (x, y)$, kružnice $k(S, r)$, jednako je udaljena od središta kružnice $S(p, q)$ te je ta udaljenost jednaka duljini polumjera $r$, tj. $d(S,T) = r$.

Jednadžba kružnice $k(S, r)$ sa središtem u točki $S = (p, q)$ i polumjerom $r$ je

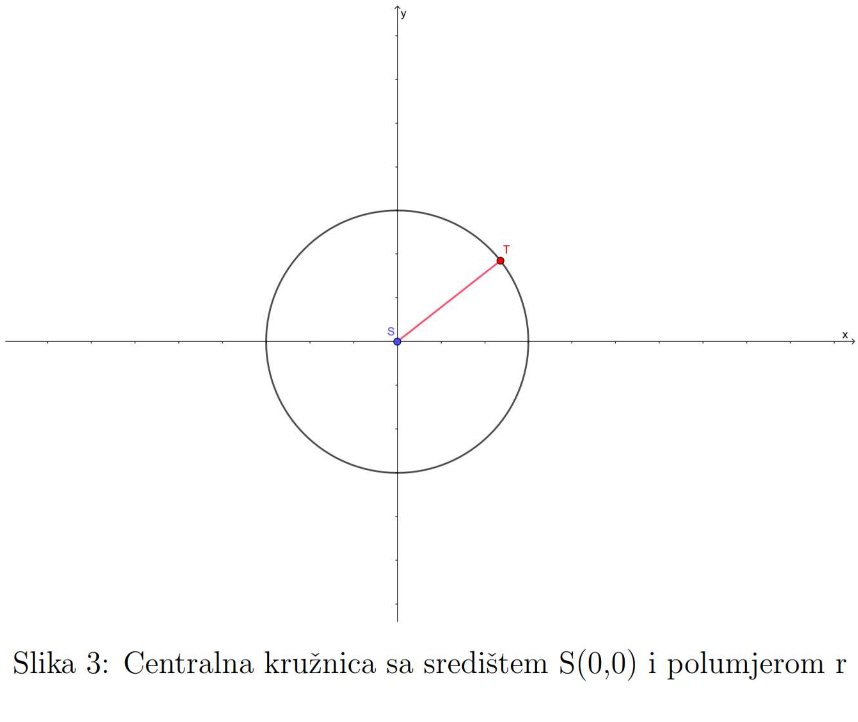
$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2. \tag{2}$$




Slika 2: Kružnica sa središtem S(p,q) i polumjerom r

Posebno, ako se središte kružnice nalazi u ishodištu koordinatnog sustava, jednadžba (2) je jednadžba centralne kružnice te pišemo

$$x^2 + y^2 = r. \tag{3}$$




Slika 3: Centralna kružnica sa središtem S(0,0) i polumjerom r

## 1.2. Elipsa

Elipsu dobijemo kao rezlutat presjeka ravnine i stošca, pri čemu ravnina nije paralelna niti s jednom izvodnicom stošca i ne prolazi vrhom stošca.

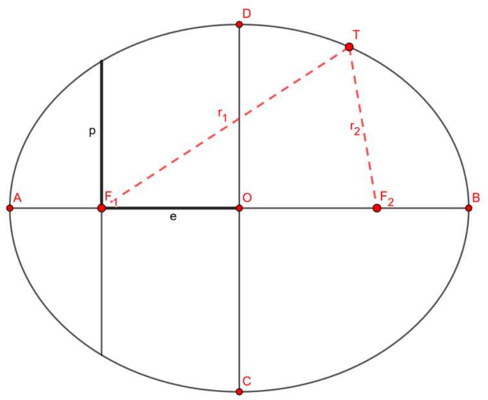
Sljedeća definicija preuzeta je iz [6].

**Definicija 2.** *Neka su $F_1$ i $F_2$ dvije različite fiksne točke ravnine $\pi$ i neka je $|F_1F_2| = 2e$, te neka je a pozitivan realni broj takav da je $a > e$. Elipsa je skup svih točaka ravnine za koje je zbroj udaljenosti od točaka $F_1$ i $F_2$ stalan i jednak $2a$.*

Kraće zapisano to je skup točaka definiran kao

$$E = \{T \in \pi; |F_1T| + |F_2T| = 2a\}.$$

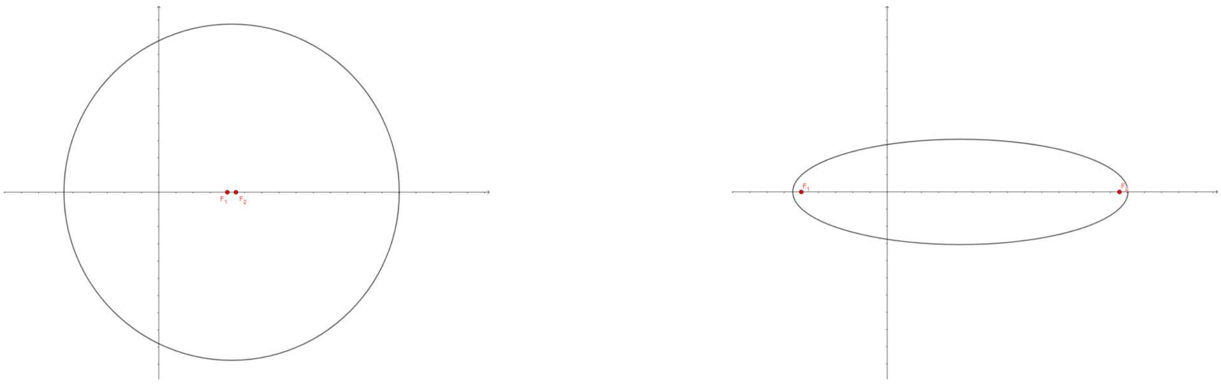
Točke $F_1$ i $F_2$ zovu se **fokusi** ili **žarišta** elipse. Kažemo da je **radijvektor** točke T dužina koja spaja žarište s bilo kojom točkom T elipse.
Polovište dužine $\overline{F_1F_2}$ zovemo **središte** elipse i označavamo s O.
Pravac $F_1F_2$ siječe elipsu u točkama $A$ i $B$, a simetrala dužine $\overline{F_1F_2}$ siječe elipsu u točkama $C$ i $D$. Točke $A$, $B$, $C$ i $D$ zovemo **tjemena** elipse, dužina $\overline{AB}$ naziva se glavna ili velika os elipse, a dužina $\overline{CD}$ sporedna ili mala osi elipse. $\overline{OA}$ i $\overline{OB}$ zovemo velike poluosi, a dužine $\overline{OC}$ i $\overline{OD}$ malim poluosima. Duljina velike poluosi jednaka je $a$ pa je duljina velike osi jednaka je $2a$. Duljina male poluosi jednaka je $b$.




Slika 4: Elipsa sa žarištima $F_1$ i $F_2$

Ako su nam $F_1$ i $F_2$ iste točke, slijedi da je $e = 0$, tada dobivamo skup točaka koje su jednako udaljene od te fiksne točke čime je određena kružnica.
Broj $e$ nazivamo **linearni ekscentricitet** elipse, on predstavlja polovicu udaljenosti između žarišta $e = \frac{1}{2}|F_1F_2|$, $e < a$, a broj $\epsilon$, $0 < \epsilon < 1$, nazivamo **numerički ekscentricitet**.

Numerički ekscentricitet karakterizira oblik elipse u tom smislu što su elipse s jednakim numeričkim ekscentricitetom međusobno slične. Linearni i numerički ekscentricitet vezani su relacijom $e = a\epsilon$. Što je $\epsilon$ je bliži 0, to je elipsa bliža kružnici, tj. kružnica ima numerički ekcentricitet jednak 0. Ako je numerički ekcentricitet blizak 1 tada je elipsa jako spljoštena.



$\epsilon = 0.025$ $\epsilon = 0.95$

Slika 5: Primjer dvije elipse s različitim numeričkim eksectricitetima

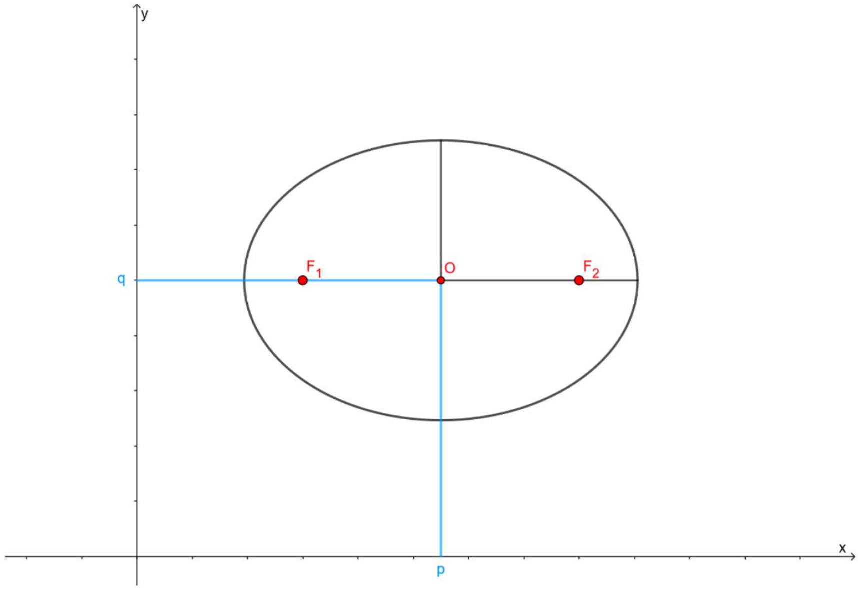
Ako odaberemo u koordinatnom sustavu točke $F_1$ i $F_2$ takve da leže na osi $x$ te je polovište dužine $\overline{F_1F_2}$ smješteno u ishodištu koordinatnog sustava tada za točku $T = (x, y)$ na elipsi, prema defniciji 2, mora vrijediti

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{4}$$

Ta jednadžba naziva se kanonskom jednadžbom elipse, te ju još nazivamo i centralna ili središnja jednadžba elipse zato što je središte elipse smješteno u ishodište koordinatnog sustava. Elipsa je centralno simetrična krivulja sa središtem simetrije u točki O.

Jednadžbu translatirane elipse dobivamo kada izvršimo translaciju elipse duž osi X za udaljenost p i duž osi $y$ za udaljenost $q$ i pišemo

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-p)^2}{b^2} = 1. \tag{5}$$




Slika 6: Translatirana elipsa sa središtem u točki $O(p, q)$

## 1.3. Parabola

Krivulja koja nastaje presjekom stošca i bilo koje ravnine paralelne s jednom izvodnicom te plohe zove se parabola.

Sljedeća definicija je preuzeta iz [1].

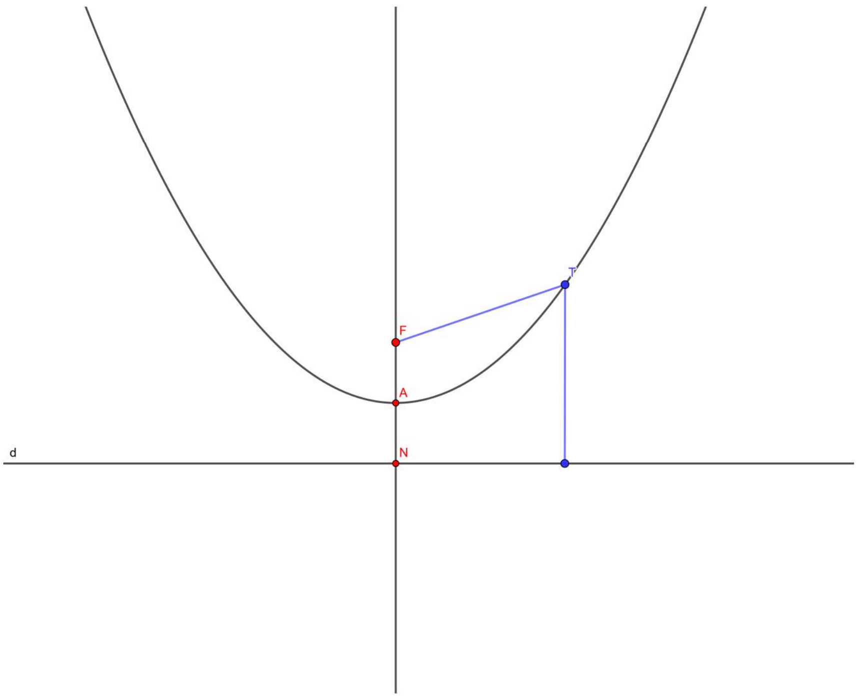
**Definicija 3.** *Skup svih točaka ravnine koje su jednako udaljene od jednog čvrstog pravca $d$ i jedne čvrste točke $F$ u toj ravnini koja ne leži na tom pravcu zove se parabola.*

Kraće, to je skup točaka definiran na sljedeći način

$$P = \{T \in \pi; d(T, d) = d(T, F)\}.$$

Točka $F$ naziva se **fokus** ili **žarište** parabole, a pravac $d$ **direktrisa** ili **ravnalica**. Usmjerenu dužinu $\overrightarrow{TF}$ zovemo **radijvektor** točke T.
Sa slovom $N$ označimo nožište okomice iz $F$ na $d$, tada je polovište dužine $\overline{FN}$ **tjeme parabole**, označimo ga s $A$. Okomicu povučenu kroz $N$ zovemo **os parabole**.

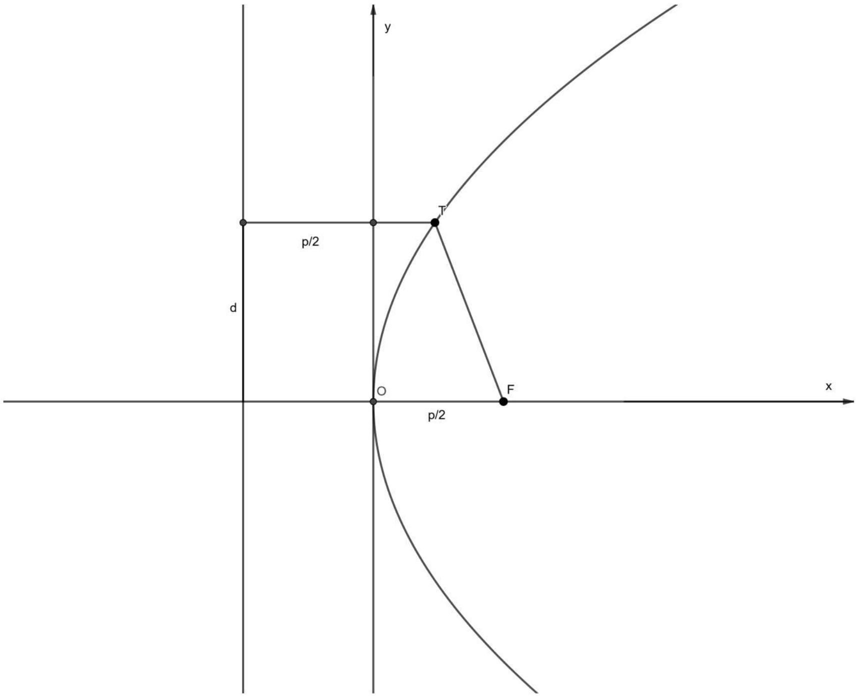
Ako znamo koordinate žarišta $F$ i jednadžbu direktrise $d$, lako ćemo konstruirati parabolu.




Slika 7: Parabola sa žarištem $F$ i direktrisom $d$

Parabola nije definirana "ispod" tjemena (Slika 7).

Postavimo Kartezijev koordinatni koordinatni sustav tako da je ishodište O u njezinom tjemenu i os x neka se podudara s osi parabole, te izvedimo jednadžbu te parabole.
U pravokutnom koordinatnom sustavu jednadžba direktrise je $x = -\frac{p}{2}$, gdje je $p > 0$ realan broj. Neka je broj $p$ parametar, a broj $\frac{p}{2}$ poluparametar parbole. Točka $O$ jednako je udaljena od žarišta parabole i od direktrise $d$ pa fokus parabole tada ima koordinate $F = (\frac{p}{2}, 0)$.




Slika 8: Parabola sa žarištem $F$ i direktrisom $d$

Ranije smo definirali parabolu i znamo da točka $T$ leži na paraboli ako $d(T,d) = d(T,F)$. Za neku točku T parabole vrijedi

$$d(T,d) = x + \frac{p}{2}, \qquad d(T,F) = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}$$

$$\Longrightarrow x + \frac{p}{2} = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}$$

Kvadriranjem i sređivanjem dobivamo

$$y^2 = 2px. \tag{6}$$

Jednadžbu (6) nazivamo kanonska jednadžba parabole.

Ako napravimo translaciju parabole duž osi $x$ za dužinu $a$ i duž osi $y$ za dužinu $b$ dobivamo jednadžbu translatirane parabole

$$(y - b)^2 = 2p(x - a). \tag{7}$$

## 1.4. Hiperbola

Hiperbolu dobivamo kao presjek ravnine paralelne s dvije izvodnice stošca.

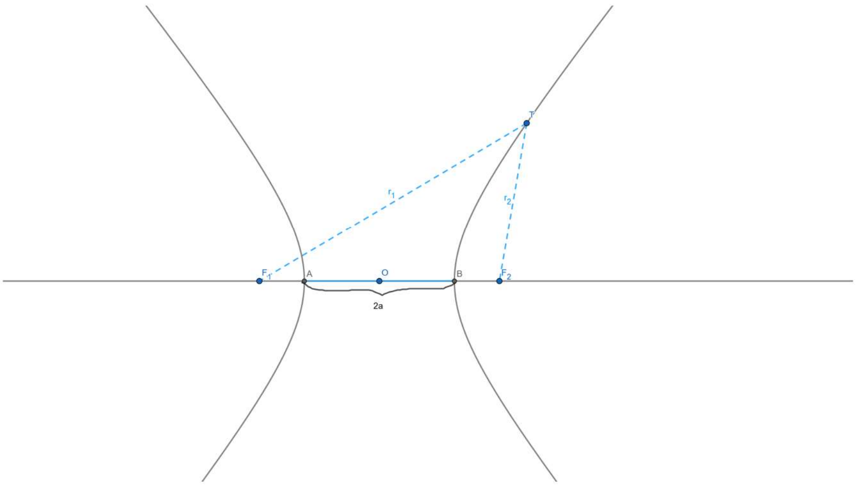
Definicija je preuzeta iz [2].

**Definicija 4.** *Neka su $F_1$ i $F_2$ dvije čvrste točke u $\pi$ udaljene za $2e > 0$ i neka je a zadani realan broj $a < e$. Hiperbola je skup točaka u $\pi$ za koje je apsolutna vrijednost razlike udaljenosti $F_1$ i $F_2$ konstantna i jednaka $2a$.*

Kraće,

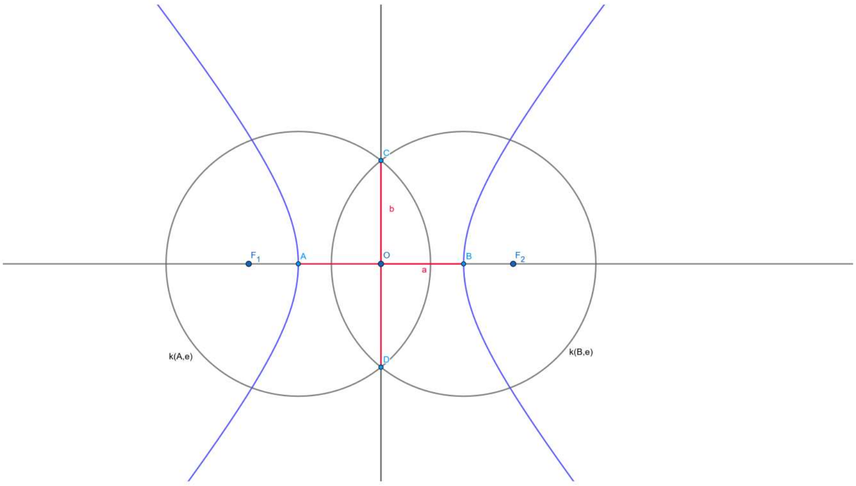
$$H = \{T \in \pi; |d(T, F_1) - d(T, F_2)| = 2a\}. \tag{8}$$

Hiperbola kao i elipsa ima dva žarišta, označavamo ih s $F_1$ i $F_2$. Usmjerenu dužinu koja spaja bilo koju točku hiperbole s jednim od žarišta naziva se **radijus vektor** te točke. Polovište dužine $\overline{F_1F_2}$ označiti ćemo ga s $O$ i zvati ga središte hiperbole. Tjemena hiperbole točke su $A$ i $B$, jedine dvije točke u kojima pravac $F_1F_2$ siječe hiperbolu. Dužina $\overline{AB}$ naziva se **realna** os i jednaka je $2a$.



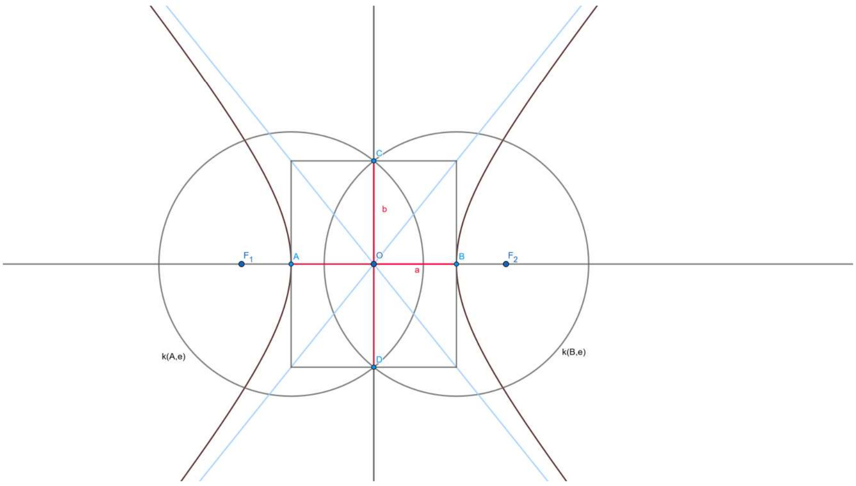

Slika 9: Hiperbola sa žarištima $F_1$ i $F_2$ i radijus vektorima $r_1$ i $r_2$

Druga os hiperbole je dužina $\overline{CD}$ pri čemu točke $C$ i $D$ dobijemo kao presjek kružnica $k(A, e)$ i $k(B, e)$ sa simetralom realne osi. Nazivamo ju **imaginarna** os zato što hiperbola ne siječe tu os. Duljinu $\overline{CD}$ označavamo s $2b$, a duljina b dana je izrazom $b^2 = \sqrt{e^2 - a^2}$. Broj $e, e > a$ nazivamo linearnim ekscentricitetom hiperbole, a $\epsilon = \frac{e}{a}$ numeričkim ekscentricitetom.




Slika 10: Hiperbola sa žarištima $F_1$ i $F_2$, te imaginarnom i realnom osi

Ako povučemo pravce kroz dijagonale pravokutnika stranica $2a$ i $2b$ sa središtem u središtu naše hiperbole, dobijemo pravce koje zovemo asimptote hiperbole. Pravac je asimptota krivulje ako se njegova udaljenost do krivulje približava nuli kada jedna ili obje koordinate teže u beskonačnost.




Slika 11: Hiperbola sa žarištima $F_1$ i $F_2$

Odredit ćemo jednadžbu hiperbole tako što ćemo središte hiperbole $O$ staviti u središte koordinatnog sustava te će tada žarišta $F_1$ i $F_2$ imati koordinate $(-e, 0)$ i $(e, 0)$. Označit ćemo s $r_1 = |F_1T|$ i $r_2 = |F_2T|$ radijus vektore točke $T$ pri čemu je $T = (x, y)$ bilo koja točka hiperbole (Slika 9).

Iz defnicije hiperbole:

$$|r_1 - r_2| = 2a.$$

Slično kao kod izvoda jednadžbe elipse, uvrštavamo i dobivamo jednadžbu hiperbole

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{9}$$

# 2. Plohe drugog reda

Ploha drugog reda je skup svih $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ koje zadovoljavaju algebarsku jednadžbu drugog reda

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + K = 0, \tag{10}$$

pri čemu su svi koeficijenti realni brojevi, te je barem jedan od njih različit od nule.

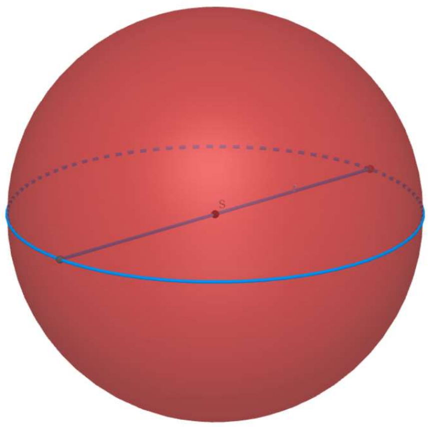
Napraviti ćemo klasifikaciju šest osnovnih ploha drugoga reda, prikazati ih grafički i opisati te dati njihove formule.

## 2.1. Sfera

Definicija je preuzeta iz [2].

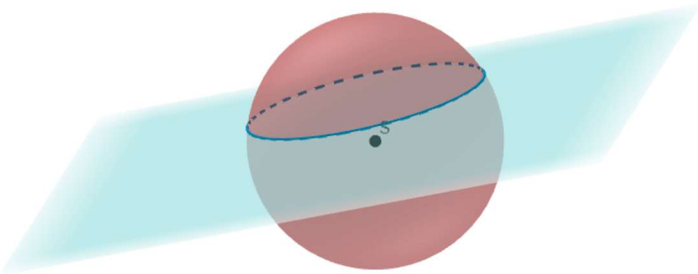
**Definicija 5.** *Sfera je skup svih točaka prostora koje su jednako udaljene od neke čvrste točke tog prostora.*

Najpoznatija i najjednostavnija ploha drugog reda je sfera. Sferu nazivamo rotacijska ploha zato što ju dobivamo rotiranjem kružnice oko bilo kojega njezina promjera.



Slika 12: Sfera sa središtem u točki $S$ i polumjerom $r$

**Promjer** je najveća udaljenost između točaka sfere. Udaljenost proizvoljne točke sfere i središta sfere zovemo **polumjer**. Kružnica koja leži na sferi i središte joj je ujedno i središte sfere naziva se **glavna** kružnica sfere. Svaki presjek ravnine sa sferom je kružnica ili točka ili prazan skup.




Slika 13: Presjek sfere i ravnine je kružnica

Neka je r polumjer sfere i točka $T = (x, y, z)$ bilo koja točka sfere. Ako središte sfere stavimo u točku $S = (a, b, c)$ dobivamo jednadžbu

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2. \tag{11}$$

Vidimo da je jednadžba (11) zapravo poseban slučaj jednadžbe (10). Sfera sa središtem u ishodištu dana je jednadžbom $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

## 2.2. Elipsoid

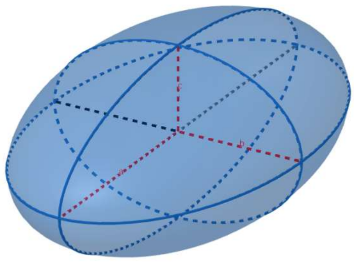
Sljedeća definicija je preuzeta iz [10].

**Definicija 6.** *Ploha drugog reda određena jednadžbom*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{12}$$

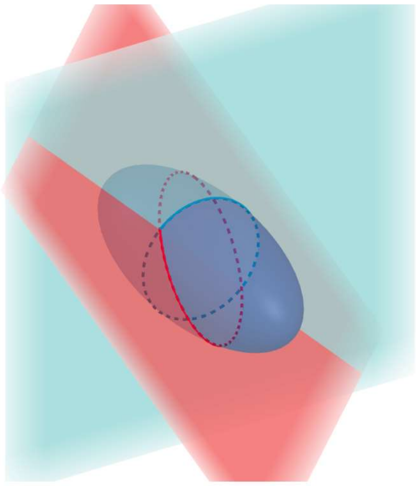
*naziva se elipsoid.*

Elipsoid je centralnosimetrična omeđena ploha. Glavne osi su mu paralelne s osima $x, y$ i $z$, i duljine poluosi su redom $a, b, c$.



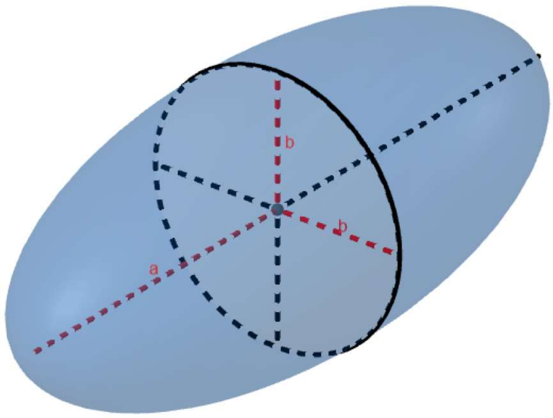
Slika 14: Elipsoid s poluosima $a, b$ i $c$

Kada su sve poluosi elipsoida iste duljine tj. $a = b = c \neq 0$, postaje sfera polumjera $a$.



Slika 15: Presjeci ravnina sa elipsoidom

Elipsoid kojemu su dvije osi iste duljine, a treća je različita, npr. $a \neq b = c$ naziva se **sferoid**. Sferoid je poznat još i pod nazivom rotacijski elipsoid zato što nastaje rotacijom elipse oko jedne od njezinih glavnih osi.




Slika 16: Sferoid (elipsoid s poluosima $a, b, b$)

## 2.3. Eliptički paraboloid

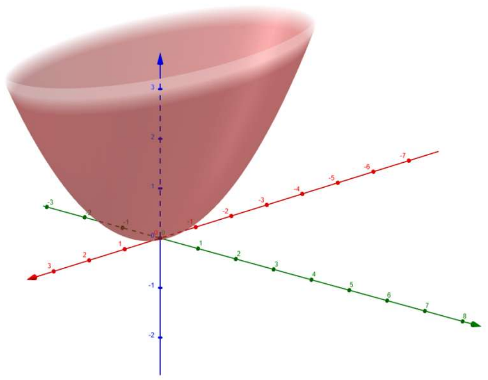
Sljedeća definicija je preuzeta iz [10].

**Definicija 7.** *Ploha drugog reda koja zadovoljava jednadžbu*

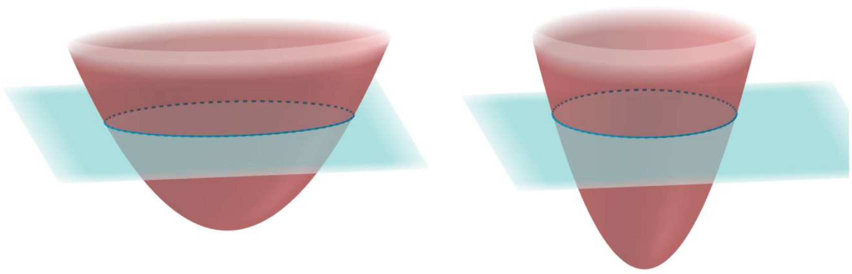
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z. \tag{13}$$

*naziva se eliptički paraboloid.*

Eliptički paraboloid nije omeđen odozgo, te je simetričan obzirom na $xz$ i $yz$ ravnine.

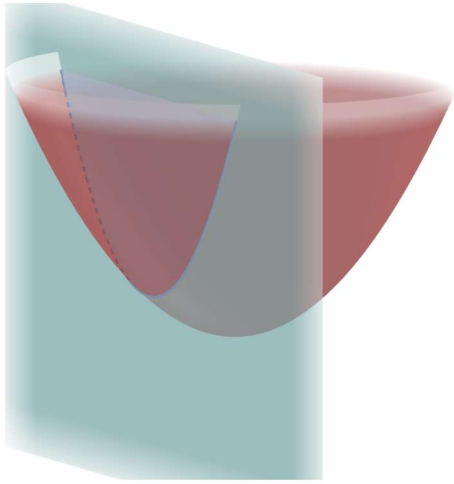


Slika 17: Eliptički paraboloid sa vrhom u $(0, 0, 0)$



Slika 18: Presjek eliptičkog i kružnog paraboloida s ravninom $z = k$

Presjek ravnina $x = k$ i $y = k$ s eliptičkim paraboloidom jesu parabole.

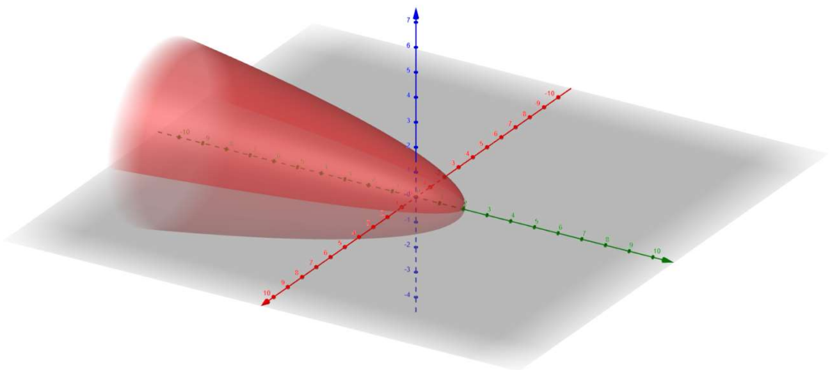


Slika 19: Presjek eliptičkog paraboloida s ravninom $x = k$

Jednadžba translatiranog eliptičkog paraboloida s vrhom u točki $S = (x_0, y_0, z_0)$ dana je u obliku

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = z - z_0. \tag{14}$$

Eliptički paraboloid duž neke druge osi dobijemo zamjenom varijabli, a predznak nezavisne varijable govori nam na koju stranu je paraboloid okrenut. Pomaknuti i polegnuti eliptički paraboloid prikazan je na slici 19.



Slika 20: Eliptički paraboloid $-y + 2 = x^2 + z^2$

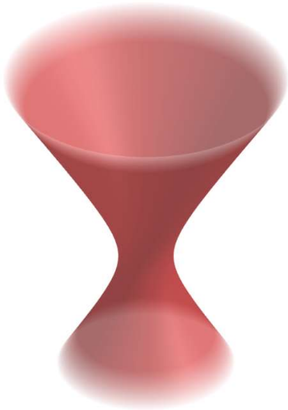
## 2.4. Jednoplošni hiperboloid

Definicija je iz [10].

**Definicija 8.** *Jednoplošni hiperboloid je ploha parametrizirana jednadžbom*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{15}$$

Hiperboloid nije omeđen, te je simetričan obzirom na sve osi.

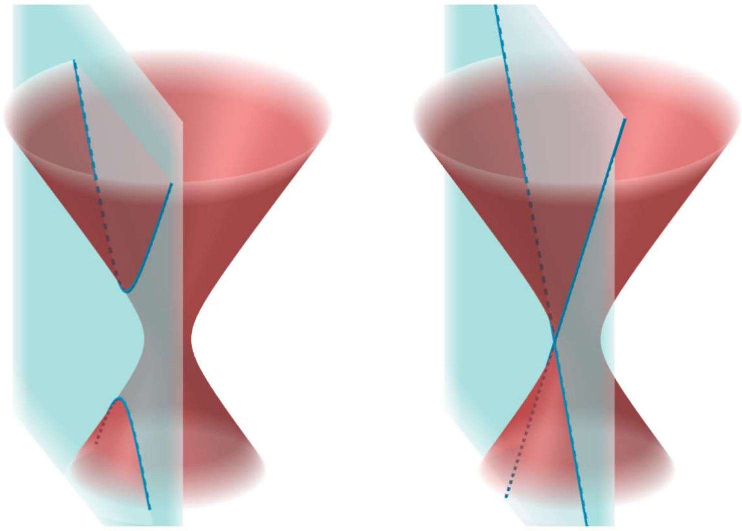


Slika 21: Jednoplošni hiperboloid

Nivo krivulje jednoplošnog hiperboloida su elipse sa središtem na osi z. Presjek jednoplošnog hiperboloida i ravnine

$$\begin{aligned} x = k: \text{za} \quad & k \neq \pm a \quad \text{je hiperbola} \\ & k = \pm a \quad \text{su pravci} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y = k: \text{za} \quad & k \neq \pm b \quad \text{je hiperbola} \\ & k = \pm b \quad \text{su pravci} \end{aligned}$$

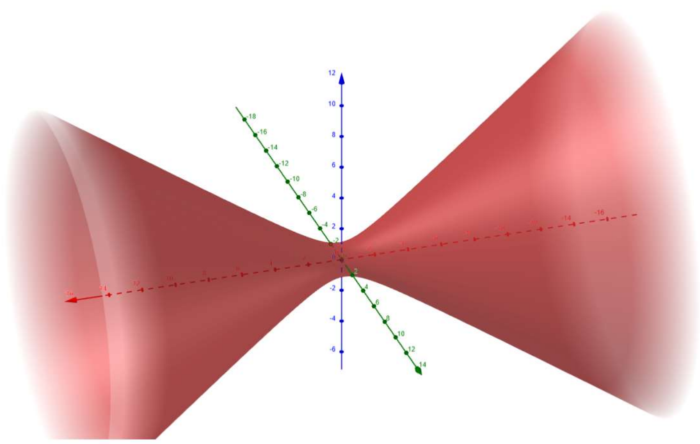


Slika 22: Presjeci jednoplošnog hiperboloida pravcem $x = k$

Kada je $a = b$, hiperboloid je rotacijska ploha. Jednoplošni rotacijski hiperboloid nastaje rotacijom hiperbole oko njezine imaginarne osi.
Translatirani jednoplošni hiperboloid kao i kod ostalih ploha dobijemo pomicanjem središta hiperboloida. Jednadžba translatiranog jednoplošnog hiperboloida sa središtem u $S(x_0, y_0, z_0)$ određena je

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1. \tag{16}$$

Zamjenom varijabli dobijemo jednoplošni hiperboloid uzduž neke druge osi (Slika 22).



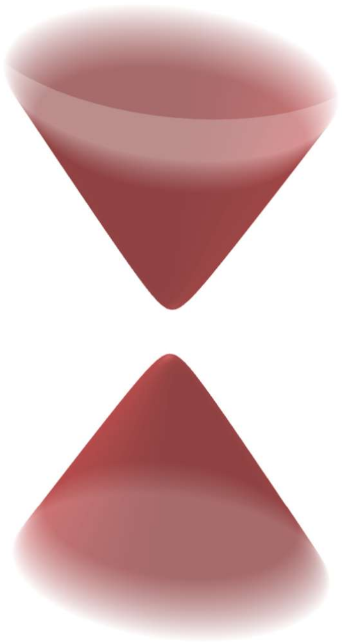
Slika 23: $\frac{z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{c^2} = 1$

## 2.5. Dvoplošni hiperboloid

Definicija je preuzeta iz [10].

**Definicija 9.** *Dvoplošni hiperboloid je ploha drugog reda generirana točkama koje zadovoljavaju jednadžbu*

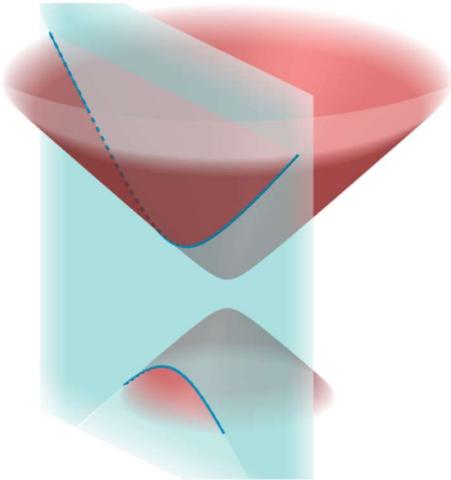
$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, a \geq b. \tag{17}$$



Slika 24: Dvoplošni hiperboloid

Također nije omeđen te je simetričan obzirom na sve koordinatne osi.
Presjek jednoplošnog hiperboloida i ravnine

$$\begin{aligned} x &= k: \quad \text{je hiperbola} \\ y &= k: \quad \text{je hiperbola} \end{aligned}$$



Slika 25: Dvoplošni hiperboloid presječen ravninom $x = k$

Dvoplošni rotacijski hiperboloid nastaje rotacijom hiperbole oko njezine imaginarne osi.

Jednadžba translatiranog jednoplošnog hiperboloida sa središtem u $S(x_0, y_0, z_0)$ određena je

$$-\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1. \tag{18}$$

Kao u prethodnim plohama, cikličkom zamjenom varijabli dobivamo hiperboloid koji se proteže uzduž neke druge koordinatne osi.

# Literatura


[1] N. Elezović, B. Dakić, *Matematika 3, udžbenik i zbirka zadataka za 3. razred prirodoslovne gimnazije*, Element, Zagreb, 1998.

[2] Ž. Milin Šipuš, M. Bombardelli, *Analitička geometrija*, skripta, Matematički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb 2008

[3] A. I. Miroševic, N. Koceić-Bilan, J. Jurko, *Različiti nastavno-metodički pristupi čunjosječnicama*, math.e (Hrvatski matematički elektronički časopis), dostupno na, `http://e.math.hr/broj27/mirosevic`, kolovoz 2022.

[4] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 2*, Školska knjiga, Zagreb 1995.

[5] I. Slović, *Konike i Dandelinove kugle*, Matka 21, br. 82,

[6] M. Suvalj, *Krivulje drugog reda i primjene,*, dostupno na `http://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/SUV03.pdf`, kolovoz 2022

[7] `http://lavica.fesb.unist.hr/mat2/predavanja/node50.html`

[8] `https://upwikihr.top/wiki/Apollonius_of_Perga`

[9] `https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/3DGrafika.html`

[10] `http://www.staff.city.ac.uk/o.castro-alvaredo/teaching/surfaces.pdf`