

# Krivulje i plohe drugog reda

---

**Knežević, Barbara**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2023**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Faculty of Applied Mathematics and Informatics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Fakultet primijenjene matematike i informatike**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:407027>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-08-15**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of School of Applied Mathematics and Computer Science](#)



Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Fakultet primijenjene matematike i informatike  
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Barbara Knežević

# Krivulje i plohe drugog reda

Završni rad

Osijek, 2023.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Fakultet primijenjene matematike i informatike  
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Barbara Knežević

# Krivulje i plohe drugog reda

Završni rad

Voditelj: doc. dr. sc. Ljiljana Primorac Gajčić

Osijek, 2023.

**Sažetak:**

Tema ovoga završnoga rada su krivulje, odnosno plohe drugog reda promatrane s aspekta analitičke geometrije. Navedene su definicije krivulja drugog reda, tj. kružnice, elipse, parabole i hiperbole, te sfere, elipsoida, eliptičkog paraboloida, jednoplošnog i dvoplošnog hiperboloida. Svaka promatrana krivulja, odnosno ploha je grafički prikazana, dan je pregled osnovnih obilježja te je iskazana odgovarajuća jednadžba kojom se krivulja, odnosno ploha zadaje.

**Ključne riječi:**

krivulje drugog reda, kružnica, elipsa, parabola, hiperbola, plohe drugog reda, sfera, elipsoid, paraboloid, hiperboloid

## Curves and surfaces of the second order

**Abstract:**

The topic of this final thesis are curves and surfaces of the second order viewed from the aspect of analytical geometry. Definitions of some second-order curves, respectively surfaces are given, i.e. circles, ellipses, parabolas and hyperbolas, spheres, ellipsoids, elliptical paraboloids, one-sheeted and two-sheeted hyperboloids. Each observed curve or surface is graphically displayed and the corresponding equation is given. We will also show an overview of basic characteristics for each curve, respectively surface.

**Key words:**

curves of the second order, circle, ellipse, parabola, hyperbola, surfaces of the second order, sphere, ellipsoid, paraboloid, hyperboloid

# Sadržaj

<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1. Krivulje drugog reda</b>	<b>2</b>
1.1. Kružnica . . . . .	2
1.2. Elipsa . . . . .	4
1.3. Parabola . . . . .	7
1.4. Hiperbola . . . . .	9
<b>2. Plohe drugog reda</b>	<b>11</b>
2.1. Sfera . . . . .	11
2.2. Elipsoid . . . . .	13
2.3. Eliptički paraboloid . . . . .	15
2.4. Jednoplešni hiperboloid . . . . .	17
2.5. Dvoplešni hiperboloid . . . . .	19
<b>Literatura</b>	<b>21</b>

# Uvod

Krivulje drugog reda ili konike jedne su od prvih proučavanih krivulja. Radove o njima pisali su još stari Grci, pripadnici Platonove akademije. Prvi izvori sežu još u 4. st. prije Krista, spominje ih grčki matematičar Menehmo, prilikom rješavanja Delskog problema. Tek stotinjak godina kasnije grčki matematičar Apolonije iz Perge, napisao je opširnu studiju o krivuljama drugog reda, i to samo geometrijskim pristupom, te je uveo nazive koje i danas rabimo. Njegovo djelo pod nazivom "Konike" po prvi puta kružnicu, elipsu, parabolu i hiperbolu prikazuje kao ravninske presjeke kružnog stošca pod određenim kutom, zato se u hrvatskom jeziku nazivaju i čunjosječnice. Trebalo je proći gotovo dva tisućljeća da bi matematičari bolje shvatili krivulje drugog reda povezivanjem algebarskih i geometrijskih tehnika.

U ovom radu razmatramo krivulje i plohe drugog reda. U prvom poglavlju ovoga rada navode se svojstva četiri osnovna oblika krivulja drugog reda, iskazuju se njihove definicije i formule, te se prikazuju njihove slike u koordinatnom sustavu. U drugom poglavlju ovog rada navode se svojstva pet osnovnih oblika ploha drugog reda, te također njihove definicije, formule i slike.

# 1. Krivulje drugog reda

Krivulja drugog reda je skup svih točaka dvodimenzionalnog prostora za koje je sljedeća jednačica zadovoljena

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad (1)$$

## 1.1. Kružnica

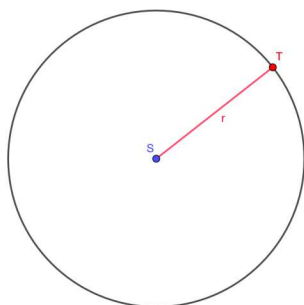
Kružnica spada u krivulje drugog reda koje nazivamo čunjosječnice. Naziv je dobila zato što ju dobijemo kao presjek stošca i ravnine paralelne s bilo kojom bazom stošca.

Sljedeća definicija je preuzeta iz [2].

**Definicija 1.** *Kružnica je skup svih točaka u ravnini  $\pi$  jednako udaljenih od čvrste točke u ravnini.*

$S$  se naziva **središte** ili **centar** kružnice, a udaljenost  $r$  naziva se **radijus** ili **polumjer**.  
Kraće, radi se o skupu  $K$  koji je definiran na sljedeći način

$$K = \{T \in \pi : d(S, T) = r\}.$$

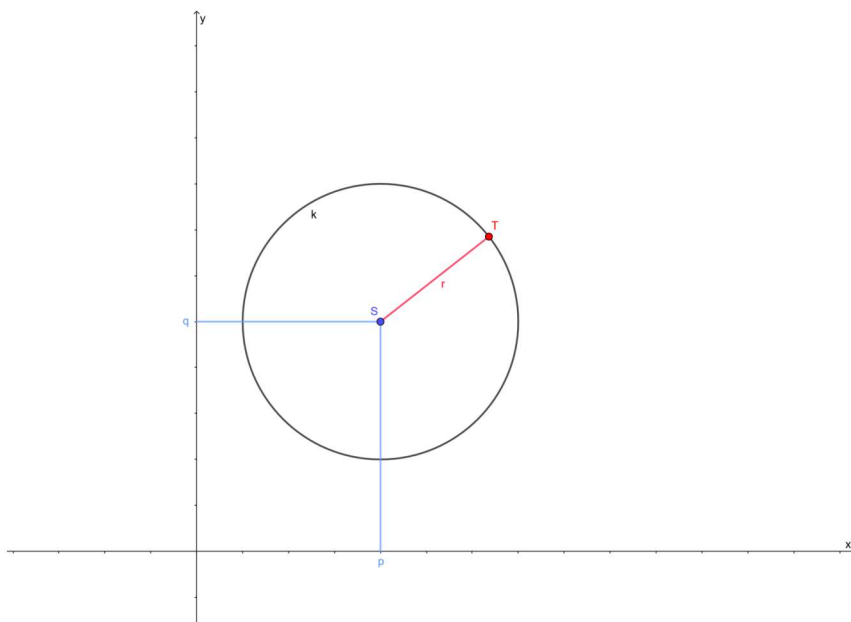


Slika 1: Kružnica sa središtem  $S$  i polumjerom  $r$

Svaka točka  $T = (x, y)$ , kružnice  $k(S, r)$ , jednako je udaljena od središta kružnice  $S(p, q)$  te je ta udaljenost jednaka duljini polumjera  $r$ , tj.  $d(S, T) = r$ .

Jednačica kružnice  $k(S, r)$  sa središtem u točki  $S = (p, q)$  i polumjerom  $r$  je

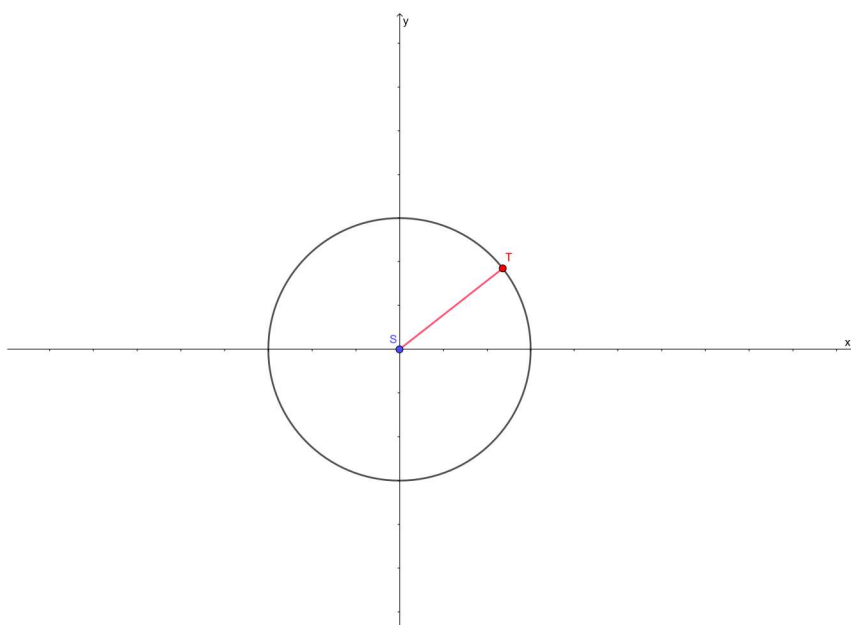
$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2. \quad (2)$$



Slika 2: Kružnica sa središtem  $S(p,q)$  i polumjerom  $r$

Posebno, ako se središte kružnice nalazi u ishodištu koordinatnog sustava, jednađba (2) je jednađba centralne kružnice te pišemo

$$x^2 + y^2 = r. \quad (3)$$



Slika 3: Centralna kružnica sa središtem  $S(0,0)$  i polumjerom  $r$



## 1.2. Elipsa

Elipsu dobijemo kao rezlutat presjeka ravnine i stošca, pri čemu ravnina nije paralelna niti s jednom izvodnicom stošca i ne prolazi vrhom stošca.

Sljedeća definicija preuzeta je iz [6].

**Definicija 2.** Neka su  $F_1$  i  $F_2$  dvije različite fiksne točke ravnine  $\pi$  i neka je  $|F_1F_2| = 2e$ , te neka je  $a$  pozitivan realni broj takav da je  $a > e$ . Elipsa je skup svih točaka ravnine za koje je zbroj udaljenosti od točaka  $F_1$  i  $F_2$  stalan i jednak  $2a$ .

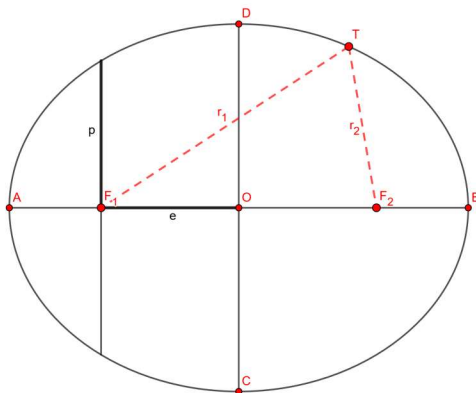
Kraće zapisano to je skup točaka definiran kao

$$E = \{T \in \pi; |F_1T| + |F_2T| = 2a\}.$$

Točke  $F_1$  i  $F_2$  zovu se **fokusi** ili **žarišta** elipse. Kažemo da je **radijvektor** točke  $T$  dužina koja spaja žarište s bilo kojom točkom  $T$  elipse.

Polovište dužine  $\overline{F_1F_2}$  zovemo **središte** elipse i označavamo s  $O$ .

Pravac  $F_1F_2$  siječe elipsu u točkama  $A$  i  $B$ , a simetrala dužine  $\overline{F_1F_2}$  siječe elipsu u točkama  $C$  i  $D$ . Točke  $A, B, C$  i  $D$  zovemo **tjemena** elipse, dužina  $\overline{AB}$  naziva se glavna ili velika os elipse, a dužina  $\overline{CD}$  sporedna ili mala osi elipse.  $\overline{OA}$  i  $\overline{OB}$  zovemo velike poluosi, a dužine  $\overline{OC}$  i  $\overline{OD}$  malim poluosima. Duljina velike poluosi jednaka je  $a$  pa je duljina velike osi jednaka je  $2a$ . Duljina male poluosi jednaka je  $b$ .

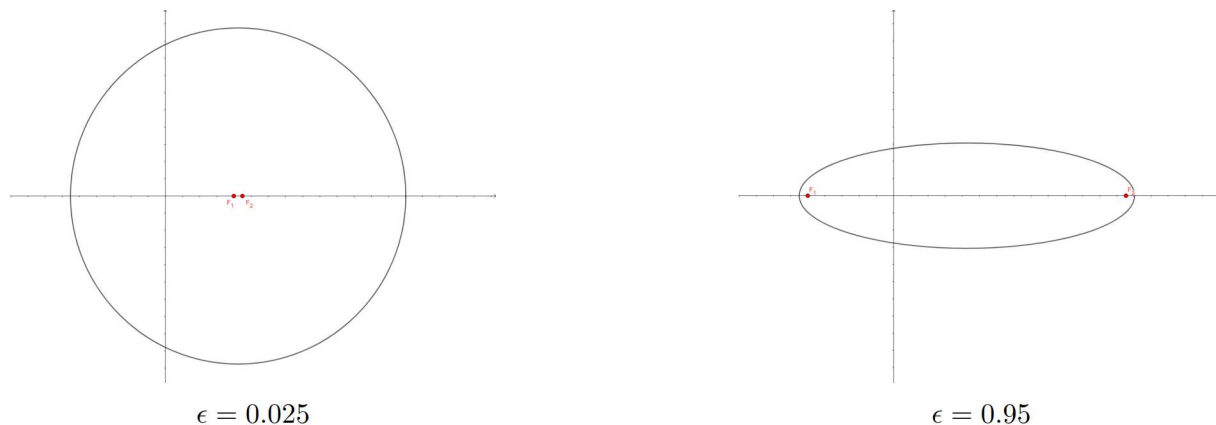


Slika 4: Elipsa sa žarištima  $F_1$  i  $F_2$

Ako su nam  $F_1$  i  $F_2$  iste točke, slijedi da je  $e = 0$ , tada dobivamo skup točaka koje su jednako udaljene od te fiksne točke čime je određena kružnica.

Broj  $e$  nazivamo **linearni ekscentricitet** elipse, on predstavlja polovicu udaljenosti između žarišta  $e = \frac{1}{2}|F_1F_2|$ ,  $e < a$ , a broj  $\epsilon$ ,  $0 < \epsilon < 1$ , nazivamo **numerički ekscentricitet**.

Numerički ekscentricitet karakterizira oblik elipse u tom smislu što su elipse s jednakim numeričkim ekscentricitetom međusobno slične. Linearni i numerički ekscentricitet vezani su relacijom  $e = a\epsilon$ . Što je  $\epsilon$  je bliži 0, to je elipsa bliža kružnici, tj. kružnica ima numerički ekscentricitet jednak 0. Ako je numerički ekscentricitet blizak 1 tada je elipsa jako spljoštena.



Slika 5: Primjer dvije elipse s različitim numeričkim ekscentricitetima

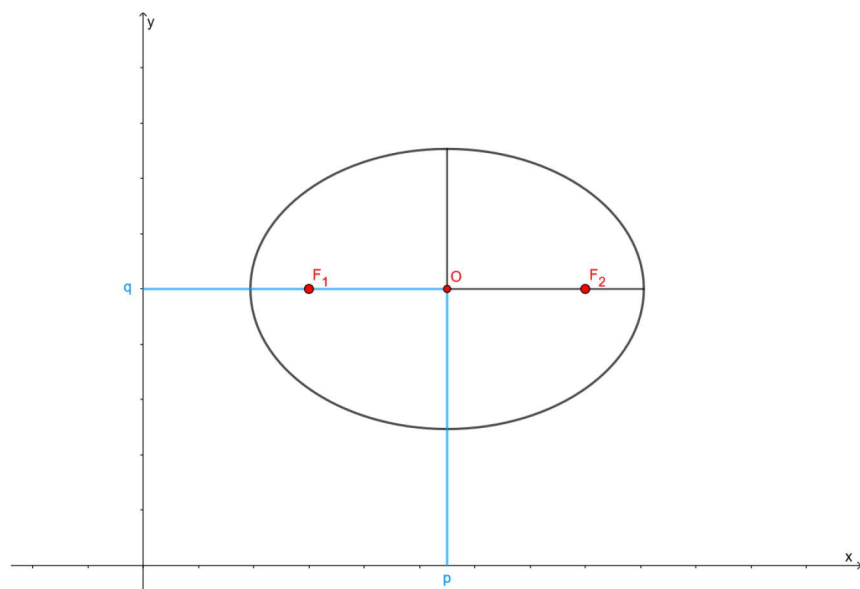
Ako odaberemo u koordinatnom sustavu točke  $F_1$  i  $F_2$  takve da leže na osi  $x$  te je polovište dužine  $\overline{F_1F_2}$  smješteno u ishodištu koordinatnog sustava tada za točku  $T = (x, y)$  na elipsi, prema defniciji 2, mora vrijediti

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{4}$$

Ta jednadžba naziva se kanonskom jednadžbom elipse, te ju još nazivamo i centralna ili središnja jednadžba elipse zato što je središte elipse smješteno u ishodište koordinatnog sustava. Elipsa je centralno simetrična krivulja sa središtem simetrije u točki  $O$ .

Jednadžbu translahirane elipse dobivamo kada izvršimo translaciju elipse duž osi  $X$  za udaljenost  $p$  i duž osi  $y$  za udaljenost  $q$  i pišemo

$$\frac{(x - p)^2}{a^2} + \frac{(y - q)^2}{b^2} = 1. \tag{5}$$



Slika 6: Translatirana elipsa sa središtem u točki  $O(p, q)$

### 1.3. Parabola

Krivulja koja nastaje presjekom stošca i bilo koje ravnine paralelne s jednom izvodnicom te plohe zove se parabola.

Sljedeća definicija je preuzeta iz [1].

**Definicija 3.** Skup svih točaka ravnine koje su jednako udaljene od jednog čvrstog pravca  $d$  i jedne čvrste točke  $F$  u toj ravnini koja ne leži na tom pravcu zove se parabola.

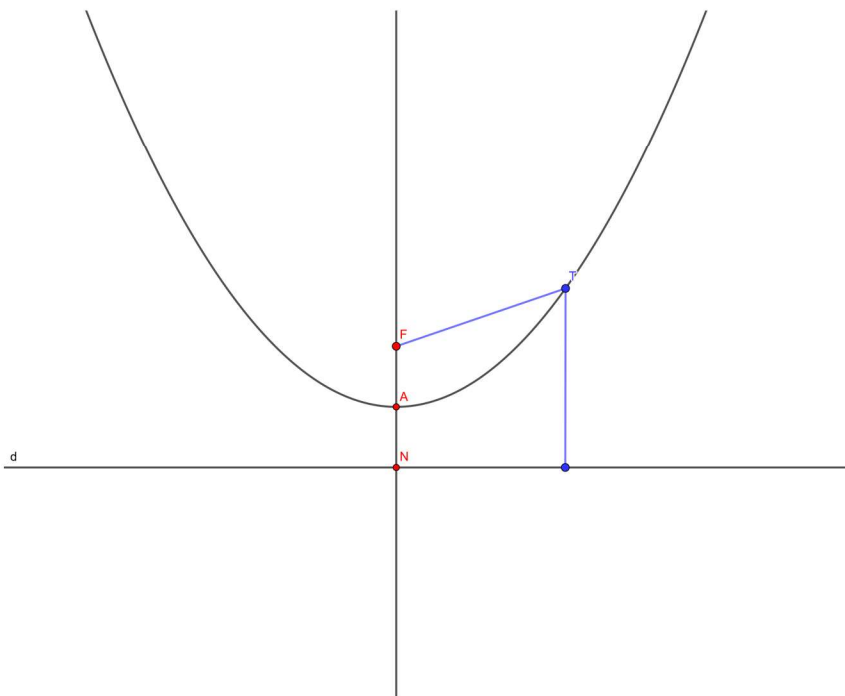
Kraće, to je skup točaka definiran na sljedeći način

$$P = \{T \in \pi; d(T, d) = d(T, F)\}.$$

Točka  $F$  naziva se **fokus** ili **žarište** parabole, a pravac  $d$  **direktrisa** ili **ravnalica**. Usmjerenu dužinu  $\overrightarrow{TF}$  zovemo **radijvektor** točke  $T$ .

Sa slovom  $N$  označimo nožište okomice iz  $F$  na  $d$ , tada je polovište dužine  $\overline{FN}$  **tjeme parabole**, označimo ga s  $A$ . Okomicu povučenu kroz  $N$  zovemo **os parabole**.

Ako znamo koordinate žarišta  $F$  i jednadžbu direktrise  $d$ , lako ćemo konstruirati parabolu.

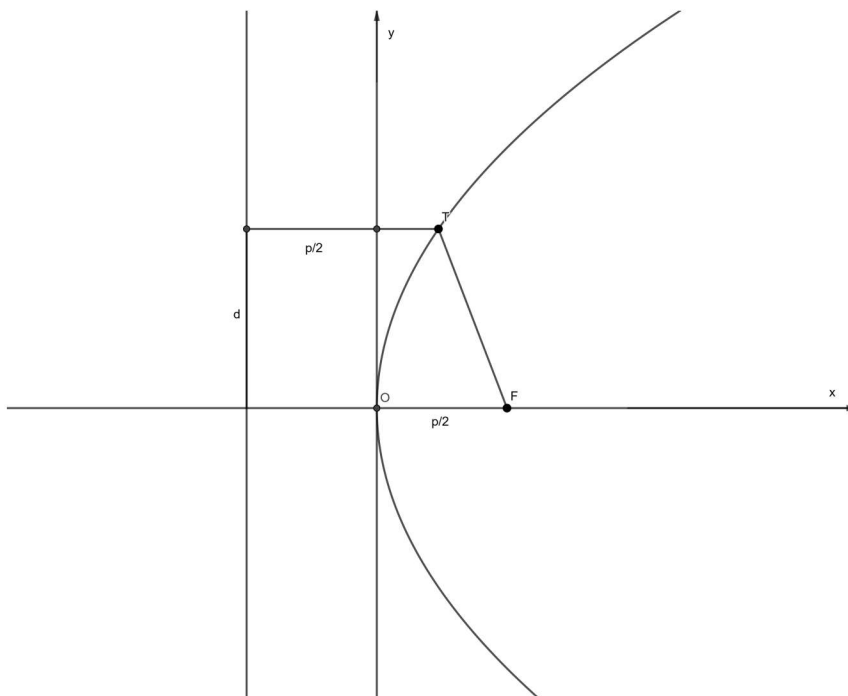


Slika 7: Parabola sa žarištem  $F$  i direktrisom  $d$

Parabola nije definirana "ispod" tjemeni (Slika 7).

Postavimo Kartezijev koordinatni sustav tako da je ishodište  $O$  u njezinom tjemu i os  $x$  neka se podudara s osi parabole, te izvedimo jednadžbu te parabole.

U pravokutnom koordinatnom sustavu jednadžba direktrise je  $x = -\frac{p}{2}$ , gdje je  $p > 0$  realan broj. Neka je broj  $p$  parametar, a broj  $\frac{p}{2}$  poluparametar parabole. Točka  $O$  jednako je udaljena od žarišta parabole i od direktrise  $d$  pa fokus parabole tada ima koordinate  $F = (\frac{p}{2}, 0)$ .



Slika 8: Parabola sa žarištem  $F$  i direktrisom  $d$

Ranije smo definirali parabolu i znamo da točka  $T$  leži na paraboli ako  $d(T, d) = d(T, F)$ . Za neku točku  $T$  parabole vrijedi

$$d(T, d) = x + \frac{p}{2}, \quad d(T, F) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

$$\implies x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

Kvadriranjem i sređivanjem dobivamo

$$y^2 = 2px. \quad (6)$$

Jednadžbu (6) nazivamo kanonska jednadžba parabole.

Ako napravimo translaciju parabole duž osi  $x$  za dužinu  $a$  i duž osi  $y$  za dužinu  $b$  dobivamo jednadžbu translirane parabole

$$(y - b)^2 = 2p(x - a). \quad (7)$$

## 1.4. Hiperbola

Hiperbolu dobivamo kao presjek ravnine paralelne s dvije izvodnice stošca.

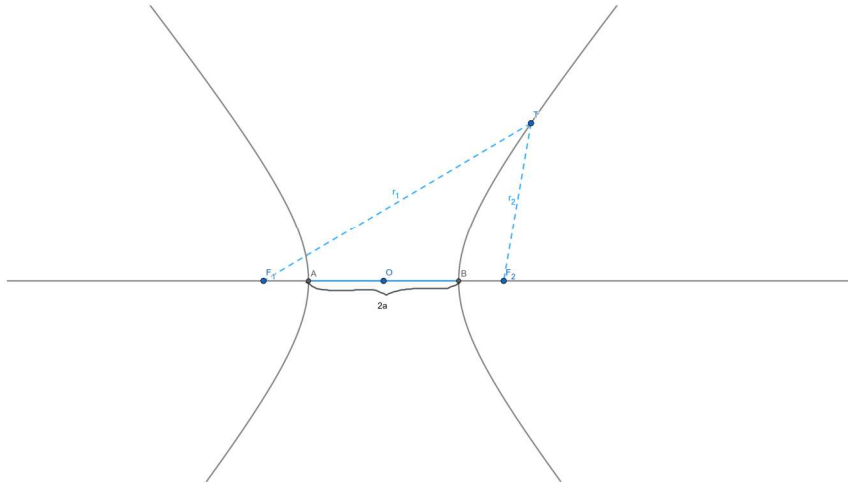
Definicija je preuzeta iz [2].

**Definicija 4.** Neka su  $F_1$  i  $F_2$  dvije čvrste točke u  $\pi$  udaljene za  $2e > 0$  i neka je  $a$  zadani realan broj  $a < e$ . Hiperbola je skup točaka u  $\pi$  za koje je apsolutna vrijednost razlike udaljenosti  $F_1$  i  $F_2$  konstantna i jednaka  $2a$ .

Kraće,

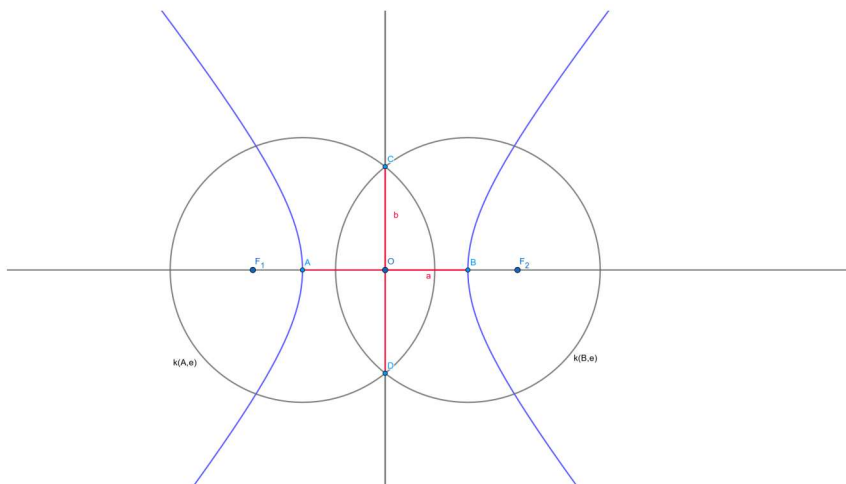
$$H = \{T \in \pi; |d(T, F_1) - d(T, F_2)| = 2a\}. \quad (8)$$

Hiperbola kao i elipsa ima dva žarišta, označavamo ih s  $F_1$  i  $F_2$ . Usmjerenu dužinu koja spaja bilo koju točku hiperbole s jednim od žarišta naziva se **radijus vektor** te točke. Polovište dužine  $\overline{F_1F_2}$  označiti ćemo ga s  $O$  i zvat ćemo ga središte hiperbole. Tjemena hiperbole točke su  $A$  i  $B$ , jedine dvije točke u kojima pravac  $F_1F_2$  siječe hiperbolu. Dužina  $\overline{AB}$  naziva se **realna os** i jednaka je  $2a$ .



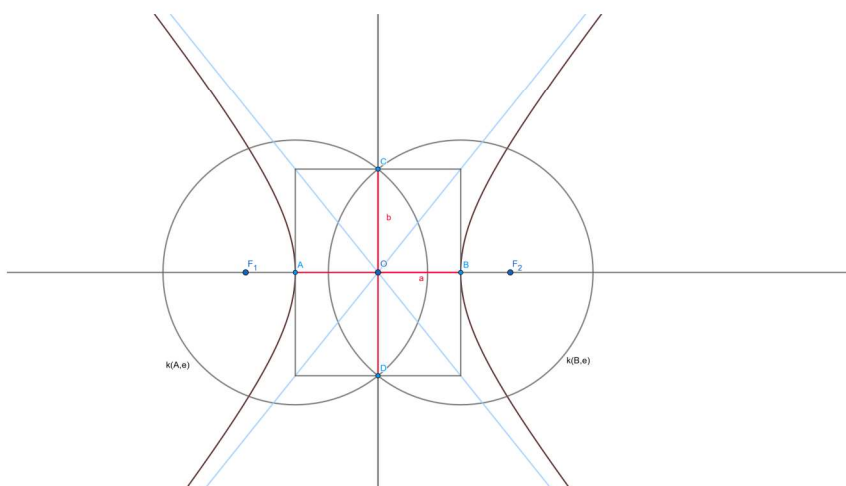
Slika 9: Hiperbola sa žarištima  $F_1$  i  $F_2$  i radijus vektorima  $r_1$  i  $r_2$

Druga os hiperbole je dužina  $\overline{CD}$  pri čemu točke  $C$  i  $D$  dobijemo kao presjek kružnica  $k(A, e)$  i  $k(B, e)$  sa simetralom realne osi. Nazivamo ju **imaginarna os** zato što hiperbola ne siječe tu os. Duljinu  $\overline{CD}$  označavamo s  $2b$ , a duljina  $b$  dana je izrazom  $b^2 = \sqrt{e^2 - a^2}$ . Broj  $e$ ,  $e > a$  nazivamo linearnim ekscentricitetom hiperbole, a  $\epsilon = \frac{e}{a}$  numeričkim ekscentricitetom.



Slika 10: Hiperbola sa žarištima  $F_1$  i  $F_2$ , te imaginarnom i realnom osi

Ako povučemo pravce kroz dijagonale pravokutnika stranica  $2a$  i  $2b$  sa središtem u središtu naše hiperbole, dobijemo pravce koje zovemo asimptote hiperbole. Pravac je asimptota krivulje ako se njegova udaljenost do krivulje približava nuli kada jedna ili obje koordinate teže u beskonačnost.



Slika 11: Hiperbola sa žarištima  $F_1$  i  $F_2$

Odredit ćemo jednadžbu hiperbole tako što ćemo središte hiperbole  $O$  staviti u središte koordinatnog sustava te će tada žarišta  $F_1$  i  $F_2$  imati koordinate  $(-e, 0)$  i  $(e, 0)$ . Označit ćemo s  $r_1 = |F_1T|$  i  $r_2 = |F_2T|$  radijus vektore točke  $T$  pri čemu je  $T = (x, y)$  bilo koja točka hiperbole (Slika 9).

Iz defnicije hiperbole:

$$|r_1 - r_2| = 2a.$$

Slično kao kod izvoda jednadžbe elipse, uvrštavamo i dobivamo jednadžbu hiperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (9)$$

## 2. Plohe drugog reda

Ploha drugog reda je skup svih  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  koje zadovoljavaju algebarsku jednadžbu drugog reda

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + K = 0, \quad (10)$$

pri čemu su svi koeficijenti realni brojevi, te je barem jedan od njih različit od nule.

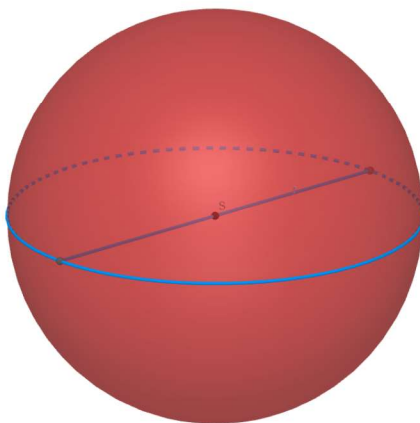
Napraviti ćemo klasifikaciju šest osnovnih ploha drugoga reda, prikazati ih grafički i opisati te dati njihove formule.

### 2.1. Sfera

Definicija je preuzeta iz [2].

**Definicija 5.** *Sfera je skup svih točaka prostora koje su jednako udaljene od neke čvrste točke tog prostora.*

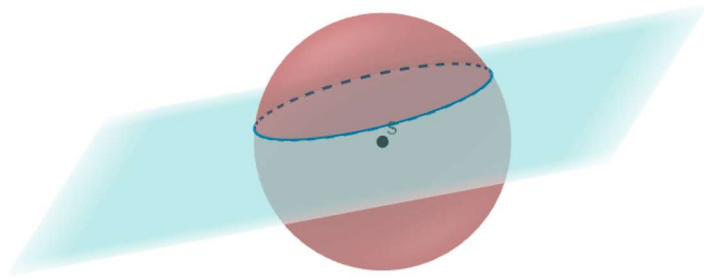
Najpoznatija i najjednostavnija ploha drugog reda je sfera. Sferu nazivamo rotacijska ploha zato što ju dobivamo rotiranjem kružnice oko bilo kojega njezina promjera.



Slika 12: Sfera sa središtem u točki  $S$  i polumjerom  $r$

**Promjer** je najveća udaljenost između točaka sfere. Udaljenost proizvoljne točke sfere i središta sfere zovemo **polumjer**. Kružnica koja leži na sferi i središte joj je ujedno i središte sfere naziva se **glavna** kružnica sfere. Svaki presjek ravnine sa sferom je kružnica ili točka ili prazan skup.





Slika 13: Presjek sfere i ravnine je kružnica

Neka je  $r$  polumjer sfere i točka  $T = (x, y, z)$  bilo koja točka sfere. Ako središte sfere stavimo u točku  $S = (a, b, c)$  dobivamo jednadžbu

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2. \quad (11)$$

Vidimo da je jednadžba (11) zapravo poseban slučaj jednadžbe (10). Sfera sa središtem u ishodištu dana je jednadžbom  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ .

## 2.2. Elipsoid

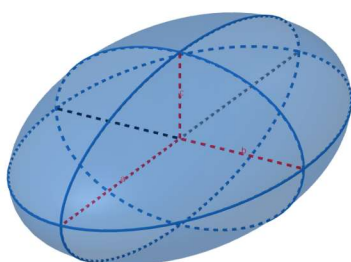
Sljedeća definicija je preuzeta iz [10].

**Definicija 6.** Ploha drugog reda određena jednačbom

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (12)$$

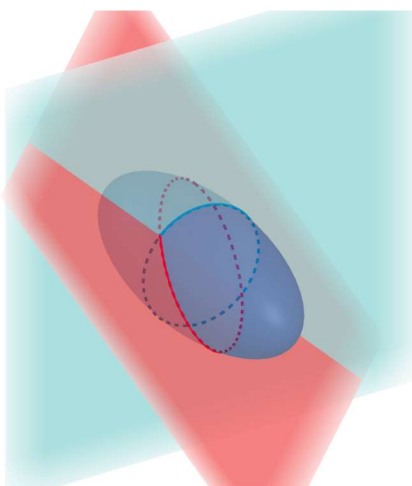
*naziva se elipsoid.*

Elipsoid je centralnosimetrična omeđena ploha. Glavne osi su mu paralelne s osima  $x, y$  i  $z$ , i duljine poluosi su redom  $a, b, c$ .



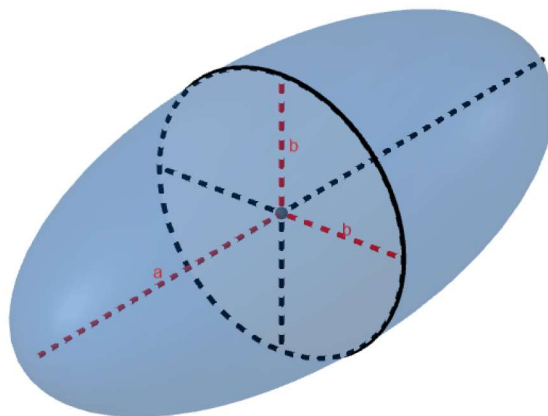
Slika 14: Elipsoid s poluosima  $a, b$  i  $c$

Kada su sve poluosi elipsoida iste duljine tj.  $a = b = c \neq 0$ , postaje sfera polumjera  $a$ .



Slika 15: Presjeci ravnina sa elipsoidom

Elipsoid kojemu su dvije osi iste duljine, a treća je različita, npr.  $a \neq b = c$  naziva se **sferoid**. Sferoid je poznat još i pod nazivom rotacijski elipsoid zato što nastaje rotacijom elipse oko jedne od njezinih glavnih osi.



Slika 16: Sferoid (elipsoid s poluosima  $a, b, b$ )

### 2.3. Eliptički paraboloid

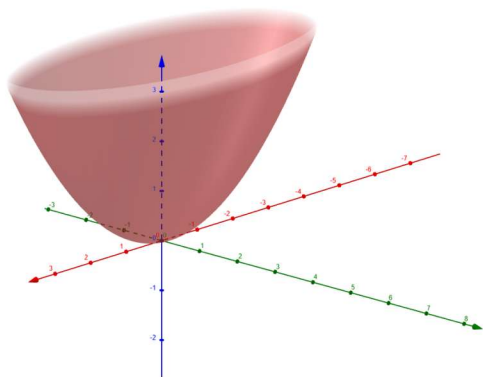
Sljedeća definicija je preuzeta iz [10].

**Definicija 7.** Ploha drugog reda koja zadovoljava jednadžbu

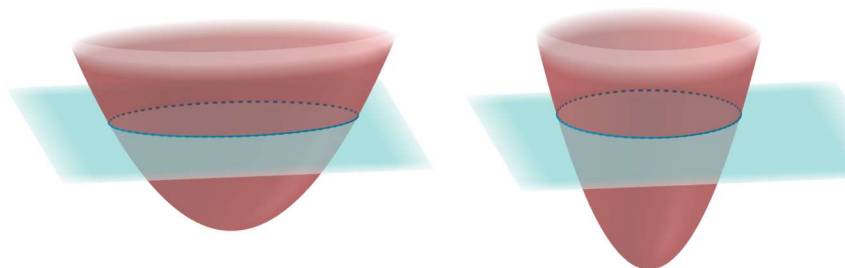
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z. \quad (13)$$

naziva se eliptički paraboloid.

Eliptički paraboloid nije omeđen odozgo, te je simetričan obzirom na  $xz$  i  $yz$  ravnine.

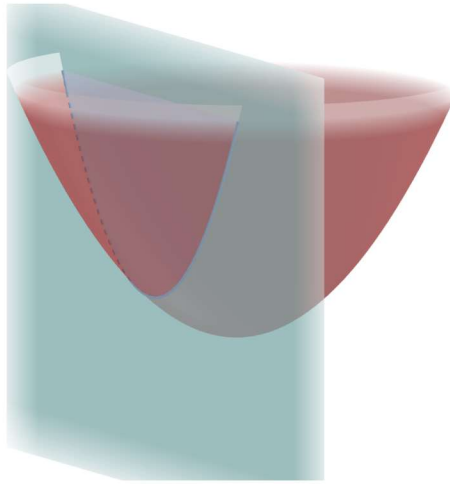


Slika 17: Eliptički paraboloid sa vrhom u  $(0, 0, 0)$



Slika 18: Presjek eliptičkog i kružnog paraboloida s ravninom  $z = k$

Presjek ravnina  $x = k$  i  $y = k$  s eliptičkim paraboloidom jesu parabole.

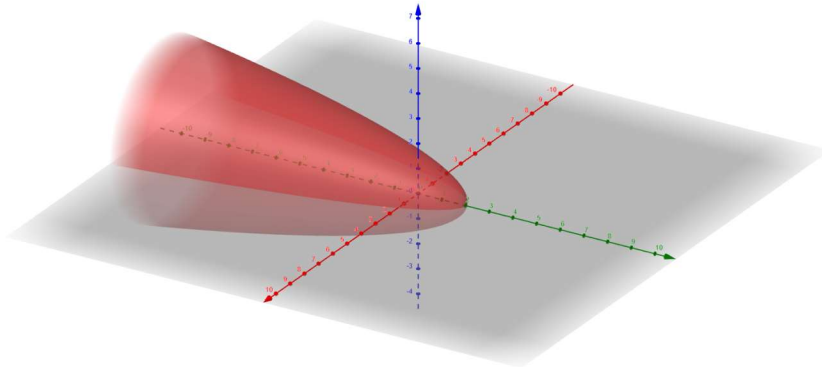


Slika 19: Presjek eliptičkog paraboloida s ravninom  $x = k$

Jednadžba transliranog eliptičkog paraboloida s vrhom u točki  $S = (x_0, y_0, z_0)$  dana je u obliku

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = z - z_0. \quad (14)$$

Eliptički paraboloid duž neke druge osi dobijemo zamjenom varijabli, a predznak nezavisne varijable govori nam na koju stranu je paraboloid okrenut. Pomaknuti i polegnuti eliptički paraboloid prikazan je na slici 19.



Slika 20: Eliptički paraboloid  $-y + 2 = x^2 + z^2$

## 2.4. Jednoplášni hiperboloid

Definicija je iz [10].

**Definicija 8.** *Jednoplášni hiperboloid je ploha parametrizirana jednadžbom*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (15)$$

Hiperboloid nije omeđen, te je simetričan obzirom na sve osi.

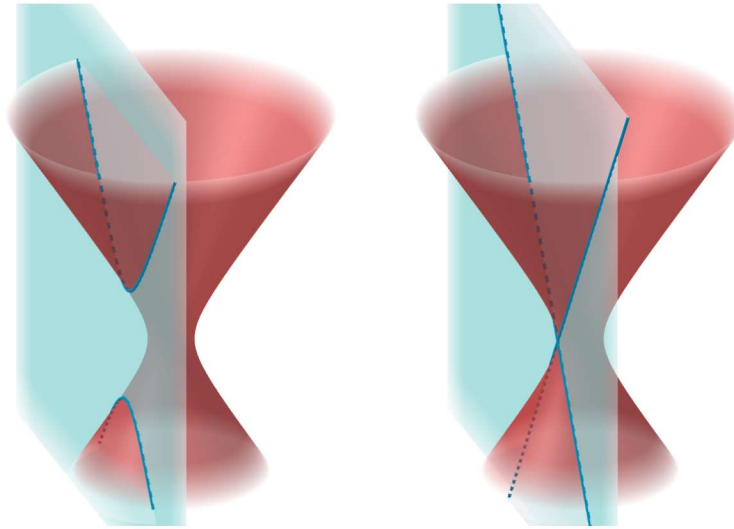


Slika 21: Jednoplášni hiperboloid

Nivo krivulje jednoplášnog hiperboloida su elipse sa središtem na osi  $z$ .  
Presjek jednoplášnog hiperboloida i ravnine

$$\begin{aligned} x = k : \text{za } k \neq \pm a & \text{ je hiperbola} \\ k = \pm a & \text{ su pravci} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y = k : \text{za } k \neq \pm b & \text{ je hiperbola} \\ k = \pm b & \text{ su pravci} \end{aligned}$$



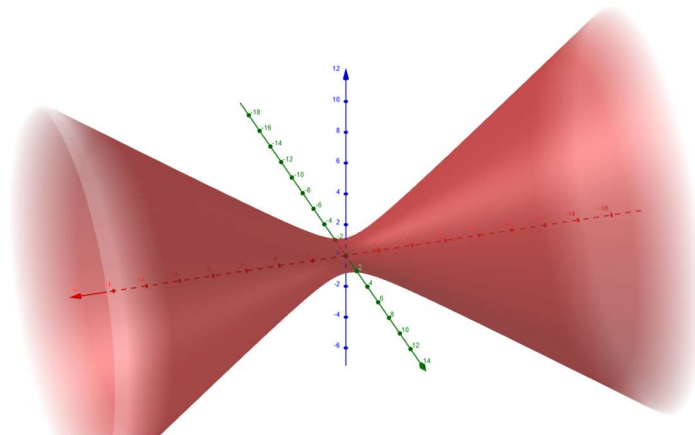
Slika 22: Presjeci jednoplošnog hiperboloida pravcem  $x = k$

Kada je  $a = b$ , hiperboloid je rotacijska ploha. Jednoplošni rotacijski hiperboloid nastaje rotacijom hiperbole oko njezine imaginarne osi.

Translatirani jednoplošni hiperboloid kao i kod ostalih ploha dobijemo pomicanjem središta hiperboloida. Jednadžba translatiranog jednoplošnog hiperboloida sa središtem u  $S(x_0, y_0, z_0)$  određena je

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1. \quad (16)$$

Zamjenom varijabli dobijemo jednoplošni hiperboloid uzduž neke druge osi (Slika 22).



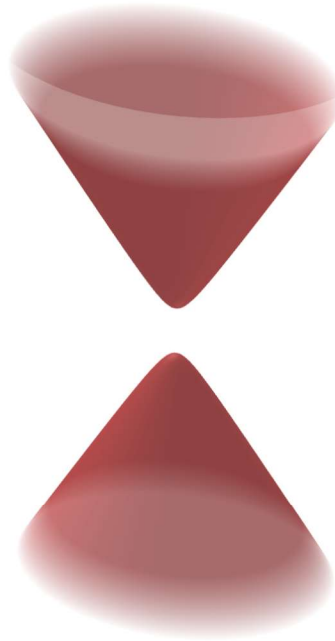
Slika 23:  $\frac{z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{c^2} = 1$

## 2.5. Dvoplošni hiperboloid

Definicija je preuzeta iz [10].

**Definicija 9.** *Dvoplošni hiperboloid je ploha drugog reda generirana točkama koje zadovoljavaju jednadžbu*

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, a \geq b. \quad (17)$$



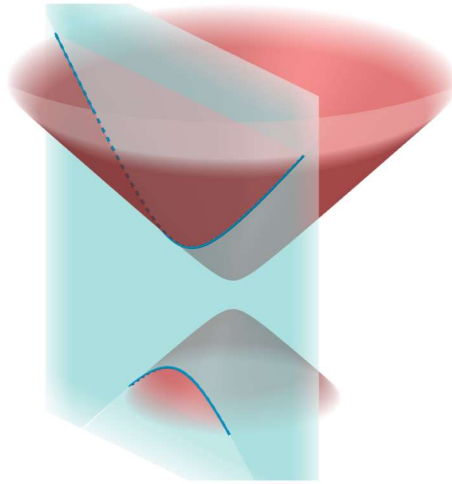
Slika 24: Dvoplošni hiperboloid

Također nije omeđen te je simetričan obzirom na sve koordinatne osi.  
Presjek jednoplošnog hiperboloida i ravnine

$x = k$  : je hiperbola

$y = k$  : je hiperbola





Slika 25: Dvoplošni hiperboloid presječen ravninom  $x = k$

Dvoplošni rotacijski hiperboloid nastaje rotacijom hiperbole oko njezine imaginarne osi.

Jednadžba transliranog jednoplošnog hiperboloida sa središtem u  $S(x_0, y_0, z_0)$  određena je

$$-\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1. \quad (18)$$

Kao u prethodnim plohama, cikličkom zamjenom varijabli dobivamo hiperboloid koji se proteže uzduž neke druge koordinatne osi.

## Literatura

- [1] N. ELEZOVIĆ, B. DAKIĆ, *Matematika 3, udžbenik i zbirka zadataka za 3. razred prirodoslovne gimnazije*, Element, Zagreb, 1998.
- [2] Ž. MILIN ŠIPUŠ, M. BOMBARDELLI, *Analitička geometrija*, skripta, Matematički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb 2008
- [3] A. I. MIROŠEVIĆ, N. KOCEIĆ-BILAN, J. JURKO, *Različiti nastavno-metodički pristupi čunjosječnicama*, math.e (Hrvatski matematički elektronički časopis), dostupno na, <http://e.math.hr/broj27/mirosevic>, kolovoz 2022.
- [4] B. PAVKOVIĆ, D. VELJAN, *Elementarna matematika 2*, Školska knjiga, Zagreb 1995.
- [5] I. SLOVIĆ, *Konike i Dandelinove kugle*, Matka 21, br. 82,
- [6] M. SUVALJ, *Krivulje drugog reda i primjene*,, dostupno na <http://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/SUV03.pdf>, kolovoz 2022
- [7] <http://lavica.fesb.unist.hr/mat2/predavanja/node50.html>
- [8] [https://upwikihr.top/wiki/Apollonius\\_of\\_Perga](https://upwikihr.top/wiki/Apollonius_of_Perga)
- [9] [https://www.pmf.unizg.hr/\\_download/repository/3DGrafika.html](https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/3DGrafika.html)
- [10] <http://www.staff.city.ac.uk/o.castro-alvaredo/teaching/surfaces.pdf>