Operatori na unitarnim prostorima

Basić, Lea

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Lea Basić

Operatori na unitarnim prostorima

Završni rad

Osijek, 2023.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Lea Basić

Operatori na unitarnim prostorima

Završni rad

Mentor: prof. dr. sc. Ivan Matić

Osijek, 2023.

Sažetak

Cilj ovog rada je iskazati i dokazati spektralni teorem. Na početku ćemo navesti definicije koje će biti važne za shvaćanje i dokazivanje teorema. Također ćemo iskazati i dokazati teoreme čiji će rezultati pomoći pri dokazivanju spektralnog teorema.

Ključne riječi

linearan operator, svojstvene vrijednosti, unitaran prostor, spektralni teorem, normalni operator

Transformations on unitary spaces

Summary

In this paper we will state and prove spectral theorem. At the beginning there will be given some definitions that will be important for understanding and proving the theorem. Some other theorems, whose results will help in proving the spectral theorem, will also be stated and proved.

Keywords

linear operator, eigenvalues, inner product space, spectral theorem, normal operator

Sadržaj

Uvod

Na samom početku rada bit će navedene neke definicije koje će biti korisne kako bi se pobliže shvatilo o čemu će biti riječ u ostatku rada. U prvoj cjelini rada bit će navedeni neki rezultati koji će u ostatku rada pomoći pri shvaćanju te dokazivanju raznih teorema, sve u svrhu iskazivanja i dokazivanja spektralnog teorema. Definirajmo za početak osnovne pojmove.

Definicija 1. *([1], Definition 3.2) Neka su V i W proizvoljni vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$. Preslikavanje $A : V \to W$ nazivamo linearan operator ukoliko vrijedi*

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay,\ \forall x, y \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}.$$

Definicija 2. *([1], Definition 5.5) Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i neka je $A \in L(V)$. Kažemo da je skalar $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ svojstvena vrijednost operatora A ukoliko postoji vektor $x \in V$, $x \neq 0$, takav da je $Ax = \lambda_0 x$. Skup svih svojstvenih vrijednosti operatora A nazivamo spektar operatora A i označavamo sa $\sigma(A)$.*

Napomena 1. *([1], Definition 5.7) Vektor x iz prethodne definicije nazivamo svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednsti λ_0. Svojstveni vektor nije jedinstven.*

Definicija 3. *([1], Definition 8.24) Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor te neka je $A \in L(V)$ i $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Neka je*

$$k_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^l p(\lambda),\ p(\lambda_0) \neq 0,\ l \in \mathbb{N}.$$

Broj l nazivamo algebarska kratnost svojstvene vrijednosti λ_0 i označavamo ga s $l(\lambda_0)$.

Definicija 4. *([1], Definition 5.2) Neka je V vektorski prostor i $A \in L(V)$. Kažemo da je potprostor $M \leq V$ invarijantan za A ako vrijedi $A(M) \subseteq M$, odnosno $Ax \in M, \forall x \in M$.*

Definicija 5. *([1], Definition 6.3) Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Skalarni produkt na V je preslikavanje*

$$(\cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbb{F}$$

koje ima sljedeća svojstva:

1. $(x, x) \geq 0,\ \forall x \in V$
2. $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y),\ \forall x_1, x_2, y \in V$
4. $(\alpha x, y) = \alpha(x, y),\ \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall x, y \in V$
5. $(x, y) = \overline{(y, x)},\ \forall x, y \in V.$

Napomena 2. *Realan vektorski prostor V na kojemu je definiran skalarni produkt iz definicije 5 nazivamo euklidski prostor.*

Definicija 6. *([1], Definition* 6.5*) Vektorski prostor na kojem je definiran skalarni prostor zove se unitaran prostor.*

Definicija 7. *([1], Definition* 7.37*) Neka su V i W unitarni prostori takvi da je $dimV = dimW$. Kažemo da je $A \in L(V, W)$ unitaran operator ukoliko vrijedi*

$$(Ax, Ay) = (x, y), \ \forall x, y \in V.$$

Definicija 8. *([1], Definition* 7.11*) Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor i neka je $A \in L(V)$. Operator $A^* \in L(V)$ sa svojstvom*

$$(Ax, y) = (x, A^*y), \ \forall x, y \in V$$

zove se hermitski adjungiran operator operatoru A.

Definicija 9. *([1], Definition* 7.18*) Neka je V unitaran prostor i neka je $A \in L(V)$. Kažemo da je operator A normalan ukoliko vrijedi $AA^* = A^*A$.*

Definicija 10. *([1], Definition* 7.31*) Za operator $A \in L(V)$ kažemo da je pozitivan ukoliko vrijedi da je A samoadjungiran operator te*

$$(Av, v) \geq 0, \ \forall v \in V.$$

Definicija 11. *([1], Definition* 7.31*) Za operator $A \in L(V)$ kažemo da je strogo pozitivan ukoliko vrijedi da je A samoadjungiran operator te*

$$(Av, v) > 0, \ \forall v \in V.$$

Definicija 12. *([1], Definition* 9.2*) Neka je V realan vektorski prostor. Kompleksifikacija vektorskog prostora V, u oznaci V_C, jednaka je $V \times V$. Elementi prostora V_C su uređeni parovi (u, v), pri čemu je $u, v \in V$. Također, možemo pisati $u + iv$.*

Definicija 13. *([1], Definition* 9.5*) Neka je V realan vektorski prostor te neka je $A \in L(V)$. Kompleksifikacija operatora A, u oznaci A_C, je operator $A_C \in L(V_C)$ definiran kao*

$$T_C(u + iv) = Tu + iTv, \ u, v \in V.$$

Sada kada su navedene definicije pojmova koji će se koristiti u radu mogu se iskazati i dokazati neke tvrdnje koje će nam biti potrebne pri dokazivanju spektralnog teorema.

1 Karakterizacija spektara

U ovom poglavlju bit će navedeno nekoliko rezultata koji će biti potrebni za dokazivanje spektralnog teorema.

Kroz nekoliko sljedećih rezultata moguće je vidjeti analogiju između brojeva i operatora. Naime, sljedeće tvrdnje ukazuju na to da se svojstva, zbog kojih smo definirali posebne klase operatora, odražavaju u njihovim spektrima.
U nastavku pogledajmo neke od spomenutih rezultata kroz par teorema.

Teorem 1. *([2], poglavlje 78, Theorem 1) Ako je A samoadjungirani operator na unitarnom prostoru, tada je svaka svojstvena vrijednost od A realna. Ako je A pozitivan, odnosno strogo pozitivan, tada je svaka svojstvena vrijednost od A pozitivna, odnosno strogo pozitivna.*

Dokaz: Zanemarimo činjenicu da je prva tvrdnja trivijalna u slučaju realnih brojeva. Na isti način možemo dokazati obje tvrdnje u slučajima kada promatramo realne i kompleksne brojeve.
Naime, ako je

$$Ax = \lambda x,$$

pri čemu je $x \neq 0$, tada je

$$\frac{(Ax, x)}{\|x\|^2} = \frac{\lambda(x, x)}{\|x\|^2} = \lambda,$$

pri čemu slijedi da ukoliko je (Ax, x) realan, tada je λ također realan broj, odnosno ukoliko je (Ax, x) pozitivan, onda je i λ pozitivan. $\square$

Teorem 2. *([2], poglavlje 78, Theorem 2) Svaki korijen karakteristične jednadžbe samoadjungiranog operatora na konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru je realan.*

Dokaz: U slučaju kompleksnih brojeva, korijeni karakteristične jednadžbe su jednaki kao i svojstvene vrijednosti pa rezultat proizlazi iz Teorema 1.
Nadalje, ako je A simetrični operator na euklidskom prostoru, tada je njegova kompleksifikacija A^+ hermitska, a rezultat proizlazi iz činjenice da A i A^+ imaju jednake karakteristične jednadžbe. $\square$

Uočimo da je neposredna posljedica prethodnog teorema ta da samoadjungirani operator konačnodimenzionalnog unitarnog prostora uvijek ima svojstvene vrijednosti.

Teorem 3. *([2], poglavlje 78, Theorem 3) Apsolutna vrijednost svake svojstvene vrijednosti izometrije iznosi jedan.*

Dokaz: Pretpostavimo da je U izometrija. Ukoliko je

$$Ux = \lambda x,$$

tako da je $x \neq 0$, tada je

$$\|x\| = \|Ux\| = |\lambda| \cdot \|x\|,$$

odnosno $|\lambda| = 1$. $\square$

Teorem 4. *([2], poglavlje 78, Theorem 4) Ako je A ili samoadjungirani operator ili izometrija, tada su svojstveni vektori od A koji pripadaju različitim svojstvenim vrijednostima ortogonalni.*

Dokaz: Pretpostavimo da je

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1, Ax_2 = \lambda_2 x_2, \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Ako je A samoadjungirani operator, tada vrijedi

$$\lambda_1(x_1, x_2) = (Ax_1, x_2) = (x_1, Ax_2) = \lambda_2(x_1, x_2).$$

Prve dvije jednakosti proizlaze iz činjenice da je A samoadjungiran, dok treća jednakost proizlazi iz činjenice da je λ_2 realan.
Ako je A izometrija, tada vrijedi sljedeće

$$(x_1, x_2) = (Ax_1, Ax_2) = (\lambda_1/\lambda_2)(x_1, x_2).$$

U oba slučaja bi iz $(x_1, x_2) \neq 0$, slijedilo da je $\lambda_1 = \lambda_2$, a na početku smo pretpostavili suprotno te zaključujemo da je $(x_1, x_2) = 0$. □

Teorem 5. *([2], poglavlje 78, Theorem 5) Ako je potprostor M invarijantan obzirom na izometriju U na konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru, tada je i $M^\perp$ također invarijantan ozbirom na U.*

Dokaz: Uzme li se u obzir da je na konačnodimenzionalnom potprostoru M operator U i dalje izometrija, tada je on i dalje invertibilan.
Sada slijedi da se svaki x iz potprostora M može zapisati u obliku $x = Uy$, pri čemu je y iz M.
Drugim riječima, ako je x iz potprostora M i $y = U^{-1}x$, tada je y također iz potprostora M. Dakle, M je invarijantan obzirom na $U^{-1} = U^*$. Sada iz toga slijedi da je $M^\perp$ invarijantan obzirom na $(U^*)^* = U$, a to je upravo ono što je trebalo pokazati. □

Teorem 6. *([2], poglavlje 78, Theorem 6) Ako je A samoadjungirani operator na konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru, tada je algebarska kratnost svake svojstvene vrijednosti λ_0 od A jednaka njenoj geometrijskoj kratnosti, to jest dimenziji potprostora M svih rješenja od $Ax = \lambda_0 x$.*

Dokaz: Jasno je da je M invarijantan obzirom na A pa je zbog toga i $M^\perp$ također invarijantan obzirom na A prema Teoremu 5. Označimo sada s B, odnosno C linearan operator A razmatran samo na M, odnosno $M^\perp$. Sada imamo

$$det(A - \lambda) = det(B - \lambda) \cdot det(C - \lambda),$$

za svaki λ.
Budući da je B samoadjungirani operator na konačnodimenzionalnom prostoru sa samo

jednom svojstvenom vrijednošću λ_0, slijedi da se λ_0 mora pojaviti kao svojstvena vrijednost od B s algebarskom kratnošću jednakoj dimenziji od M. Ukoliko ta dimenzija iznosi m, tada je $det(B - \lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^m$.
Kako, u drugu ruku, λ_0 nije svojstvena vrijednost od C i budući da je $det(C - \lambda_0) \neq 0$, slijedi da $det(A - \lambda)$ sadrži $(\lambda_0 - \lambda)$ kao faktor točno m puta te je tvrdnja time dokazana.

$\square$

Ono što je pomoglo u dokazivanju prethodnog teorema jest to da je $M^\perp$ invarijantan te činjenica da je svaki korijen karakteristične jednadžbe od A ujedno i svojstvena vrijednost od A. Zadnja tvrdnja je istinita za svaki linearan operator na unitarnom prostoru.
Sljedeći rezultat je direktna posljedica tih zapažanja te Teorema 5.

Teorem 7. *([2], poglavlje 78, Theorem 7) Ako je U unitaran operator na konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru, tada je algebarska kratnost svake svojstvene vrijednosti od U jednaka njenoj geometrijskoj kratnosti.*

2 Spektralni teorem

Sada kada smo prošli kroz rezultate koji će nam biti bitni za razumijevanje spektralnog teorema, možemo prijeći i na njegovo iskazivanje te dokazivanje.

Teorem 8. *([2], poglavlje* 79*, Theorem* 1*) Svakom samoadjungiranom linearnom operatoru* A *na konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru odgovaraju realni brojevi* $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ *i okomite projekcije* $E_1, \ldots, E_r$ *(gdje je* r *prirodan broj, ne veći od dimenzije prostora) tako da vrijedi:*

1. α_j *su međusobno,*
2. E_j *su u parovima ortogonalni i različiti od 0,*
3. $\sum_j E_j = 1$,
4. $\sum_j \alpha_j E_j = A$.

Dokaz: Neka su $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ različite svojstvene vrijednosti od A te neka su E_j ortogonalne projekcije na potprostor koji se sastoji od svih rješenja $Ax = \alpha_j x$, $(j = 1, \ldots, r)$.
Uvjet 1. je odmah zadovoljen po definiciji. Činjenica da su sve α realni brojevi slijedi iz prethodnog poglavlja iz Teorema 1.
Nadalje, uvjet 2. slijedi iz prethodnog poglavlja iz Teorema 4.
Iz uvjeta ortogonalnosti od E_j zaključujemo da ako vrijedi da je $E = \sum_j E_j$, tada je E ortogonalna projekcija. Dimenzija slike od E jednaka je sumi dimenzija slika od E_j te iz Teorema 6 iz prethodnog poglavlja slijedi da je dimenzija slike od E jednaka dimenziji cijelog prostora. S time je dokazan uvjet 3. Alternativno, kada bi vrijedilo da je $E \neq 1$, tada bi A promatranog u slici od $1 - E$ bio samoadjungirani operator koji ne bi imao svojstvenih vrijednosti.
Kako bi dokazali uvjet 4. uzmimo bilo koji vektor x i zapišimo ga na način $x_j = E_j x$. Iz toga slijedi da je $Ax_j = \alpha_j x_j$ te stoga vrijedi

$$Ax = A\left(\sum_j E_j x\right) = \sum_j Ax_j = \sum_j \alpha_j x_j = \sum_j \alpha_j E_j x.$$

S time je spektralni teorem dokazan. □

Prikaz oblika $A = \sum_j \alpha_j E_j$ (gdje svi α i svi E zadovoljavaju uvjete 1. do 3. Teorema 8 nazivamo spektralna forma od A.
Najveća važnost sljedećeg teorema leži u dokazivanju jedinstvenosti spektralne forme.

Teorem 9. *([2], poglavlje* 79*, Theorem* 2*) Ako je* $\sum_{j=1}^{r} \alpha_j E_j$ *spektralna forma samoadjungiranog operatora* A *na konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru, tada su svi* $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ *različite svojstvene vrijednosti operatora* A*. Štoviše, ako je* $1 \leq k \leq r$*, tada postoje polinomi* p_k *s realnim koeficijentima takvi da je* $p_k(\alpha_j) = 0$ *za sve* $j \neq k$ *i takvi da je* $p_k(\alpha_k) = 1$*. Za svaki takav polinom vrijedi* $p_k(A) = E_k$*.*

Dokaz: Budući da vrijedi da je $E_j \neq 0$, tada postoji vektor x u slici od E_j. Također, budući da je $E_j x = x$ i $E_i x = 0$ sve dok je $i \neq j$, slijedi da je

$$Ax = \sum_i \alpha_i E_i x = \alpha_j E_j x = \alpha_j x,$$

pri čemu je svaki α_j svojstvena vrijednost operatora A.
Obrnuto, ako je λ bilo koja svojstvena vrijednost operatora A, recimo $Ax = \lambda x$, pri čemu je $x \neq 0$, tada možemo pisati $x_j = E_j x$ i vidimo da vrijedi

$$Ax = \lambda x = \lambda \sum_j x_j$$

te

$$Ax = A \sum_j x_j = \sum_j \alpha_j x_j,$$

tako da je $\sum_j (\lambda - \alpha_j) x_j = 0$. Budući da su x_j u parovima međusobno ortogonalni, svi oni koji su različiti od nul-vektora tvoje linearno nezavisan skup. Slijedi da za svaki j vrijedi ili da je $x_j = 0$ ili $\lambda = \alpha_j$. Budući da vrijedi da je $x \neq 0$, mora vrijediti da je $x_j \neq 0$ za neke j pa je zbog toga λ jednaka nekom α_i.
Kako vrijedi $E_i E_j = 0$ ako $i \neq j$ i $E_j^2 = E_j$, slijedi da je

$$A^2 = \left(\sum_i \alpha_i E_i \right) \left(\sum_j \alpha_j E_j \right) = \sum_i \sum_j \alpha_i \alpha_j E_i E_j = \sum_j \alpha_j^2 E_j.$$

Slično se pokaže da tada vrijedi

$$A^n = \sum_j \alpha_j^n E_j$$

za svaki prirodan broj n (u slučaju kada je $n = 0$ koristimo uvjet 3.). Stoga je

$$p(A) = \sum_j p(\alpha_j) E_j$$

za svaki polinom p. Kako bi priveli dokaz kraju, sve što nam je potrebno jest pronaći polinom p_k tako da vrijedi $p_k(\alpha_j) = 0$ za sve $j \neq k$ te $p_k(\alpha_k) = 1$. Zapišimo

$$p_k(t) = \prod_{j \neq k} \frac{t - \alpha_j}{\alpha_k - \alpha_j},$$

tada dobivamo polinom p_k sa svim traženim svojstvima. □

Sljedeći teorem daje nam dužan i dovoljan uvjet komutativnosti linearnih operatora B i A na konačnodimenzionalnim unitarnim prostorima.

Teorem 10. *([2], poglavlje 79, Theorem 3) Ako je $\sum_{j=1}^{r} \alpha_j E_j$ spektralna forma samoadjungiranog operatora A na konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru, tada linearni operator B komutira s A ako i samo ako on komutira sa svakim od E_j.*

Dokaz: Dokazati dovoljnost uvjeta je trivijalna. Ako je $A = \sum_j \alpha_j E_j$ te $E_j B = B E_j$ za svaki j, tada vrijedi da je $AB = BA$. Nužnost slijedi iz Teorema 9. Naime, ako B komutira s A, tada B komutira sa svim polinomima iz A, stoga B komutira sa svakim od E_j. □

3 Normalni operatori

Najjednostavnija, a istovremeno i najkorisnija generalizacija spektralnog teorema primjenjuje se na kompleksne unitarne prostore. Kako bi se izbjegle moguće komplikacije, u ovom poglavlju isključit ćemo realne slučajeve i posvetiti pažnju samo na kompleksne unitarne prostore.
Znamo da se svaki proizvoljan operator A može zapisati u formi $B + iC$, pri čemu su B i C hermitski operatori. Postavlja se pitanje zbog čega se ne bi moglo dijagonalizirati A na način da dijagonaliziramo B i C zasebno. Odgovor leži u tome da dijagonalizacija uključuje izbor prikladne ortonormirane baze, a ne mora vrijediti da bi baza koja se koristi za dijagonalizaciju operatora B imala isti učinak i za operator C.
Znamo da je operator A normalan ako i samo ako njegov realni i imaginarni dio komutiraju. Primjerice, pretpostavimo da je A normalan operator te da vrijedi $A = B + iC$, pri čemu su B i C hermitski. Budući da je $B = \frac{1}{2}(A + A^*)$ i $C = \frac{1}{2i}(A - A^*)$, jasno je da je $BC = CB$. Obratno, ako je $BC = CB$, tada $A = B + iC$ i $A^* = B - iC$ impliciraju da je A normalan operator. Dakle, hermitski i unitarni operatori su normalni.

Teorem 11. *([2], poglavlje* 80, *Theorem* 1*) Neka je A normalan operator. Vrijedi da je x svojstveni vektor od A ako i samo ako vrijedi da je x svojstveni vektor od A^*. Ako je $Ax = \lambda x$, tada je $A^*x = \bar{\lambda}x$.*

Dokaz: Normalnost operatora A implicira sljedeće

$$\|Ax\|^2 = (Ax,\, Ax) = (A^*Ax,\, x) = (AA^*x,\, x) = (A^*x,\, A^*x) = \|A^*x\|^2.$$

Kako je $A - \lambda$ normalan te budući da je $(A - \lambda) = A^* - \bar{\lambda}$, imamo sljedeću relaciju

$$\|Ax - \lambda x\| = \|A^*x - \bar{\lambda}x\|,$$

iz čega jasno slijede tvrdnje teorema. □

Teorem 12. *([2], poglavlje* 80, *Theorem* 2*) Ako je A normalan operator, tada su svojstveni vektori koje pripadaju različitim svojstvenim vrijednostima ortogonalni.*

Dokaz: Neka su $Ax_1 = \lambda_1 x_1$ te $Ax_2 = \lambda_2 x_2$. Tada je

$$\lambda_1(x_1,\, x_2) = (Ax_1,\, x_2) = (x_1, A^*x_2) = \lambda_2(x_1,\, x_2).$$

□

Prethodni teorem je generalizacija Teorema 4.

Teorem 13. *([2], poglavlje* 80, *Theorem* 3*) Ako je A normalan operator, λ svojstvena vrijednost operatora A te M skup svih rješenja $Ax = \lambda x$, tada su M i $M^\perp$ invarijantni obzirom na A.*

Dokaz: Činjenica da je M invarijantan obzirom na A nema nikakve veze s time da je A normalan operator. Kako bismo dokazali da je $M^\perp$ također invarijantan obzirom na A, nužno je dokazati da je M invarijantan obzirom na A^*, a to je vrlo jednostavno. Ako je x iz M, tada vrijedi

$$A(A^*x) = A^*(Ax) = \lambda(A^*x),$$

tako da vrijedi da je A^*x također u M. □

Kada bismo u teoremima iz prethodnog poglavlja riječ 'samoadjungiran' zamijenili s riječi 'normalan' te kada bismo inzistirali da unitaran prostor bude kompleksan, tada bi ostale tvrdnje te svi dokazi ostali potpuno nepromijenjeni. U teoriji proučavanja unitarnih prostora, teorija normalnih operatora jest ta koja je od glavnog značaja.

Teorem 14. *([2], poglavlje 80, Theorem 4) Normalan operator na konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru je* (1) *hermitski,* (2) *pozitivan,* (3) *strogo pozitivan,* (4) *unitaran,* (5) *invertibilan,* (6) *idempotentan ako i samo ako su sve njegove svojstvene vrijednosti* (1′) *realne,* (2′) *pozitivne,* (3′) *strogo pozitivne,* (4′) *apsolutne vrijednosti jedan,* (5′) *različite od nule,* (6′) *jednake nula ili jedan.*

Dokaz: Dokazi da (1), (2), (3) i (4) povlače (1′), (2′), (3′), odnosno (4′) slijede direktno iz rezultata koje smo dokazali u prvom poglavlju. Nadalje, ako je A invertibilan operator i $Ax = \lambda x$, pri čemu je $x \neq 0$, tada je $x = A^{-1}Ax = \lambda A^{-1}x$ te je zbog toga $\lambda \neq 0$. Time smo pokazali da (5) povlači (5′). Ako je A idempotentan i $Ax = \lambda x$, pri čemu je $x \neq 0$, tada je $\lambda x = Ax = A^2x = \lambda^2 x$, tako da je $(\lambda - \lambda^2)x = 0$ te je zbog toga $\lambda = \lambda^2$. Time je pokazano da (6) povlači (6′).
Uočimo da ove tvrdnje vrijede za proizvoljne unitarne prostore (ne moraju čak biti niti konačnodimenzionalni).
Pretpostavimo sada da je spektralna forma operatora A jednak $\sum_j \alpha_j E_j$. Budući da je $A^* = \sum_j \bar{\alpha}_j E_j$, jasno je da (1′) povlači (1). Budući da je

$$(Ax, x) = \sum_j \alpha_j ()E_j x, x) = \sum_j \alpha_j \|E_j x\|^2,$$

slijedi da (2′) povlači (2). Ako je $\alpha_j > 0$ i ako je $(Ax, x) = 0$, tada mora vrijediti da je $E_j x = 0$ za svaki j te je stoga $x = \sum_j E_j x = 0$. Tako je dokazano da (3′) povlači (3). Kako bismo pokazali da (4′) povlači (4), potrebno je samo pogledati sljedeću relaciju

$$A^*A = \sum_j |\alpha_j|^2 E_j.$$

Ako je $\alpha_j \neq 0$ za sve j, može se definirati linearni operator $B = \sum_j \frac{1}{\alpha_j} E_j$. Budući da vrijedi $AB = BA = 1$, slijedi da (5′) povlači (5). Pogledamo li

$$A^2 = \sum_j \alpha_j^2 E_j,$$

iz toga zaključujemo da (6′) povlači (6) te je time teorem dokazan. □

Literatura

[1] S. Axler, *Linear Algebra Done Right*, Springer New York, NY, 2014.

[2] P.R. Halmos, *Finite-Dimensional Vector Spaces*, Springer New York, NY, 2011.