Hessenbergova, bidijagonalna i tridijagonalna dekompozicija

Dujček, Mateja

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni prijediplomski studij matematike

Mateja Dujček

Hessenbergova, bidijagonalna i tridijagonalna dekompozicija

Završni rad

Osijek, 2023.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni prijediplomski studij matematike

Mateja Dujček

Hessenbergova, bidijagonalna i tridijagonalna dekompozicija

Završni rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Darija Marković

Osijek, 2023.

Sažetak

Tema ovoga rada su matrice i različite dekompozicije matrica. Dekompozicija matrica je postupak kojim se složena matrica razvija kao produkt više složenih matrica kako bi se olakšala analiza ili rješavanje matematičkih problema. Rad se sastoji od tri dijela. U prvom djelu definirati ćemo Hessenbergovu dekompoziciju te navesti neka njezina svojstva. U drugom dijelu upoznati ćemo se sa tridijagonalnom dekompozicijom i njezinim svojstvima. U posljednjem dijelu definirati ćemo bidijagonalnu dekompoziciju te njezinu vezu sa tridijagonalnom dekompozicijom.

Ključne riječi

Householderov reflektor, Hessenbergova dekompozicija, tridijagonalna dekompozicija, bidijagonalna dekompozicija.

Hessenberg, Tridiagonal and Bidiagonal Decomposition

Summary

The topic of this paper are matrices and their different decompositions. Matrix decomposition is the process by which a complex matrix is developed as a product of multiple complex matrices in order to facilitate analysis or solving mathematical problems. The paper consists of three parts. In the first part we will define Hessenbergs decomposition and state some of its properties. In the second part, we will find more about the tridiagonal decomposition and its properties. Finally, we will define bidiagonal decomposition and its connection with tridiagonal decomposition.

Key words

Householder reflector, Hessenberg decomposition, tridiagonal decomposition, bidiagonal decomposition.

Sadržaj

Uvod

Numerička linearna algebra grana je numeričke matematike koja se bavi algoritmima korištenima u linearnoj algebri. Značajnu ulogu u linearnoj algebri imaju matrice.
U numeričkoj linearnoj algebri dekompozicija matrice je faktorizacija matrice u produkt matrica. Glavna ideja dekompozicije matrice je da se matrica zapiše kao produkt jednostavnijih matrica kako bi se ubrzalo rješavanje raznih problema. Cilj dekompozicije matrice je razumijeti strukturu matrice ili omogućiti učinkovito rješavanje zadataka, kao što su rješavanje sustava linearnih jednadžbi ili analize njezinih svojstvenih vrijednosti.
Jedan od prvih modernih tretmana dekompozicije matrica objavio je 1954.godine Alston S. Householder u svome djelu $Principles of Numerical Analysis$. Alston S. Householder najviše je zagovarao LU dekompoziciju - faktorizaciju matrice u produkt donje i gornje trokutaste matrice. Danas je dekompozicija matrice postala temeljna tehnologija u strojnom učenju, uglavnom zahvaljujući razvoju algoritma s unatranim rasprostiranjem prilikom prilagođavanja neuronske mreže.
U linearnoj algebri postoji mnogo različitih dekompozicija matrice, a svaka pronalazi upotrebu u određenoj klasi problema. U ovom radu opisat ćemo tri različite dekompozicije matrica te se upoznati s njihovim svojstvima.
Definicije, teoreme i napomene u okviru ovoga rada preuzete su iz udžbenika Numerical Matrix Decomposition, autora Jun Lu. Ostatak literature koristili smo kako bi opisali provedene korake pojedinih dekompozicija matrica i prilikom rješavanja primjera.

1 Hessenbergova dekompozicija

U cilju pojašnjenja Hessenbergove dekompozicije najprije se moramo upoznati sa Hessenbergovom matricom.

Definicija 1. *([4], str. 225)* ***Gornja (donja) Hessenbergova matrica*** *je kvadratna matrica u kojoj su svi elementi ispod (iznad) glavne subdijagonalne jednaki nuli. Matematički zapisano, kvadratna matrica A je* ***gornja Hessenbergova matrica*** *ako je $a_{ij} = 0$ za svaki i, j takvi da je $i > j + 1$.*

Primjer 1. *Matrice A i B dane ovim primjerom su gornje Hessenbergove matrice.*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 7 \\ 0 & 8 & 7 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 8 \\ 7 & 5 & 6 & 9 \\ 0 & 3 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Hessenbergova matrica je nereducirana ukoliko su svi elementi na glavnoj subdijagonali različiti od nule. U nastavku ovoga rada po koracima ćemo provesti dokaz sljedećeg teorema.

Teorem 1 (Hessenbergova dekompozicija)**.** *([4], str. 225) Svaku kvadratnu matricu A možemo zapisati u obliku*

$$A = QHQ^T,$$

gdje je H gornja Hessenbergova matrica,a Q ortogonalna matrica.

1.1 Postojanje Hessenbergove dekompozicije

Dokazat ćemo da se bilo koja kvadratna matrica reda n može reducirati do Hessenbergove matrice preko niza Householderovih transformacija. Hessenbergovu dekompoziciju provodimo po koracima, ali prije nego što objasnimo matematičku konstrukciju same dekompozicije slijedi napomena koja će nam u tome pomoći.

Napomena 1. *([4], str. 228) Neka je $A \in M_n$ kvadratna matrica i $H = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & H_{n-k} \end{bmatrix}$ gdje je I_k jedinična matrica reda k. Tada djelovanje matrice H na matricu A slijeva (zdesna) neće promijeniti prvih k redaka (stupaca) matrice A.*

Važnu ulogu za dobivanje Hessenberogve forme imati će Householderov reflektor pa se najprije trebamo upoznati s njegovom definicijom.

Definicija 2. *([4], str. 115) Neka je $u \in M_{n1}$ jedinični vektor. Tada za $H = I - 2uu^T$ kažemo da je Householderov reflektor.*

Napomena 2. *([4], str. 118) Ako je H Householderov reflektor, tada on ima sljedeća svojstva:*

- $HH = I$
- $H = H^T$
- $H^T H = H^T H = I$, *tako da je H ortogonalna matrica.*
- $Hu = -u$ *ako je* $H = I - 2uu^T$

1.1.1 Prvi korak: uvođenje nula u prvi stupac

Kao što je navedeno u [1], [4] objasnit ćemo prvi korak. Cilj prvog koraka je u prvom stupcu dobiti nule. U tu svrhu neka je $A = [a_1, a_2, ..., a_n]$, gdje su $a_i \in M_{n1}$. Pretpostavimo da su $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n} \in M_{n-1,1}$ vektori dobiveni uklanjanjem prve komponente vektora a_i.
Neka je

$$r_1 = ||\overline{a_1}||$$

$$u_1 = \frac{\overline{a_1} - r_1 e_1}{||\overline{a_1} - r_1 e_1||},$$

gdje je $e_1 = [1, 0, 0, ..., 0] \in M_{n-1,1}$ te neka je

$$\widetilde{H_1} = I - 2u_1 {u_1}^T \in M_{n-1}$$

U cilju dobivanja nula ispod subdijagonale Householderov reflektor dodajemo u matricu H_1 na sljedeći način: $H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \widetilde{H_1} \end{bmatrix}$.

Djelovanjem matrice $H_1 A$ dobit ćemo nule u prvom stupcu matrice A ispod elementa na poziciji $a_{2,1}$. Prema napomeni (1.1) prvi redak matrice A ostat će nepromijenjen. Matrice H_1 i $\widetilde{H_1}$ su ortogonalne i simetrične (prema definiciji (1.2)). Kako bismo dobili Hessenbergovu formu $H_1 A$ množimo zdesna s ${H_1}^T$ i dobivamo $H_1 A {H_1}^T$. Djelovanje matrice ${H_1}^T$ zdesna neće promijeniti prvi stupac matrice $H_1 A$.
U nastavku ovoga rada slijedi shematski prikaz 1. koraka Hessenbergove dekompozicije na kvadratnoj matrici reda 5 u kojemu znak $\boxtimes$ predstavlja element koji nije nužno jednak nuli, a $\boldsymbol{\boxtimes}$ element koji se određenim djelovanjem u tom koraku promijenio.

$$\underset{\boldsymbol{A}}{\begin{bmatrix} \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \end{bmatrix}} \xrightarrow{\boldsymbol{H_1}\times} \underset{\boldsymbol{H_1 A}}{\begin{bmatrix} \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} \end{bmatrix}} \xrightarrow{\times \boldsymbol{H_1^\top}} \underset{\boldsymbol{H_1 A H_1^\top}}{\begin{bmatrix} \boxtimes & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} \\ \boxtimes & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} \\ 0 & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} \\ 0 & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} \\ 0 & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} \end{bmatrix}}$$

Primjer 2. *Zapiši matricu A u gornjoj Hessenbergovoj formi koristeći Householderove reflektore.*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Rješenje:
Sljedeći primjer rješavat ćemo uz pomoć [1], [3]. Prilikom rješavanja ovoga primjera s H_1 ćemo označiti Householderov reflektor, a s H_s dobivenu matricu nakon prvog koraka. Trebamo pronaći Householderov reflektor tako da je $H_1AH_1^T = H_s$. Neka je vektor $a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $r_1 = ||a_1|| = 3$.

Nadalje, neka je $u = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, odakle slijedi da je $u = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$. Kako bismo mogli izračunati Householderov reflektor moramo naprije odrediti matrice uu^T i u^Tu .

$$uu^T = \begin{bmatrix} 16 & -8 & -8 \\ -8 & 4 & 4 \\ -8 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$u^Tu = 24$$

Odakle dobivamo da je:

$$\widetilde{H_1} = I - \frac{2uu^T}{u^Tu}$$

odnosno,

$$\widetilde{H_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{24}\begin{bmatrix} 16 & -8 & -8 \\ -8 & 4 & 4 \\ -8 & 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Iz čega slijedi da je Householderov reflektor jednak

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Kako je H_1 ortogonalna matrica njen inverz je sama ona tj.vrijedi da je $H_1 = H_1^T$. Iz čega slijedi da je $H_s = H_1AH_1^T = H_1AH_1$.

$$H_s = H_1AH_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Nakon toga jednostavnim uvrštavanjem dobivamo matricu H_s.

$$H_s = \begin{bmatrix} 1 & 10/3 & 1/3 & 4/3 \\ 3 & 0 & -4/3 & -5/3 \\ 0 & 3 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & 4 & 8/3 & -2/3 \end{bmatrix}$$

Uvrštavanjem smo završili prvi korak Hessenbergove dekompozicije. U nastavku rada najprije ćemo objasniti drugi korak Hessenbergove dekompozicije, a zatim ćemo ga primjeniti na matricu H_s.

1.1.2 Drugi korak: uvođenje nula u drugi stupac

Kao što je navedeno u [1], [4] objasnit ćemo drugi korak. Nakon završenog prvog koraka slijedi drugi korak čiji je cilj uvesti nule u drugi stupac dane matrice. Neka je najprije $B = H_1 A {H_1}^T$, gdje su svi elementi ispod elementa na poziciji $a_{2,1}$ jednaki nula.
Cilj drugog koraka je da svi elementi ispod elementa na poziciji $a_{3,2}$ također budu jednaki nula. U tu svrhu neka je

$$B_2 = [b_1, b_2, ..., b_{n-1}].$$

Pretpostavimo da su $\overline{b_1}, \overline{b_2}, ..., \overline{b_{n-1}} \in M_{n-2,1}$ vektori dobiveni uklanjanjem prve komponente vektora b_i.

Konstruiramo Householderov reflektor na sljedeći način

$$r_1 = ||\overline{b_1}||$$

$$u_1 = \frac{\overline{b_1} - r_1 e_1}{||\overline{b_1} - r_1 e_1||},$$

gdje je $e_1 = [1, 0, 0, ..., 0] \in M_{n-2,1}$ te neka je $\widetilde{H_2} = I - 2u_2{u_2}^T \in M_{n-2}$.

Nadalje, Householderov reflektor dodajemo matrici H_2 na sljedeći način $H_2 = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & \widetilde{H_2} \end{bmatrix}$ gdje je I_2 jedinična matrica reda 2. Primjećujemo da djelovanje $H_2 H_1 A {H_1}^T$ neće promijeniti prva dva retka matrice $H_1 A {H_1}^T$ i da će nule iz prvoga retka ostati nepromijenjeni. Ponovno djelovanje ${H_2}^T$ zdesna na $H_2 H_1 A {H_1}^T$ neće promijeniti prva dva stupca te će nule ostati.

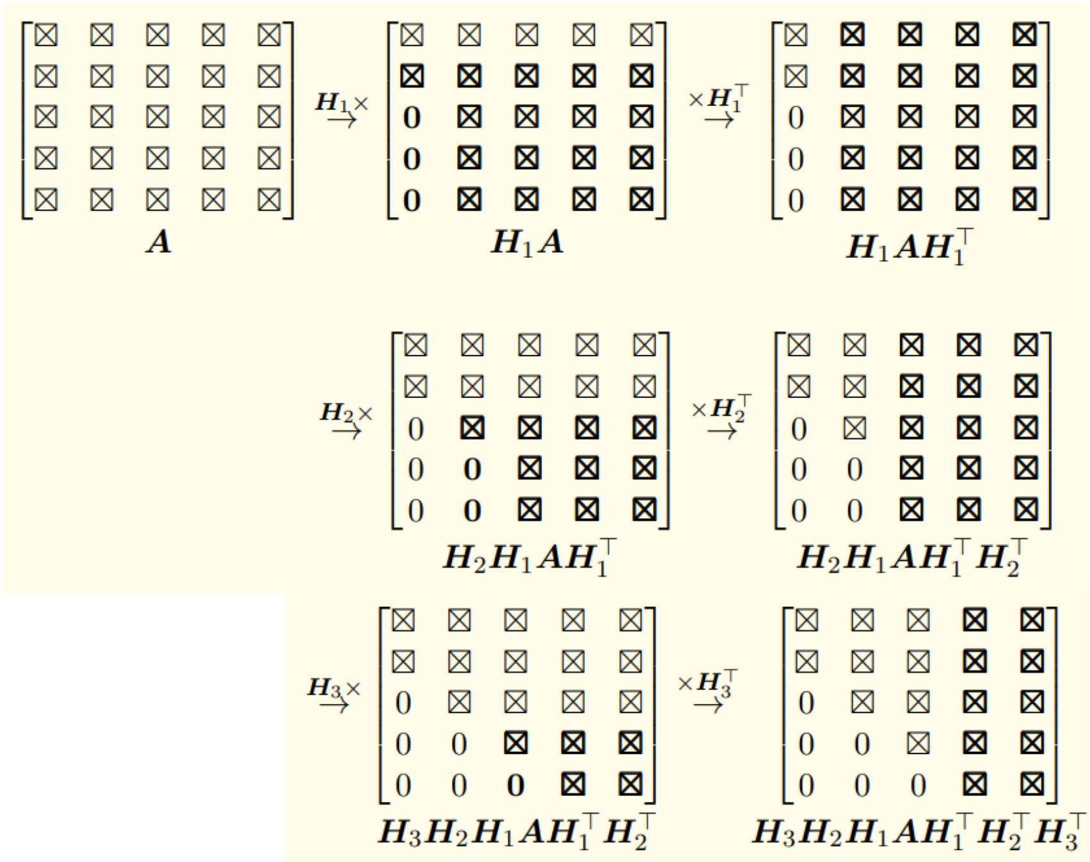
Shematski prikaz drugog koraka Hessenbergove dekompozicije kvadratne matrice reda 5 s jednakim oznakama kao iz shematskog prikaza prvog koraka slijedi u nastavku.

$$\underset{\boldsymbol{H_1 A H_1^\top}}{\begin{bmatrix} \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ 0 & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ 0 & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ 0 & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \end{bmatrix}} \xrightarrow{\boldsymbol{H_2}\times} \underset{\boldsymbol{H_2 H_1 A H_1^\top}}{\begin{bmatrix} \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ 0 & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} \\ 0 & \mathbf{0} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} \\ 0 & \mathbf{0} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} \end{bmatrix}} \xrightarrow{\times\boldsymbol{H_2^\top}} \underset{\boldsymbol{H_2 H_1 A H_1^\top H_2^\top}}{\begin{bmatrix} \boxtimes & \boxtimes & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} \\ 0 & \boxtimes & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} \\ 0 & 0 & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} \\ 0 & 0 & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} \end{bmatrix}}$$

Identičan proces provodi se u narednih $n-2$ koraka. Tada vrijedi:

$$H = H_{n-2} H_{n-3} ... H_1 A {H_1}^T {H_2}^T ... {H_{n-2}}^T$$

Cijeli proces Hessenbergove dekompozicije matrice 5×5 dan je u nastavku ovoga rada.



Slika 1: Shematski prikaz Hessenbergove dekompozicije na kvadratnoj matrici reda 5

Primjer 3. *Zapiši matricu A u gornjoj Hessenbergovoj formi koristeći Householderove reflektore.*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Rješenje:

Sljedeći primjer rješavat ćemo uz pomoć [1], [3]. U nastavku ćemo se nadovezati na rezultate dobivene u prethodnom primjeru. U prethodnom primjeru dobili smo da je matrica H_s s kojom smo označili matricu koju smo dobili nakon prvog koraka Hessenbergove dekompozicije jednaka

$$H_s = \begin{bmatrix} 1 & 10/3 & 1/3 & 4/3 \\ 3 & 0 & -4/3 & -5/3 \\ 0 & 3 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & 4 & 8/3 & -2/3 \end{bmatrix}.$$

Radi jednostavnosti i kako bi pratili objašnjenje drugog koraka u nastavku ćemo tu matricu označiti s $B = H_s$, s H Hessenbegovu matricu i H_2 će označavati Householderov reflektor.
Neka je vektor $b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $r_1 = -5$.
Nadalje, neka je $u = -5\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ odakle slijedi da je $u = \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \end{bmatrix}$. Kako bismo mogli izračunati Householderov reflektor moramo naprije odrediti matrice uu^T i u^Tu .

$$uu^T = \begin{bmatrix} 64 & 32 \\ 32 & 16 \end{bmatrix}$$

$$u^Tu = 80$$

Odakle dobivamo da je:

$$\widetilde{H_2} = I - \frac{2uu^T}{u^Tu}$$

odnosno,

$$\widetilde{H_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{80}\begin{bmatrix} 64 & 32 \\ 32 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/5 & -4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

Iz čega slijedi da je Householderov reflektor jednak

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3/5 & -4/5 \\ 0 & 0 & -4/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

Kako je H_2 ortogonalna matrica njen inverz je sama ona tj.vrijedi da je $H_2 = H_2^T$. Iz čega slijedi da je $H = H_2BH_2^T = H_2BH_2$.

$$H = H_2BH_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3/5 & -4/5 \\ 0 & 0 & -4/5 & 3/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3/5 & -4/5 \\ 0 & 0 & -4/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

Nakon toga jednostavnim uvrštavanjem dobivamo gornju Hessenbergovu matricu H.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 10/3 & -19/15 & 8/15 \\ 3 & 0 & 32/15 & 1/15 \\ 0 & -5 & 58/75 & 194/75 \\ 0 & 0 & -56/75 & -58/75 \end{bmatrix}$$

1.2 Svojstva Hessenbergove dekompozicije

Hessenbergova dekompozicija je poseban način faktorizacije matrice koji je koristan u rješavanju numeričkih problema kao što su rješavanje linearnih sustava ili dijagonalizacija matrica. Kako bi bolje razumijeli Hessenbergovu dekompoziciju u nastavku ćemo iskazati i dokazi sljedeći teorem.

Teorem 2 (Implicitni Q teorem za Hessenbergovu dekompoziciju). *([4], str. 234) Neka je $A = UHU^T = VHV^T$ Hessenbergova dekompozicija matrice $A \in M_n$,gdje je $U = [u_1, u_2, ..., u_n]$ i*
$V = [v_1, v_2, ..., v_n]$. Pretpostavimo da je k najmanji pozitivni cijeli broj za koji je $h_{k+1.k} = 0$, gdje je h_ij element na (i, j) poziciji od H.Ukoliko je $u_1 = v_1$ tada je $u_i = \pm v_i$ i
$|h_{i,i-1}| = |g_{i,i-1}|$ za $i \in \{2, 3, ..., k\}$.
Ako je $k = n - 1$, tada je Hessenbergova matrica H nereducirana, inače ako je $k < n - 1$ tada je $g_{k+1,k} = 0$.

Dokaz. Definirajmo najprije ortogonalnu matricu $Q = V^T U$, znamo da je tada

$$\left.\begin{array}{c} GQ = V^T AVV^T U = V^T AV \\ QH = V^T UU^T AU = V^T AU \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c} \text{Iz čega slijedi da je:} \\ GQ = QH \end{array}$$

$(i-1)$ stupac svake matrice može se predstaviti kao $Gq_{i-1} = Qh_{i-1}$, gdje su q_{i-1} i h_{i-1} $(i-1)$ stupci matrice G, odnosno matrice H.
Prema definiciji (1.1) znamo da je $h_{l,i-1} = 0$ za $l \geq i+1$, a Qh_{i-1} možemo prikazati kao

$$Qh_{i-1} = \sum_{j=1}^{i} h_{j,i-1}q_j = h_{i,i-1}q_i + \sum_{j=1}^{i-1} h_{j,i-1}q_j$$

Iz čega slijedi da je h$_{i,i-1}q_i = Gq_{i-1} - \sum\limits_{j=1}^{i-1} h_{j,i-1}q_j$.
Nadalje, možemo zaključiti da je $[q_1, q_2, ..., q_k]$ gornje trokutast, a budući da je Q ortogonalna matrica, mora biti i dijagonalna i svaka vrijednost na dijagonali je u $\{-1, 1\}$ za $i \in \{2, 3, ..., k\}$.
Tada je $q_1 = e_1$ i $q_i = \pm e_i$, za $i \in \{2, 3, ..., k\}$.
Budući da je $q_i = V^T u_i$ i $h_{i,i-1} = g_i^T (Gq_{i-1} - \sum\limits_{j=1}^{i-1} h_{j,i-1}q_j) = g_i^T Gq_{i-1}$.
Za $i \in \{2, 3, ..., k\}$ je $g_i^T Gq_{i-1} = \pm q_{i,i-1}$, iz čega slijedi da je $u_i = \pm v_i$ i $|h_{i,i-1}| = |g_{i,i-1}|$ za $i \in \{2, 3, ..., k\}$ čime smo dokazali prvi dio danog teorema.
Da bi dokazali drugi dio danog teorema, ako je $k < n - 1$,
$q_{k+1,k} = e_{k+1}^T Ge_k = \pm e_{k+1}^T GQe_k$, a kako znamo da je $GQ = QH$ slijedi da je
$q_{k+1,k} = \pm e_{k+1}^T QHe_k = \pm e_{k+1}^T Qh_k = \pm e_{k+1}^T \sum\limits_{j}^{k+1} h_{jk}q_j = \pm e_{k+1}^T \sum\limits_{j}^{k} h_{jk}q_j = 0$, gdje pretposljednja jednakost slijedi iz pretpostavke da je $h_{k+1,k} = 0$. Na taj način dokazali smo i drugi dio teorema.

□

Iz prethodnog teorema vidimo da su dvije Hessenbergove dekompozicije matrice obje nereducirane i imaju isti prvi stupac u ortogonalnim matricama, dakle Hessenbergove matrice H i G su slične matrice, tako da je $H = DGD^{-1}$, gdje je $D = diag\{\pm1, \pm1, ..., \pm1\}$.
Štoviše, ako ograničimo elemente u donjoj subdijagonali Hessenbergove matrice H da budu pozitivni (ukoliko je to moguće), tada je Hessenbergova dekompozicija $A = QHQ^T$ jedinstveno određena matricom A i prvim stupcem matrice Q, a to nas dovodi do definicije Krylovljeve matrice.

Definicija 3. *([4], str. 235) Zadana je matrica $A \in M_n$, vektor $q \in M_{n1}$ i skalar k. Krylovljeva matrica je definirana kao $K(A, q, k) = [q, Aq, ..., A^{k-1}q] \in M_{nk}$*

Teorem 3 (Reducirana Hessenbergova dekompozicija)**.** *([4], str. 235) Pretpostavimo da postoji ortogonalna matrica Q tako da se matrica $A \in M_n$ može faktorizirati kao $A = QHQ^T$. Tada je $Q^TAQ = H$ nereducirana gornja Hessenbergova matrica ako i samo ako je $R = Q^TK(A, q_1, n)$ nesingularna i gornje trokutasta matrica gdje je q_1 prvi stupac od Q. Dodatno, ako je R singularna i k najmanji indeks takav da je $r_kk = 0$, tada je k također i najmanji indeks takav da je $h_{k,k-1} = 0$.*

Dokaz. Dokaz ćemo provoditi u dva smjera.
$\Longrightarrow$ Pretpostavimo da je H nereducirana matrica i neka je $R = Q^TK(A, q_1, n)$ tj. $R = [e_1, He_1, ..., H^{n-1}e_1]$, gdje je R gornje trokutasta matrica pri čemu je očito da je $r_{11} = 1$. Uočimo da je $r_{ii} = h_{21}h_{32}...h_{i,i-1}$ za $i \in \{2, 3, ..., n\}$. Kada je H nereducirana matrica tada je R također nesingularna matrica.
$\Longleftarrow$ Pretpostavimo da je R gornje trokutasta i nesingularna. Promatramo da je $r_{k+1} = Hr_k$ tako da su $(k + 2 : n)$-ti redovi od H jednaki nula i $h_{k+1,k} \neq 0$ za $k \in \{1, 2, ..., n - 1\}$. Tada je H nereducirana. Ako je R singularna i k najmanji indeks tako da je $r_{kk} = 0$, tada

$$\left.\begin{aligned} r_{k-1,k-1} &= h_{21}h_{32}...h_{k-1,k-2} \neq 0 \\ r_{k,k} &= h_{21}h_{32}...h_{k-1,k-2}h_{k,k-1} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{gathered}\text{Iz čega slijedi da je:} \\ h_{k,k-1} = 0\end{gathered}$$

iz čega slijedi dokaz.

$\square$

2 Tridijagonalna dekompozicija

Slično Hessenbergovoj dekompoziciji tridijagonalna dekompozicija također može pojednostaviti matricu i stoga služi kao preliminarni korak za druge algoritme.
U cilju objašnjenja tridijagonalne dekompozicije najprije se moramo upoznati s definicijom tridijagonalne matrice.

Definicija 4. *([4], str. 239)* ***Tridijagonalna matrica*** *je kvadratna matrica u kojoj su svi elementi ispod donje subdijagonale i iznad gornje subdijagonale jednaki nuli. Matematički zapisano, kvadratna matrica A je* ***tridijagonalna matrica*** *ako je $a_{ij} = 0$ za $|i - j| > 1$.*

Primjer 4. *Matrica A dana ovim primjerom je tridijagonalna.*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Neka je T tridijagonalna matrica i n najmanji prirodni broj za koji vrijedi da je $h_{i+1,i} = 0$, za $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$. Tada je T nereducirana ako je $i = n - 1$.

Primjer 5. *Kao primjer uzmimo matricu $A \in M_5$ koja se ne može reducirati i matricu $B \in M_5$ koja se može reducirati.*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

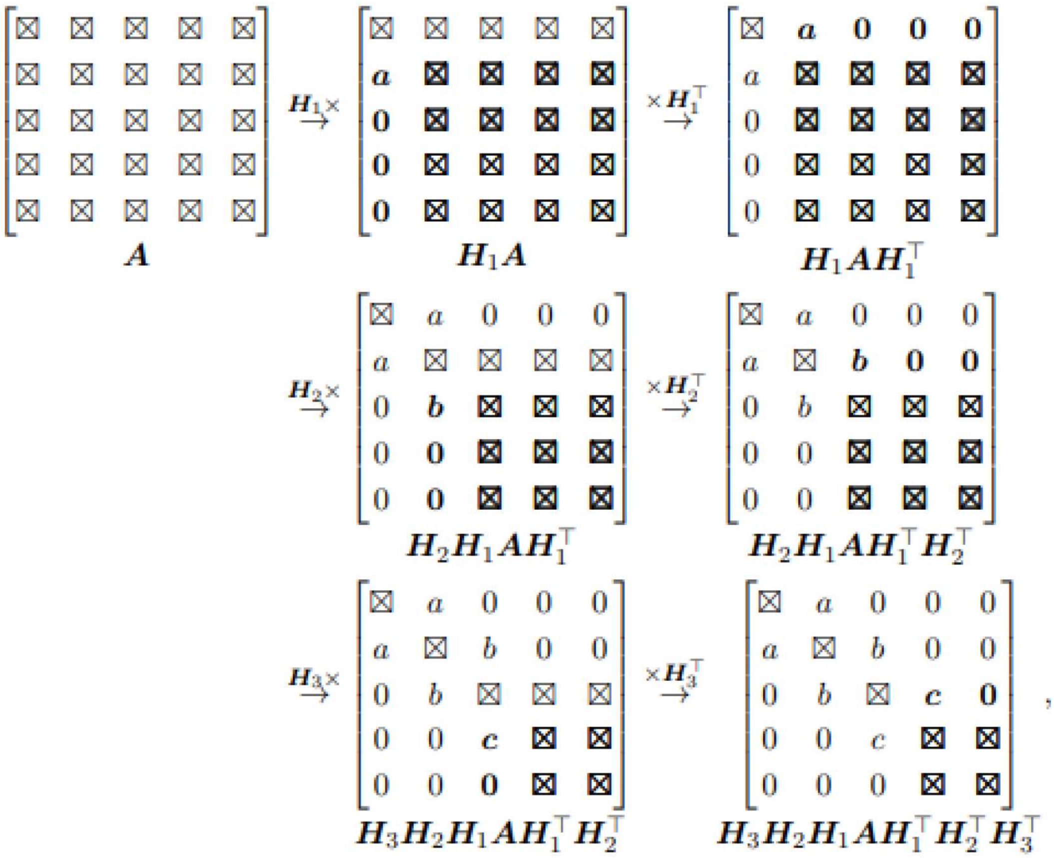
Možemo zaključiti da je tridijagonalna matrica posebni slučaj gornje Hessenbergove matrice, a to nas dovodi do sljedeće tvrdnje.

Teorem 4 (Tridijagonalna dekompozicija)**.** *([4], str. 239) Svaka simetrična matrica $A \in M_n$ može se faktorizirati kao $A = QTQ^T$, gdje je T simetrična tridijagonalna matrica, a Q ortogonalna matrica.*

Postojanje tridijagonalne matrice slijedi trivijalno primjenom Hessenbergove dekompozicije na simetričnu matricu A. Međutim, vidjet ćemo da je računska složenost tridijagonalne dekompozicije mnogo manja nego kod Hessenbergove dekompozicije zbog svojstva simetričnosti.

2.1 Određivanje tridijagonalne dekompozicije

Neka je matrica $A \in M_5$. U nastavku ovoga rada slijedi shematski prikaz tridijagonalne dekompozicije u kojemu znak $\boxtimes$ predstavlja element koji nije nužno jednak nuli, a $\boldsymbol{\boxtimes}$ predstavlja element koji se određenim djelovanjem u tom koraku promijenio.



Primjer 6. *Zapiši matricu A u tridijagonalnoj formi koristeći Householderove reflektore.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Rješenje:

Sljedeći primjer rješavati ćemo uz pomoć [1], [5]. Prilikom rješavanja ovoga primjera s H_1 označit ćemo Householderov reflektor, a s T pripadnu tridijagonalnu matricu.

Neka je vektor $a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $r_1 = -5$.

Nadalje, neka je $u = -5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, odakle slijedi da je $u = \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \end{bmatrix}$.

Kako bismo mogli izračunati Householderov reflektor moramo naprije odrediti matrice uu^T i u^Tu .

$$uu^T = \begin{bmatrix} 64 & 32 \\ 32 & 16 \end{bmatrix}$$

$$u^Tu = 80$$

Odakle dobivamo da je:

$$\widetilde{H_1} = I - \frac{2uu^T}{u^Tu}$$

odnosno,

$$\widetilde{H_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{80}\begin{bmatrix} 64 & 32 \\ 32 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/5 & -4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

Iz čega slijedi da je Householderov reflektor jednak

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/5 & -4/5 \\ 0 & -4/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

Kako je H_1 ortogonalna matrica njen inverz je sama ona tj. vrijedi da je $H_1 = H_1^T$. Iz čega slijedi da je $T = H_1AH_1^T = H_1AH_1$.

$$T = H_1AH_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/5 & -4/5 \\ 0 & -4/5 & 3/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/5 & -4/5 \\ 0 & -4/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

Nakon toga jednostavnim uvrštavanjem dobivamo tridijagonalnu matricu T.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -5 & 73/25 & 14/25 \\ 0 & 14/25 & -23/25 \end{bmatrix}$$

2.2 Svojstva tridijagonalne dekompozicije

Tridijagonalna dekompozicija nije jedinstvena, ali ukoliko ograničimo da elementi na donjoj subdijagonali tridijagonalne matrice T budu pozitivni (ukoliko je moguće), tada je tridijagonalna dekompozicija $A = QTQ^T$ jednoznačno određena s matricom A i prvim stupcem matrice Q.

Teorem 5 (Implicitni Q teorem za Tridijagonalnu dekompoziciju)**.** *([4], str. 243) Pretpostavimo da su dvije tridijagonalne dekompozicije matrice $A \in M_n$ dane s $A = UTU^T = VGV^T$, pri čemu je $U = [u_1, u_2, ..., u_n]$ i $V = [v_1, v_2, ..., v_n]$ stupac matrice U, odnosno matrice V. Pretpostavimo da je k najmanji pozitivni cijeli broj za koji je $t_{k+1,k} = 0$, gdje je t_{ij} element na (i, j) poziciji od T. Ukoliko je $u_1 = v_1$ tada je $u_i = \pm v_i$ i $|t_{i,i-1}| = |g_{i,i-1}|$ za $i \in \{2, 3, ..., k\}$. Ako je $k = n-1$, tada je tridijagonalna matrica T nereducirana, inače ako je $k < n-1$ tada je $g_{k+1,k} = 0$.*

Prema teoremu (2.5) zaključujemo da ako ograničimo elemente u donjoj subdijagonali tridijagonalne matrice T da budu pozitivni (ako je moguće), tj. nereducirani, tada je tridijagonalna dekompozicija $A = QTQ^T$ jednoznačno određena matricom A i prvim stupcem matrice Q.
Slično, reducirana tridijagonalna matrica može se dobiti korištenjem Krylovljeve matrice.

Teorem 6 (Reducirana tridijagonalna dekompozicija)**.** *([4], str. 243) Pretpostavimo da postoji ortogonalna matrica Q tako da se matrica $A \in M_n$ može faktorizirati kao $A = QTQ^T$. Tada je $Q^TAQ = T$ nereducirana tridijagonalna matrica ako i samo ako je $R = Q^TK(A, q_1, n)$ nesingularna i gornje trokutasta matrica gdje je q_1 prvi stupac od Q.*
Dodatno, ako je R singularna i k najmanji indeks takav da je $r_{kk} = 0$, tada je k također i najmanji indeks takav da je $t_{k,k-1} = 0$.

3 Bidijagonalna dekompozicija

Kada dana matrica nije simetrična, ne možemo lako dobiti tridijagonalnu formu, međutim možemo napraviti korak unatrag i napraviti dekompoziciju koja ima dvije ortogonalne matrice.
U cilju objašnjenja bidijagonalne dekompozicije, najprije ćemo se upoznati sa definicijom gornje bidijagonalne matrice.

Definicija 5. *([4], str. 245)* ***Gornje trokutasta bidijagonalna matrica*** *je kvadratna matrica sa nenul elementima duž glavne dijagonale i gornje subdijagonale. To znači da postoje točno dvije dijagonale različite od nule u matrici.*

Nadalje, ukoliko bi nenul elementi bili duž glavne dijagonale i donje subdijagonale, tada bi govorili o donjoj bidijagonalnoj matrici.

Primjer 7. *Kao primjer uzmimo matricu $A \in M_{7,5}$.*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Uočimo da je donji trokut ispod glavne dijagonale i gornji trokut ispod gornje subdijagonale jednak nula u gornjoj bidijagonalnoj matrici.Tada imamo sljedeću tvrdnju:

Teorem 7 (Bidijagonalna dekompozicija)**.** *([4], str. 245) Svaka matrica $A \in M_n$ može se faktorizirati kao $A = UBV^T$ gdje je B gornja bidijagonalna matrica, a $U \in M_n$ i $V \in M_n$ su ortogonalne matrice. Konkretno, matrica V je oblika*

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix},$$

gdje je $Q \in M_{n-1}$ ortogonalna matrica.

U nastavku ovoga rada ćemo vidjeti da bidijagonalna dekompozicija nalikuje na dekompoziciju na singularne vrijednosti gdje je jedina razlika što vrijednosti matrice B u bidijagonalnom obliku imaju elemente različite od nule na gornjoj subdijagonali.

3.1 Postojanje bidijagonalne dekompozicije: Golub-Kahan bidijagonalizacija

Prethodno smo kod Hessenbergove dekompozicije koristili Householderove reflektore kako bi uveli nule ispod subdijagonale, a sličan pristup primijeniti ćemo i kod bidijagonalne dekompozicije. Bidijagonalna dekompozicija kao i Hessenbergova provodi po koracima.Kao što je navedeno u [1], [4] objasnit ćemo sljedeće korake.

3.1.1 Prvi korak: uvođenje nula u prvi stupac

Neka je $A = [a_1, a_2, ..., a_n]$, $a_i \in M_{m1}$. Možemo konstruirati Householderov reflektor kako slijedi

$$r_1 = ||a_1||,$$
$$u_1 = \frac{a_1 - r_1 e_1}{||a_1 - r_1 e_1||},$$

gdje je e_1 prva jedinična baza za M_m tj.$e_1 = [1, 0, 0, ..., 0] \in M_{m1}$ te neka je

$$H_1 = I - 2u_1 {u_1}^T \in M_m.$$

U ovom slučaju, $H_1 A$ uvest će nule u prvi stupac matrice A ispod elementa na poziciji a_{11}. Lako se može provjeriti da je H_1 simetrična i ortogonalna matrica (prema definiciji (1.2)).

Na primjeru matrica $A \in M_{7,5}$ prikazat ćemo prethodno opisani prvi korak u kojoj znak $\boxtimes$ predstavlja element koji nije nužno jednak nuli, a $\boldsymbol{\boxtimes}$ predstavlja element koji se određenim djelovanjem u tom koraku promijenio.

$$\underset{\boldsymbol{A}}{\begin{bmatrix} \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \end{bmatrix}} \xrightarrow{\boldsymbol{H_1}\times} \underset{\boldsymbol{H_1 A}}{\begin{bmatrix} \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} \end{bmatrix}}$$

3.1.2 Drugi korak: uvođenje nula u prvi redak

Nadalje, uvođenje nula iznad gornje poddijagonale matrice H_1A ekvivalentno je uvođenju nula ispod donje poddijagonale matrice $(H_1A)^T$.

Pretpostavimo sada da gledamo transponiranu matricu matrice H_1A, to jest matricu $(H_1A)^T = A^TH_1^T \in M_{nm}$, gdje je $A^TH_1^T = [z_1, z_2, ..., z_m]$, pri čemu je $z_i \in M_{n1}$.
Pretpostavimo da su $\widetilde{z_1}, \widetilde{z_2}, ..., \widetilde{z_m} \in M_{n-1,1}$ vektori dobiveni uklanjanjem prve komponente od z_i. Neka je

$$r_1 = ||\widetilde{z_1}||$$

$$v_1 = \frac{\widetilde{z_1} - r_1e_1}{||\widetilde{z_1} - r_1e_1||},$$

gdje je e_1 prva jedinična baza za $M_{n-1,1}$ tj. $e_1 = [1, 0, 0, ..., 0] \in M_{n-1,1}$ te neka je

$$\widetilde{L_1} = I - 2v_1{v_1}^T \in M_{n-1}.$$

Kako bi uveli nule ispod subdijagonale matrice $A^TH_1^T$, uvodimo Householderov reflektor

$$\mathbf{L_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \widetilde{L_1} \end{bmatrix}.$$

Djelovanjem $L_1(A^TH_1^T)$ uvest ćemo nule u prvi stupac matrice $A^TH_1^T$, ispod elementa na poziciji a_{21}. Na prvi red matrice $A^TH_1^T$ nećemo utjecati, odnosno on će ostati nepromijenjen tako da će nule uvedene u prvom koraku ostati zadržane.
Lako se može provjeriti da su matrice L_1 i $\widetilde{L_1}$ ortogonalne i simetrične matrice (prema definiciji (1.2)).

Naposljetku ćemo se vratiti na početnu netransponiranu matricu H_1A koja će sada biti s desne strane pomnožena matricom L_1^T. Ponovno po uzoru na primjer iz prvog koraka, uzet ćemo kao primjer matricu $A \in M_{7,5}$, u kojoj znak $\boxtimes$ predstavlja element koji nije nužno jednak nuli, a $\boldsymbol{\boxtimes}$ predstavlja element koji se određenim djelovanjem u tom koraku promijenio.

$$\underset{\boldsymbol{A^\top H_1^\top}}{\begin{bmatrix} \boxtimes & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \end{bmatrix}} \overset{\boldsymbol{L_1}\times}{\rightarrow} \underset{\boldsymbol{L_1 A^\top H_1^\top}}{\begin{bmatrix} \boxtimes & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} \end{bmatrix}} \overset{(\cdot)^\top}{\rightarrow} \underset{\boldsymbol{H_1 A L_1^\top}}{\begin{bmatrix} \boxtimes & \boldsymbol{\boxtimes} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} \\ 0 & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} \\ 0 & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} \\ 0 & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} \\ 0 & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} \\ 0 & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} \end{bmatrix}}$$

Ukratko, $H_1AL_1^T$ završava uvođenje nula u prvi stupac i prvi red matrice A.

3.1.3 Treći korak: uvođenje nula u drugi stupac

Neka je $B = H_1AL_1^T$, gdje su svi elementi u prvom stupcu ispod elementa na poziciji a_{11} jednaki nula te svi elementi u prvom retku desno od elementa na poziciji a_{12} također jednaki nula. Cilj ovog koraka je uvesti nule u drugi stupac ispod elementa na poziciji a_{22}.
Neka je $B_2 = [b_1, b_2, ..., b_{n-1}] \in M_{m-1}$. Ponovno možemo konstruirati Householderov reflektor, neka je

$$r_1 = ||b_1||$$
$$u_2 = \frac{b_1 - r_1e_1}{||b_1 - r_1e_1||},$$

gdje je $e_1 = [1, 0, 0, ..., 0] \in M_{m-1,1}$ te neka je $\widetilde{H_2} = I - 2u_2u_2{}^T \in M_{m-1}$.
U cilju dobivanja nulelemenata ispod glavne dijagonale matrice $H_1AL_1^T$, uvodimo Householderov reflektor

$$\mathbf{H_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \widetilde{H_2} \end{bmatrix}.$$

Možemo vidjeti da $H_2(H_1AL_1^T)$ neće promijeniti prvi red matrice $H_1AL_1^T$, a kako Householderov reflektor ne može reflektirati nulti vektor, nule u prvom stupcu će također ostati nepromijenjene.
Sljedeći primjer iz prethodnog koraka, uzet ćemo kao primjer matricu $A \in M_{7,5}$, u kojoj znak $\boxtimes$ predstavlja element koji nije nužno jednak nuli, a $\boldsymbol{\boxtimes}$ predstavlja element koji se određenim djelovanjem u tom koraku promijenio.

$$\underset{\boldsymbol{H_1AL_1^\top}}{\begin{bmatrix} \boxtimes & \boxtimes & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ 0 & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ 0 & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ 0 & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ 0 & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ 0 & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \end{bmatrix}} \overset{\boldsymbol{H_2}\times}{\rightarrow} \underset{\boldsymbol{H_2H_1AL_1^\top}}{\begin{bmatrix} \boxtimes & \boxtimes & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} \\ 0 & \mathbf{0} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} \\ 0 & \mathbf{0} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} \\ 0 & \mathbf{0} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} \\ 0 & \mathbf{0} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} \\ 0 & \mathbf{0} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} \end{bmatrix}}.$$

3.1.4 Četvrti korak: uvođenje nula u drugi redak

Ekvivalentno kao i u drugom koraku, pretpostavit ćemo da gledamo transponiranu matricu matrice $H_2H_1AL_1^T$, to jest matricu $(H_2H_1AL_1^T)^T = L_1A^TH_1^TH_2^T \in M_{nm}$, gdje je $L_1A^TH_1^TH_2^T = [x_1, x_2, ..., x_m]$, pri čemu je $x_i \in M_{n1}$.
Pretpostavimo da su $\widetilde{x_1}, \widetilde{x_2}, ..., \widetilde{x_m} \in M_{n-2,1}$ vektori koji uklanjanju prve dvije komponente od x_i.
Konstruirajmo Householderov reflektor na sljedeći način. Neka je

$$r_1 = ||\widetilde{x_1}||$$

$$v_2 = \frac{\widetilde{x_1} - r_1e_1}{||\widetilde{x_1} - r_1e_1||},$$

gdje je e_1 prva jedinična baza za $M_{n-2,1}$ tj. $e_1 = [1, 0, 0, ..., 0] \in M_{n-2,1}$ te neka je

$$\widetilde{L_2} = I - 2v_2{v_2}^T \in M_{n-2}.$$

Kako bi uveli nule ispod subdijagonale matrice $L_1A^TH_1^TH_2^T$, uvodimo Householderov reflektor

$$\mathbf{L_2} = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & \widetilde{L_2} \end{bmatrix},$$

.

gdje je $I_2 \in M_2$ jedinična matrica. U ovom koraku, $L_2(L_1A^TH_1^TH_2^T)$ uvesti će nule u drugi stupac matrice $L_1A^TH_1^TH_2^T$, ispod elementa na poziciji a_{32}. Prva dva reda matrice $(L_1A^TH_1^TH_2^T)$ će ostati nepromijenjena, kao i prvi stupac.

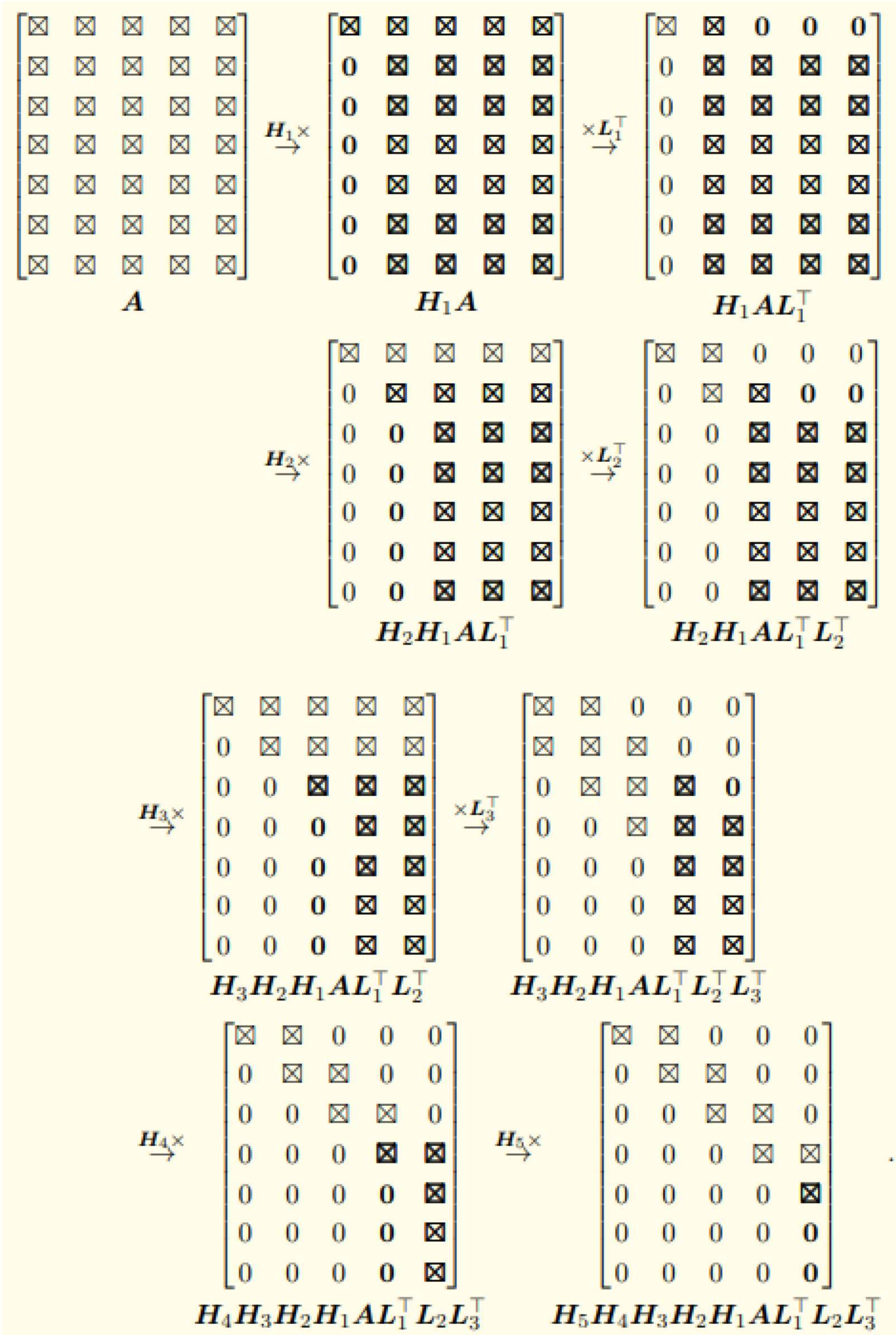
Lako se može provjeriti da su matrice L_2 i $\widetilde{L_2}$ ortogonalne i simetrične matrice (prema definiciji (1.2)).

Naposljetku ćemo se vratiti na početnu netransponiranu matricu $H_2H_1AL_1^T$ koja će sada biti s desne strane pomnožena matricom L_2^T, kako bi uveli nule u drugi red, desno od elementa na poziciji a_{23}. Ponovno po uzoru na primjer iz prethodnih koraka, uzet ćemo kao primjer matricu $A \in M_{7,5}$, u kojoj znak $\boxtimes$ predstavlja element koji nije nužno jednak nuli, a $\boldsymbol{\boxtimes}$ predstavlja element koji se određenim djelovanjem u tom koraku promijenio.

$$\underset{\boldsymbol{L_1A^\top H_1^\top H_2^\top}}{\begin{bmatrix} \boxtimes & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxtimes & \boxtimes & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ 0 & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ 0 & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \end{bmatrix}} \overset{L_2\times}{\rightarrow} \underset{\boldsymbol{L_2L_1A^\top H_1^\top H_2^\top}}{\begin{bmatrix} \boxtimes & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxtimes & \boxtimes & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} \\ 0 & \mathbf{0} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} \\ 0 & \mathbf{0} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} \end{bmatrix}} \overset{(\cdot)^\top}{\rightarrow} \underset{\boldsymbol{H_2H_1AL_1^\top L_2^\top}}{\begin{bmatrix} \boxtimes & \boxtimes & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxtimes & \boldsymbol{\boxtimes} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} \\ 0 & 0 & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} \\ 0 & 0 & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} \\ 0 & 0 & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} \\ 0 & 0 & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} & \boldsymbol{\boxtimes} \end{bmatrix}}.$$

Ukratko, djelovanjem $H_2(H_1AL_1^T)L_2^T$ završavamo s uvođenjem nula u drugi redak i drugi stupac matrice A.

Potpuni primjer bidijagonalizacije matrice $A \in M_{7,5}$, u kojoj znak $\boxtimes$ predstavlja element koji nije nužno jednak nuli, a $\boldsymbol{\boxtimes}$ predstavlja element koji se određenim djelovanjem u tom koraku promijenio slijedi u nastavku ovoga rada.



Slika 2: Shematski prikaz tridijagonalne dekompozicije

Isti proces može se nastaviti i to primjenom n takvih H_i Householderovih reflekata s lijeve strane i $n-2$ takva L_i Householderova reflektora s desne strane (ukoliko radi jednostavnosti pretpostavimo da je $m > n$). Takva isprepletena Householderova faktorizacija poznata je kao Golub-Kahan bidijagonalizacija.
Napokon dobivamo bidijagonaliziranu matricu $B = H_n H_{n-1} ... H_1 A L_1^T L_2^T ... L_{n-2}^T$, a kako su H_i i L_i simetrične i ortogonalne matrice, slijedi da je $B = H_n H_{n-1} ... H_1 A L_1 L_2 ... L_{n-2}$.
Neka je $U = H_1 H_2 ... H_n$ i $V = L_1 L_2 ... L_{n-2}$, tada bidijagonalnu dekompoziciju možemo zapisati na sljedeći način $A = UBV^T$. Budući da gornji lijevi dio od L_i sadrži jediničnu matricu reda i , matrica V ima sljedeću strukturu

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix},$$

gdje je Q ortogonalna matrica.

Potpunu Golub-Kahan bidijagonalizaciju prikazujemo na način da desni Householderov reflektor L_i slijedi iz lijevog H_i. Međutim, trivijalna pogreška mogla bi se dogoditi da prvo sve lijeve Householderove reflektore primjenjujemo uzastopno na matricu A, a zatim desne. Odnosno, bidijagonalna dekompozicija je kombinacija QR dekompozicije i Hessenbergove dekompozicije. Zbog toga, to može biti problematično jer će desni Householderovi reflektori L_i poništiti nule dobivene lijevim. Stoga se lijevi i desni Householderovi reflektori moraju koristiti isprepleteno kako bi se vratile nule.

3.1.5 Veza bidijagonalne i tridijagonalne dekompozicije

Povezanost između bidijagonalne i tridijagonalne dekompozicije najprije ćemo ilustrirati pomoću sljedeće leme koja nam otkriva kako konstruirati tridijagonalnu matricu iz bidijagonalne matrice.

Lema 1. *([4], str. 255) Pretpostavimo da je $B \in M_n$ gornja bidijagonalna matrica, tada su $T_1 = B^T B$ i $T_2 = BB^T$ simetrične tridijagonalne matrice.*

Dokaz. Pretpostavimo da matrica B ima sljedeću strukturu.

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & b_{22} & b_{23} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

Tada je matrica $T_1 = B^T B$ dana izrazom

$$T_1 = B^T B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ b_{12} & b_{22} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & b_{23} & b_{33} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & b_{34} & \vdots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & b_{22} & b_{23} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11}^2 & b_{11}b_{12} & 0 & \cdots \\ b_{11}b_{12} & b_{12}^2 + b_{22}^2 & b_{22}b_{23} & \cdots \\ 0 & b_{22}b_{23} & b_{23}^2 + b_{33}^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

Iz čega se vidi da je ona simetrična tridijagonalna matrica kako smo i tvrdili na početku. Slično, možemo dokazati da je i matrica $T_2 = BB^T$ simetrična i dijagonalna.

$$T_1 = B^T B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & b_{22} & b_{23} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ b_{12} & b_{22} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & b_{23} & b_{33} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & b_{34} & \vdots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11}^2 + b_{12}^2 & b_{11}b_{22} & 0 & \cdots \\ b_{11}b_{22} & b_{22}^2 + b_{23}^2 & b_{23}b_{33} & \cdots \\ 0 & b_{23}b_{33} & b_{33}^2 + b_{34}^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

$\square$

Prema lemi (3.1) otkrivamo jedno važno svojstvo. Pretpostavimo da je $A = UBV^T$ bidijagonalna dekompozicija matrice A, tada simetrična matrica AA^T ima sljedeću tridijagonalnu dekompoziciju.

$$AA^T = UBV^T VB^T U^T = UBB^T U^T$$

Također, tada simetrična matrica $A^T A$ ima sljedeću tridijagonalnu dekompoziciju.

$$A^T A = VB^T U^T UBV^T = VB^T BV^T$$

Kao konačni rezultat u ovom odjeljku navodimo teorem koji daje tridijagonalnu dekompoziciju matrice s posebnim svojstvima.

Teorem 8 (Tridijagonalna dekompozicija za nenegativne svojstvene vrijednosti). *([4], str. 256) Pretpostavimo da je $A \in M_n$ simetrična matrica koja ima nenegativne svojstvene vrijednosti, tada postoji matrica Z takva da je*

$$A = ZZ^T.$$

Štoviše, tridijagonalna dekompozicija matrice A može se svesti na problem pronalaženja bidijagonalne dekompozicije matrice $Z = UBV^T$, takve da je tridijagonalna dekompozicija matrice A dana s $A = ZZ^T = UBB^TU^T$.

Dokaz. Svojstveni vektori simetričnih matrica mogu se odabrati tako da budu ortogonalni kako bi se simetrična matrica A mogla rastaviti na $A = Q\Lambda Q^T$, gdje je Λ dijagonalna matrica koja sadrži svojstvene vrijednosti matrice A. Kada su svojstvene vrijednosti nenegativne, Λ se može faktorizirati kao $\Lambda = \Lambda^{1/2}\Lambda^{1/2}$.
Neka je $Z = Q\Lambda^{1/2}$, A se može faktorizirati kao $A = ZZ^T$. Stoga, kombiniranjem dobivenih zaključaka slijedi tvrdnja teorema.

$\square$

Literatura

[1] J. Choi, *The design of parallel dense linear algebra software library:reduction to Hessenberg, tridiagonal and bidiagonal form*, Numerical Algorithms 10(1995), 379-399.

[2] L. Dieci, *Smoothness of Hessenberg and bidiagonal forms*, Mediterranean Journal of Mathematics 4(2008), 21-31.

[3] W.B. Gragg, *The QR algorithm for unitary Hessenberg matrices*, Journal of Computational and Applied Mathematics 16(1986), 1-8.

[4] J. Lu, *Numerical Matrix Decomposition*, dostupno na `https://arxiv.org/pdf/2107.02579.pdf`

[5] Z. Tomljanović, *QR dekompozicije koristeći Givesove rotacije i primjene*, Osječki matematički list 14(2014), 117-141.