

# Primjene krivoljnih integrala

---

Vasilek, Nikolina

Undergraduate thesis / Završni rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, School of Applied Mathematics and Informatics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Fakultet primijenjene matematike i informatike**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:473449>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-11-18**



**mathos**

Repository / Repozitorij:

[Repository of School of Applied Mathematics and Informatics](#)



Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Fakultet primijenjene matematike i informatike  
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Nikolina Vasilek

## Primjene krivuljnih integrala

Završni rad

Osijek, 2023.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Fakultet primijenjene matematike i informatike  
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Nikolina Vasilek

# Primjene krivuljnih integrala

Završni rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Tomislav Marošević

Osijek, 2023.

## Sažetak

U ovom radu analiziramo pojam krivuljnih integrala i njihovu ključnu ulogu kako u matematičkoj analizi, tako i u primjenama unutar fizike. Navodimo njihove definicije, ključna svojstva te širok spektar primjena u različitim kontekstima.

Na početku analiziramo krivuljni integral prve vrste, gdje definiramo ovu vrstu integrala i navodimo njegova svojstva i karakteristike. Zatim je naglasak stavljen na primjene krivuljnog integrala prve vrste, posebno unutar matematičkih i fizikalnih konteksta. Svaku od ovih primjena ilustriramo praktičnim primjerima kako bismo bolje razumjeli njihovu primjenu u stvarnom svijetu.

Nakon toga, promatramo krivuljni integral druge vrste, njegovu definiciju, svojstva i karakteristike. Navodimo vezu krivuljnog integrala druge vrste s dvostrukim integralima, što je opisano u poznatom Greenovom teoremu. Na kraju analiziramo primjene krivuljnog integrala druge vrste kroz konkretne primjere, čime dodatno produbljujemo naše razumijevanje ovih pojmova.

## Ključne riječi

krivuljni integral prve vrste, krivuljni integral druge vrste, Greenov teorem.

## Applications of line integrals

### Abstract

In this paper, we analyze the concept of line integrals and their pivotal role in both mathematical analysis and applications within physics. We explore their definitions, key properties, and a wide range of applications in various contexts.

Our research commences with the analysis of the line integral of the first kind, where we will define this type of integral and investigate its properties and characteristics. Subsequently, the focus shifts to the applications of the line integral of the first kind, particularly within mathematical and physical contexts. Each of these applications is illustrated with practical examples to better understand their real-world relevance.

Following that, we direct our attention to the line integral of the second kind, its definition, properties, and characteristics. After that, we explore how it is related to double integrals, as described in the well-known Green's theorem. Finally, the research is concluded by analyzing the applications of the line integral of the second kind through concrete examples, further deepening our understanding of this concept.

### Keywords

line integral of the first kind, line integral of the second kind, Green theorem.

# Sadržaj

Uvod	1
<b>1 Krivuljni integral prve vrste</b>	<b>2</b>
1.1 Definicija i svojstva . . . . .	2
1.2 Primjena krivuljnog integrala prve vrste . . . . .	7
1.2.1 Duljina luka krivulje . . . . .	7
1.2.2 Masa, centar mase i moment tromosti žice . . . . .	8
<b>2 Krivuljni integral druge vrste</b>	<b>13</b>
2.1 Definicija i svojstva . . . . .	13
2.2 Primjena krivuljnog integrala druge vrste . . . . .	19
2.2.1 Rad sile . . . . .	19
2.2.2 Površina omeđenog područja . . . . .	21
<b>Literatura</b>	<b>23</b>

# Uvod

Krivuljni integrali prve i druge vrste predstavljaju koncepte u matematici koji su se razvijali tijekom stoljeća, oblikujući način na koji razumijemo i koristimo matematičke metode za analizu krivulja. Da bismo potpuno razumjeli njihovu važnost, trebamo zaviriti u povijest njihovog razvoja.

Krivuljni integrali imaju svoje korijene u pionirskim radovima dvojice velikana matematike iz 17. stoljeća, Isaaca Newtona i Gottfrieda Wilhelma Leibniza. Ova dva genija neovisno su razvila diferencijalni i integralni račun, ključne grane matematike koje omogućuju pristup rješavanju problema koji uključuju promjene i kontinuirane funkcije. Newton je razvijao metodu "metoda tangente," koja je bila rana forma krivuljnih integrala, kako bi riješio probleme vezane uz kretanje tijela pod utjecajem sile.

Unatoč svojim neovisnim naporima, Newton i Leibniz su izgradili temelje za razvoj krivuljnih integrala, ali precizna formulacija tih integrala nije bila odmah jasna. Definicije krivuljnih integrala prve i druge vrste razvijene su mnogo kasnije, u 19. i 20. stoljeću, zahvaljujući radovima matematičara poput Augusta-Louisa Cauchyja i Bernharda Riemanna.

Cauchy je igrao ključnu ulogu u preciziranju definicija krivuljnih integrala i dao doprinos razvoju kompleksne analize. Njegovi radovi su otvorili vrata za razumevanje integrala duž krivulja kao i za razvoj teorema koje se koriste u modernoj matematici.

S druge strane, Riemann je izradio temelje za razumijevanje krivuljnih integrala u općenitom smislu, uključujući integral druge vrste, i definirao Riemannovu sumu koja je kasnije postala osnova za Riemannov integral. Riemannovi kontribucije igrale su ključnu ulogu u razvoju teorije integrala.

Ova povijest prikazuje kako su krivuljni integrali evoluirali od ranih pokušaja Newtona i Leibniza do preciznih definicija koje koristimo danas. U nastavku ćemo istražiti te definicije, primjene i dublje razumijevanje ovih integrala u suvremenoj matematici i fizici.

# 1 Krivuljni integral prve vrste

Radi lakšeg izražavanja definicija i tvrdnji koje su povezane s krivuljnim integralima, potrebno je unijeti nekoliko osnovnih pojmova iz područja matematičke analize.

**Definicija 1.1.** Neka je  $D \subseteq \mathbb{R}^3$ . Svaku funkciju  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  nazivamo skalarnim poljem.

Skalarno polje je termin koji se koristi za opisivanje realne funkcije tri realne varijable (ili općenito više realnih varijabli). Ova terminologija proizlazi iz činjenice da ovakva funkcija svakoj točki dodjeljuje numeričku vrijednost, odnosno skalar.

Skalarno polje u  $\mathbb{R}^3$  može se ovako označiti:  $u = f(x, y, z)$ .

**Definicija 1.2.** Neka je  $D \subseteq \mathbb{R}^3$ . Svaku funkciju  $\vec{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  nazivamo vektorsko polje. Vektorsko polje je funkcija  $\vec{F}$  koja svakoj točki iz svoje domene pridružuje vektor. Vektorsko polje u  $\mathbb{R}^3$  može se označiti ovako:  $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + O(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ , gdje su  $P, O, R$  funkcije s  $D$  u  $\mathbb{R}$ .

**Definicija 1.3.** Neka je  $D \subseteq \mathbb{R}^3$  otvoren skup. Svaku funkciju  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  kažemo da je klase  $C^1$  ako je neprekidna na  $D$  i postoje sve parcijalne derivacije koje su neprekidne na  $D$ .

**Definicija 1.4.** Krivulja u  $\mathbb{R}^n$  je uređeni par  $(\Gamma, \mathcal{G})$  koji se sastoji od parametrizabilnog skupa  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$  i neke klase  $\mathcal{G}$  usporedivih parametrizacija.

U daljnjem tekstu ćemo promatrati krivulju  $\Gamma$  koja samu sebe ne presijeca, neprekidna je i ima tangentu u svakoj svojoj točki.

**Definicija 1.5.** Jordanov luk ili jednostavna glatka krivulja s rubom je parametrizirana krivulja  $\Gamma$  koja ima parametrizaciju  $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \vec{\Gamma}$  sa svojstvima:

1.  $\vec{r}$  je injekcija.
2.  $\vec{r} \in C^1([a, b]; \Gamma)$ .
3.  $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}, \quad \forall t \in [a, b]$ .

Krivulja  $\Gamma$  je zatvoren Jordanov luk ukoliko uz navedena svojstva dodatno vrijedi da je početna točka ujedno i krajnja tj.  $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$ .

## 1.1 Definicija i svojstva

Neka je zadana regularna krivulja  $C$ , a to je konačan niz Jordanovih lukova koji se nadovezuju jedan na drugi.

**Definicija 1.6.** Neka je krivulja  $C$  zadana jednadžbom  $r = r(t)$ , gdje je  $t \in I = [a, b]$  i neka je na njoj zadano skalarno polje tj. skalarna funkcija  $f$ , odnosno neka je  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ . Ako postoji integral funkcije  $f(r) \|r'\|$ , onda integral  $I = \int_a^b f(r(t)) \|r'(t)\| dt$  nazivamo krivuljni integral prve vrste.

**Napomena 1.1.** Uočimo da je umnožak  $\|r'(t)\|dt$  jednak diferencijalu  $ds$  elemenata luka krivulje. Tada krivuljni integral možemo pisati i na sljedeći način (uz pretpostavku da se krivulja  $C$  nalazi u ravnini, odnosno ako  $r(t) = (x, y)$ )

$$\int_C f(x, y) ds,$$

a on se računa tako da se uvede - koristi upravo parametrizacija krivulje  $C$  pomoću parametra  $t$ .

**Napomena 1.2.** Ako je krivulja  $C$  iz trodimenzionalnog prostora i  $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ , gdje  $a \leq t \leq b$ , je njezina parametarska jednadžba, tada integral ima oblik

$$I = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt.$$

**Primjer 1.1.** Izračunajmo integral  $\int_C f ds$  gdje je  $f(x, y, z) = x + z$  i krivulja  $C$  je zadana jednadžbama:  $x = t, y = \frac{\sqrt{6}}{2}t^2, z = t^3, t \in [0, 1]$ .

**Rješenje:**

Uočimo sljedeće

$$\begin{aligned} x'(t) &= 1, & x'(t)^2 &= 1, \\ y'(t) &= \sqrt{6}t, & y'(t)^2 &= 6t^2, \\ z'(t) &= 3t^2, & z'(t)^2 &= 9t^4. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem dobivamo:

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt \\ I &= \int_0^1 (t + t^3) \sqrt{1 + 6t^2 + 9t^4} dt \\ I &= \int_0^1 (t + t^3) \sqrt{(1 + 3t^2)^2} dt \\ I &= \int_0^1 (t + t^3)(1 + 3t^2) dt \\ I &= \int_0^1 (t + 4t^3 + 3t^5) dt = \left( \frac{t^2}{2} + t^4 + \frac{t^6}{2} \right) \Big|_0^1 = 2. \end{aligned}$$

**Napomena 1.3.** Krivuljni integral prve vrste ne ovisi o smjeru integriranja po krivulji  $C$ , odnosno vrijedi

$$\int_C f(x, y) ds = \int_{-C} f(x, y) ds.$$

**Lema 1.1.** Neka su dane funkcije  $f, g : C \rightarrow [a, b]$  koje su definirane u svim točkama krivulje  $C$ . Neka je krivulja  $C$  podijeljena na dvije krivulje  $C_1, C_2$ , tako da je  $C = C_1 \cup C_2$  i  $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ , te neka je  $\lambda$  proizvoljan realan broj. Tada vrijedi:

$$1. \int_C (\lambda f) ds = \lambda \int_C f ds$$

(homogenost)

$$2. \int_C (f + g) ds = \int_C f ds + \int_C g ds$$

(aditivnost)

$$3. \int_C f ds = \int_{C_1} f ds + \int_{C_2} f ds$$

(aditivnost po području integracije)

*Dokaz.*

1. Kada krivuljni integral prve vrste raspišemo po definiciji, dobivamo Riemannov integral, te znamo da za njega vrijedi homogenost.

$$\int_C (\lambda f) ds = \int_a^b (\lambda f(\vec{r}(t))) |\vec{r}'(t)| dt = \lambda \int_a^b f(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt.$$

Dakle, možemo pisati koristeći definiciju:

$$\lambda \int_a^b f(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt = \lambda \int_C f ds.$$

Na taj način smo potvrdili svojstvo homogenosti.

2. Radi dokazivanja aditivnosti, primjenjujemo definiciju na sumu krivuljnih integrala na način koji dovodi do Riemannovog integrala, uzimajući u obzir poznato svojstvo aditivnosti:

$$\begin{aligned} \int_C (f + g) ds &= \int_a^b (f(\vec{r}(t)) + g(\vec{r}(t))) |\vec{r}'(t)| dt \\ &= \int_a^b f(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt + \int_a^b g(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt \\ &= \int_C f ds + \int_C g ds. \end{aligned}$$

3. Krivulja  $C$  je definirana na segmentu  $[a, b]$  te podijeljena na dvije krivulje  $C_1$  i  $C_2$  koje su po dijelovima glatke krivulje. Tada postoji neka točka  $c \in [a, b]$  takva da je s  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ,  $t \in [a, c]$  dana parametrizacija krivulje  $C_1$  i s  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ,  $t \in [c, b]$  dana parametrizacija krivulje  $C_2$ . Dakle, po definiciji vrijedi:

$$\begin{aligned} \int_C f ds &= \int_a^b (f(\vec{r}(t))) |\vec{r}'(t)| dt \\ &= \int_a^c f(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt + \int_c^b f(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt \\ &= \int_{C_1} f ds + \int_{C_2} g ds. \end{aligned}$$

Time smo dokazali svojstvo aditivnosti po krivulji integracije.

□

**Napomena 1.4.** Ukoliko imamo integral po zatvorenoj krivulji, označavamo ga na sljedeći način:  $\oint_C f ds$ .

**Primjer 1.2.** Izračunajmo integral  $I = \oint_C (x + y) ds$  po rubu trokuta čiji su vrhovi  $C(1, 0)$ ,  $D(0, 1)$ ,  $O(0, 0)$ .

**Rješenje:**

Uočimo da se krivulja sastoji od tri spojnice:

$$I = \oint_{\Gamma} f ds = \oint_{OC} f ds + \oint_{CD} f ds + \oint_{DO} f ds.$$

Jednadžbe spojnica tj. pripadnih Jordanovih lukova su:

$$\overline{OC} \dots y = 0, \quad x \in [0, 1], \quad ds = dx.$$

$$\overline{CD} \dots x + y = 1, \quad dy = -dx, \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{2} dx, \quad x \in [0, 1].$$

$$\overline{DO} \dots x = 0, \quad ds = dy, \quad y \in [0, 1].$$

Računamo integrale po spojnicama:

$$I_1 = \int_{\overline{OC}} (x + y) ds = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

$$I_2 = \int_{\overline{CD}} (x + y) ds = \int_0^1 1 \cdot \sqrt{2} dx = \sqrt{2}.$$

$$I_3 = \int_{\overline{DO}} (x + y) ds = \int_0^1 y dy = \frac{1}{2}.$$

Dakle, dobivamo:

$$I = \oint_{\Gamma} (x + y) ds = \frac{1}{2} + \sqrt{2} + \frac{1}{2} = 1 + \sqrt{2}.$$

## 1.2 Primjena krivuljnog integrala prve vrste

### 1.2.1 Duljina luka krivulje

Ako za integral  $\int_C f(x, y) ds$  vrijedi da je  $f(x, y) = 1$ , tada krivuljni integral predstavlja duljinu luka ravninske krivulje  $C$ .

Ukoliko imamo integral  $\int_C f(x, y, z) ds$  vrijedi da je  $f(x, y, z) = 1$ , tada krivuljni integral predstavlja duljinu luka prostorne krivulje  $C$ .

Dakle, prema definiciji krivuljnog integrala prve vrste vrijedi da je duljina luka krivulje  $C$  jednaka sljedećem krivuljnom integralu prve vrste:

$$l(C) = \int_C ds = \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt.$$

**Primjer 1.3.** Izračunajmo duljinu luka čunjaste zavojnice  $x = a \cdot e^t \cos(t)$ ,  $y = a \cdot e^t \sin(t)$ ,  $z = a \cdot e^t$  od točke  $A(0, 0, 0)$  do točke  $B(a, 0, a)$ .

**Rješenje:**

Uočimo da imamo parametarski zadanu krivulju, gdje nam sve ovisi o parametru  $t$ . Pronađimo granice za parametar  $t$ .

$$\begin{array}{ll} z = 0 & z = a \\ a \cdot e^t = 0 / : a & a \cdot e^t = a / : a \\ e^t = 0 & e^t = 1 \\ t = -\infty & t = 0. \end{array}$$

Izračunajmo potrebne derivacije:

$$\begin{aligned} x'(t) &= a \cdot e^t (\cos t - \sin t) \\ y'(t) &= a \cdot e^t (\cos t + \sin t) \\ z'(t) &= a \cdot e^t. \end{aligned}$$

Kvadriranjem dobivamo:

$$\begin{aligned} x'(t)^2 &= a^2 \cdot e^{2t} (\cos t - \sin t)^2 \\ y'(t)^2 &= a^2 \cdot e^{2t} (\cos t + \sin t)^2 \\ z'(t)^2 &= a^2 \cdot e^{2t}. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem za ds dobivamo:

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt \\ &= \sqrt{a^2 \cdot e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + a^2 \cdot e^{2t}(\cos t + \sin t)^2 + a^2 \cdot e^{2t}} dt \\ &= ae^t \sqrt{3} dt. \end{aligned}$$

Izračunajmo sada duljinu luka čunjaste zavojnice:

$$I = \int_{\overline{AB}} ds = \int_{-\infty}^0 ae^t \sqrt{3} dt = a\sqrt{3} \int_{-\infty}^0 e^t dt = a\sqrt{3} e^t \Big|_{-\infty}^0 = a\sqrt{3}.$$

### 1.2.2 Masa, centar mase i moment tromosti žice

Neka je C glatka krivulja u prostoru sa početkom točkom A i krajnjom točkom B. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je definirana gustoća mase  $\rho$  na krivulji, koja predstavlja žicu. Zanima nas kolika je masa te krivulje.

Ako podijelimo krivulju na manje dijelove tako da je  $A = S_0, S_1, S_2, \dots, S_n = B$ , te na svakom od lukova  $\widehat{S_{i-1}S_i}$  odaberemo točku  $T_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  masa luka krivulje  $\widehat{S_{i-1}S_i}$  približno je jednaka  $\Delta m \approx \rho(T_i)d(S_{i-1}, S_i)$  gdje je  $d(S_{i-1}, S_i)$  udaljenost točaka  $S_{i-1}$  i  $S_i$ .

Tada je ukupna masa

$$m = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^n \rho(T_i)d(S_{i-1}, S_i).$$

Ako uzimamo finije podjele krivulje, uočavamo da ćemo dobivati sve bolje aproksimacije ukupne mase krivulje.

Neka je sada krivulja C zadana parametrizacijom  $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ ,  $t \in [a, b]$ , čija je gustoća dana funkcijom  $\rho$ , te predstavlja položaj žice u prostoru.

Tada s obzirom na parametrizaciju  $\vec{r}$  integriranjem funkcije gustoće  $\rho$  po danoj krivulji dobivamo masu:

$$m = \int_C \rho(x, y, z) ds = \int_a^b \rho(t) |\vec{r}'(t)| dt = \int_a^b \rho(t) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt.$$

**Primjer 1.4.** Izračunajmo masu tanke žice koja zauzima segment  $C$  od točke  $(1,5,1)$  do točke  $(1,6,3)$ . Gustoća žice dana je funkcijom  $\rho(x,y,z) = xyz^2$ .

**Rješenje:** Kako žica zauzima segment između danih točaka, moramo naći parametrizaciju segmenta:

$$\vec{r}(t) = (1-t)\vec{r}_0 + t\vec{r}_1 = (1-t)(1,5,1) + t(1,6,3) = (1, 5+t, 1+2t),$$

odnosno dobiva se  $x(t) = 1, y(t) = 5+t, z(t) = 1+2t, t \in [0, 1]$ .

Izračunajmo masu tanke žice:

$$\begin{aligned} m &= \int_C \rho(x,y,z) ds \\ &= \int_C xyz^2 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt \\ &= \int_0^1 1(5+t)(1+2t)^2 \cdot \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2} dt \\ &= \sqrt{5} \int_0^1 (5+t)(1+4t+4t^2) dt \\ &= \sqrt{5} \int_0^1 (4t^3 + 24t^2 + 21t + 5) dt \\ &= \sqrt{5} \left( 4\frac{t^4}{4} + 24\frac{t^3}{3} + 21\frac{t^2}{2} + 5t \right) \Big|_0^1 \\ &= \sqrt{5} \left( 1 + 8 + \frac{21}{2} + 5 \right) = \frac{49\sqrt{5}}{2} [kg], \end{aligned}$$

gdje je za fizikalnu jedinicu mase uzeto da je kilogram.

Za centar mase žice  $C$  koja se nalazi u ravnini imamo kvocijent statičkih momenata (s obzirom na  $x$ -osi i  $y$ -osi) i mase:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left( \frac{\int_C x\rho(x,y) ds}{\int_C \rho(x,y) ds}, \frac{\int_C y\rho(x,y) ds}{\int_C \rho(x,y) ds} \right).$$

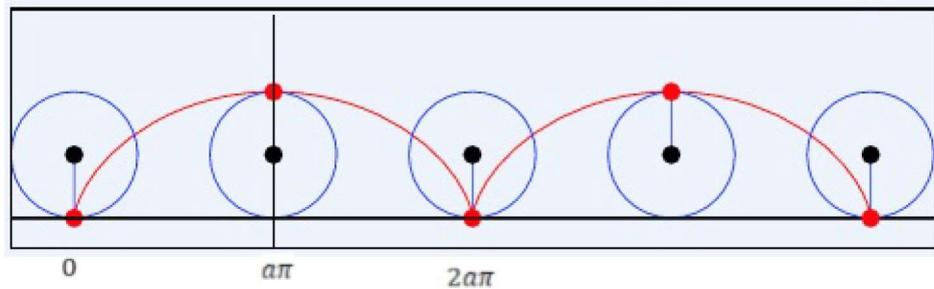
Na analogni način, za centar mase žice  $C$  smještene u prostoru imamo danu uređenu trojku:

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left( \frac{\int_C x\rho(x,y,z) ds}{\int_C \rho(x,y,z) ds}, \frac{\int_C y\rho(x,y,z) ds}{\int_C \rho(x,y,z) ds}, \frac{\int_C z\rho(x,y,z) ds}{\int_C \rho(x,y,z) ds} \right).$$

**Primjer 1.5.** Izračunajmo koordinate centra mase homogenog luka cikloide  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ , gdje je  $t \in [0, 2\pi]$ .

**Rješenje:** Kada se govori o masi homogenog luka, to implicira da je gustoća u svakoj točki konstantna. Bez smanjenja općenitosti neka je  $\rho(x, y) = k$ ,  $k > 0$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

S obzirom da je luk cikloide homogen, naša krivulja je homogena, a također i simetrična s obzirom na pravac  $x = a\pi$ .



Slika 1: Krivulja

Zaključujemo da centar mase prve koordinate  $\bar{x}$  leži na pravcu  $a\pi$  tj.  $\bar{x} = a\pi$  ( zbog simetričnosti gustoće na taj pravac i simetričnosti samog luka na taj pravac).

Preostaje nam da nađemo centar mase za drugu koordinatu  $\bar{y}$ . Izračunajmo prvo masu:

$$\begin{aligned}
 m &= \int_C \rho(x, y) ds \\
 &= \int_0^{2\pi} k \cdot \sqrt{[a(1 - \cos t)]^2 + (a \sin t)^2} dt \\
 &= \int_0^{2\pi} ka \cdot \sqrt{1 - 2 \cos t + \cos^2(t) + \sin^2(t)} dt \\
 &= \int_0^{2\pi} ka \cdot \sqrt{2 - 2 \cos t} dt \\
 &= ka\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt \\
 &= 2ka \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = 8ak.
 \end{aligned}$$

Zatim izračunajmo integral  $\int_C y\rho(x, y) ds$ .

$$\begin{aligned} \int_C y\rho(x, y) ds &= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot k \cdot \sqrt{[a(1 - \cos t)]^2 + (a \sin t)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot k \cdot \sqrt{2} \cdot a \cdot \sqrt{1 - \cos t} dt \\ &= 2a^2 k \cdot \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = \left(16a^2 - \frac{16a^2}{3}\right) k. \end{aligned}$$

Dakle, dobivamo:

$$\bar{y} = \frac{\int_C y\rho(x, y) ds}{\int_C \rho(x, y) ds} = \frac{\left(16a^2 - \frac{16a^2}{3}\right) k}{8ak} = \frac{4a}{3}.$$

Stoga, koordinate centra mase homogenog luka cikloide su:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(a\pi, \frac{4a}{3}\right).$$

Vrijednosti momenta tromosti žice C, čija gustoća varira u različitim točkama, te ako žica nije podjednako udaljena od osi rotacije u svim svojim točkama dani su izrazima:

$$I_x = \int_C y^2 \rho(x, y) ds, \quad I_y = \int_C x^2 \rho(x, y) ds.$$

Analogno vrijedi u trodimenzionalnom sustavu:

$$\text{oko osi rotacije x: } I_x = \int_C (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds$$

$$\text{oko osi rotacije y: } I_y = \int_C (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds$$

$$\text{oko osi rotacije z: } I_z = \int_C (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) ds.$$

**Primjer 1.6.** *Izračunajmo moment tromosti žice obzirom na os  $z$ , ako je žica u obliku zavojnice  $x = 2 \sin t, y = 2 \cos t, z = 3t, 0 \leq t \leq \pi$ , a linijska gustoća joj je konstantna.*

**Rješenje:** S obzirom da je linijska gustoća žice konstantna, neka je bez smanjenja općenitosti  $\rho(x, y, z) = k, k > 0, k \in \mathbb{R}$ .

Izračunajmo moment tromosti žice s obzirom na os  $z$ :

$$\begin{aligned} I_z &= \int_C (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) ds \\ &= \int_0^\pi ((2 \sin t)^2 + (2 \cos t)^2) \cdot k \cdot \sqrt{(2 \cos t)^2 + (-2 \sin t)^2 + 3^2} dt \\ &= \int_0^\pi 4k \sqrt{4(\cos^2(t) + \sin^2(t)) + 9} dt \\ &= 4 \cdot k \cdot \sqrt{13} \cdot \int_0^\pi dt \\ &= 4\sqrt{13}k\pi \quad [kg \cdot m^2], \end{aligned}$$

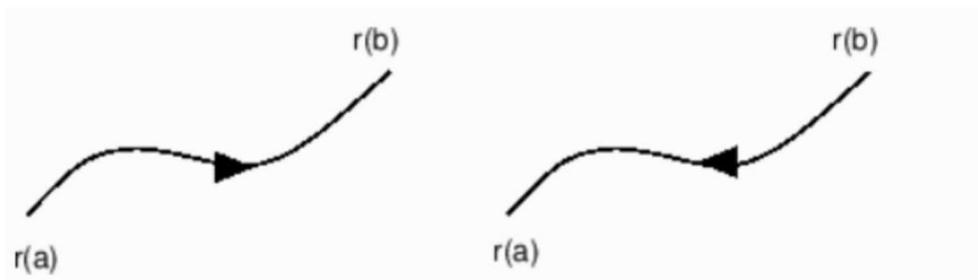
gdje je za fizikalnu jedinicu momenta tromosti uzeto da je [kilogram metar<sup>2</sup>].

## 2 Krivuljni integral druge vrste

### 2.1 Definicija i svojstva

Krivuljni integrali druge vrste odnose se na integriranje vektorske funkcije po orijentiranoj krivulji. Jednostavna glatka ili po dijelovima glatka krivulja  $\Gamma$  ima dvije neprekidne orijentacije:

- 1) U smislu rasta parametra  $t$ , odnosno gibamo se od točke  $A = \vec{r}(a)$  do točke  $B = \vec{r}(b)$ .
- 2) U smislu pada parametra  $t$ , odnosno gibamo se od točke  $B = \vec{r}(b)$  do točke  $A = \vec{r}(a)$ .



Slika 2: Krivulja  $\Gamma$

**Definicija 2.1.** Neka je  $\widehat{\Gamma} \subset \mathbb{R}^3$  orijentirani Jordanov luk od točke  $A = \vec{r}(a)$  prema  $B = \vec{r}(b)$ , gdje je  $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \widehat{\Gamma}$  njegova parametrizacija.

Ako je  $\vec{F}: \widehat{\Gamma} \rightarrow \mathbb{R}^3$  takva da je funkcija  $t \rightarrow \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)$  Riemann integrabilna na segmentu  $[a, b]$ , onda broj

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

nazivamo krivuljni integral druge vrste vektorskog polja  $\vec{F}$  duž luka  $\widehat{\Gamma}$  i označavamo ga s

$$\int_{\Gamma} \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{s}.$$

**Napomena 2.1.** Ukoliko imamo zatvorenu krivulju  $\widehat{\Gamma}$  govorimo o cirkulaciji vektorskog polja  $\vec{F}$  po krivulji  $\widehat{\Gamma}$  i pišemo

$$\oint_{\Gamma} \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{s}.$$

**Napomena 2.2.** Ukoliko je krivulja  $\widehat{\Gamma}$  dana parametrizacijom  $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ ,  $a \leq t \leq b$  i derivacija je  $\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$ , onda je  $dx = x'(t)dt$ ,  $dy = y'(t)dt$ ,  $dz = z'(t)dt$  te je tada krivuljni integral druge vrste oblika

$$\int_{\widehat{\Gamma}} \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{s} = \int_{\widehat{\Gamma}} f_1(x, y, z) dx + f_2(x, y, z) dy + f_3(x, y, z) dz.$$

**Lema 2.1.** Krivuljni integral druge vrste vektorskog polja  $\vec{F}$  ovisi o smjeru integriranja po krivulji  $\widehat{\Gamma}$ , tj.

$$\int_{-\widehat{\Gamma}} \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{s} = - \int_{\widehat{\Gamma}} \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{s}.$$

*Dokaz.* Bez smanjenja općenitosti, uzmimo da je  $\Gamma$  orijentirani Jordanov luk u ravnini s danom parametrizacijom

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}, \quad t \in [a, b].$$

Nadalje neka je  $-\widehat{\Gamma}$  suprotne orijentacije od  $\widehat{\Gamma}$ , čija je parametrizacija dana s

$$\vec{R}(t) = \vec{r}(a + b - t) = x(a + b - t)\vec{i} + y(a + b - t)\vec{j}, \quad t \in [a, b].$$

Neka je vektorsko polje  $\vec{F} : \widehat{\Gamma} \rightarrow \mathbb{R}^2$  zadano po komponentama

$$\vec{F}(x, y) = f_1(x, y)\vec{i} + f_2(x, y)\vec{j}, \text{ gdje su } f_1, f_2 \in C^1(\widehat{\Gamma}).$$

Po definiciji dobivamo

$$\int_{-\widehat{\Gamma}} \vec{F}(x, y) d\vec{s} = \int_a^b \vec{F}(\vec{R}(t)) \cdot \vec{R}'(t) dt.$$

Korištenjem parametrizacije dobivamo

$$\int_a^b \left[ f_1(x(a + b - t), y(a + b - t))\vec{i} + f_2(x(a + b - t), y(a + b - t))\vec{j} \right] \cdot \left[ -x'(a + b - t)\vec{i} - y'(a + b - t)\vec{j} \right] dt.$$

Uvodimo supstituciju  $v = a + b - t$  i računamo skalarni produkt

$$\begin{aligned}
& \int_b^a \left[ f_1(x(v), y(v))(-x'(v)) + f_2(x(v), y(v))(-y'(v)) \right] (-dv) \\
&= - \int_a^b \left[ f_1(x(v), y(v))x'(v) + f_2(x(v), y(v))y'(v) \right] dv \\
&= - \left( \int_{\Gamma} f_1(x, y)dx + f_2(x, y)dy \right) \\
&= - \int_{\widehat{\Gamma}} \vec{F}(x, y) d\vec{s}.
\end{aligned}$$

□

**Primjer 2.1.** *Izračunajmo krivuljni integral druge vrste*

$$I = \int_{\overrightarrow{OA}} 2xy \, dx - x^2 \, dy$$

od točke  $O(0, 0)$ , do točke  $A(2, 1)$  po krivulji  $\overrightarrow{OA} : y = \frac{1}{2}x$ .

**Rješenje:**

Uočavamo da nam sve ovisi o varijabli  $x$ , te da su granice za  $x$  od 0 do 2. Uvrštavanjem dobivamo integral:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^2 2x \cdot \frac{1}{2}x \cdot dx - x^2 \cdot \frac{1}{2}dx \\
&= \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 dx \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

**Lema 2.2.** Neka su  $\vec{M}$  i  $\vec{N}$  dva neprekidna vektorska polja čije domene sadrže orijentiranu krivulju  $\hat{\Gamma}$ . Neka je krivulja  $\hat{\Gamma}$  podijeljena na dvije krivulje iste orijentacije  $\hat{\Gamma}_1$  i  $\hat{\Gamma}_2$  tako da je  $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}_1 \cup \hat{\Gamma}_2$  i  $\hat{\Gamma}_1 \cap \hat{\Gamma}_2 = \emptyset$ , te neka je  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Tada vrijede sljedeća svojstva:

$$1. \int_{\hat{\Gamma}} (\lambda \vec{M}) \cdot d\vec{s} = \lambda \int_{\hat{\Gamma}} \vec{M} \cdot d\vec{s}$$

(homogenost)

$$2. \int_{\hat{\Gamma}} (\vec{M} + \vec{N}) \cdot d\vec{s} = \int_{\hat{\Gamma}} \vec{M} \cdot d\vec{s} + \int_{\hat{\Gamma}} \vec{N} \cdot d\vec{s}$$

(aditivnost)

$$3. \int_{\hat{\Gamma}} \vec{M} \cdot d\vec{s} = \int_{\hat{\Gamma}_1} \vec{M} \cdot d\vec{s} + \int_{\hat{\Gamma}_2} \vec{M} \cdot d\vec{s}$$

(aditivnost po području integracije)

*Dokaz.* Analogno dokazu svojstava kod krivuljnih integrala prve vrste. □

**Primjer 2.2.** Izračunajmo integral

$$I = \int_{\hat{\Gamma}} x^4 dx + xy dy$$

gdje je  $\hat{\Gamma}$  kontura trokuta s vrhovima  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ .

**Rješenje:**

Uočavamo da integral moramo riješiti po segmentu  $[0, 1]$ , te pravcu  $y = 1 - x$  i segmentu  $[0, 1]$ . Dakle,

$$\begin{aligned} I &= \int_{\hat{\Gamma}} x^4 dx + xy dy \\ &= \int_{\overrightarrow{[0,1]}} x^4 dx + xy dy + \int_{\overrightarrow{y=1-x}} x^4 dx + xy dy + \int_{\overrightarrow{[1,0]}} x^4 dx + xy dy \\ &= \int_0^1 x^4 dx + \int_1^0 [x^4 + x(1-x)(-1)] dx + 0 \\ &= \int_0^1 x^4 dx + \int_1^0 (x^4 + x^2 - x) dx \\ &= \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 + \left( \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^0 \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Pretpostavimo da imamo niz Jordanovih lukova koji su povezani na način da tvore neprekidnu zatvorenu strukturu, pri čemu krivulja ne presijeca sama sebe i nema dvostrukih točaka. Primjeri takvih krivulja su kružnice, elipse, te rub pravokutnika ili sličnih oblika. Ograničeno područje u ravnini koje je okruženo Jordanovom krivuljom naziva se Jordanovo područje koje označavamo s  $\Omega$ . Postoji način da izračunamo integral duž Jordanove krivulje, s obzirom na njenu zakrivljenost i put kojim se proteže. Također, imamo metodologiju za računanje dvostrukog integrala preko Jordanovog područja, što uključuje računanje vrijednosti unutar tog područja.

Važno je napomenuti da postoji Greenova formula koja uspostavlja vezu između računanja krivuljnog integrala druge vrste duž zatvorene krivulje  $C$  i računanja dvostrukog integrala preko područja  $\Omega$ , čiji je rub  $C$ . Greenova formula omogućuje povezivanje ovih dvaju matematičkih pristupa i pruža nam dublje razumijevanje veze između krivulje i pripadajućeg područja u ravnini.

**Teorem 2.1. (Greenova formula, prema [6])** *Neka je  $\Omega$  Jordanovo područje omeđeno Jordanovom jednostavnom zatvorenom krivuljom  $C$ . Neka su  $P(x, y)$  i  $Q(x, y)$  funkcije definirane na otvorenom skupu koji sadrži područje  $\Omega$  i na kojem imaju neprekidne prve parcijalne derivacije. Tada vrijedi Greenova formula:*

$$\oint_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy.$$

□

**Napomena 2.3.** U gornjoj formuli krivulja  $C$  je pozitivno orijentirana, u smjeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu.

**Primjer 2.3.** *Izračunajmo integral*

$$\oint_C (x + y)dx - (x - y)dy$$

*Primjenom Greenove formule, gdje je  $C$  krivulja koja se sastoji od parabole  $y = x^2 - 1$  i pravca  $y = 3x - 3$  prijeđena suprotno od kazaljke na satu.*

**Rješenje:**

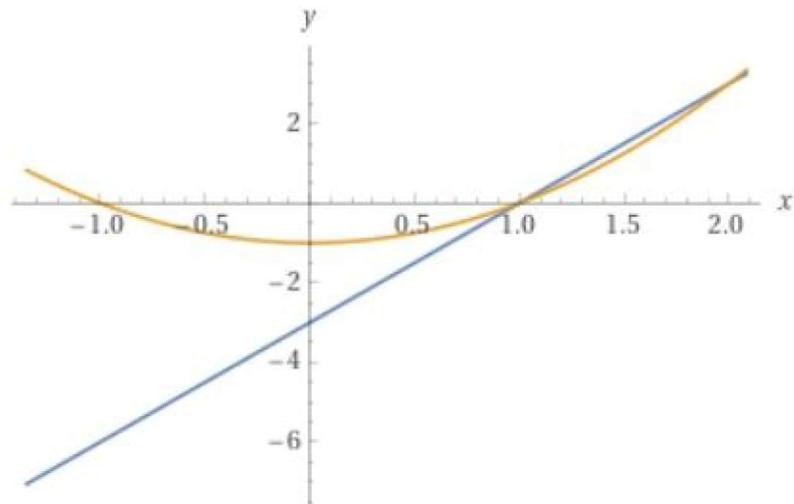
Uočimo da je prema Teoremu 2.1.  $P(x, y) = x + y$  i  $Q(x, y) = -(x - y)$ .

Pronađimo sjecište pravca i parabole:

$$x^2 - 1 = 3x - 3$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2$$



Slika 3: Pravac i parabola

Računajući prve parcijalne derivacije dobivamo:

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = -1.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} \oint_C (x + y)dx - (x - y)dy &= \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy. \\ &= \iint_{\Omega} (-1 - 1) dx dy. \\ &= \int_1^2 dx \int_{x^2-1}^{3x-3} (-2) dy \\ &= -2 \int_1^2 (3x - 3 - x^2 + 1) dx \\ &= -2 \cdot \left( 3 \frac{x^2}{2} - 3x - \frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_1^2 \\ &= -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

## 2.2 Primjena krivuljnog integrala druge vrste

### 2.2.1 Rad sile

Neka je dana glatka orijentirana krivulja u prostoru  $\widehat{\Gamma}$  s početnom točkom A i krajnjom točkom B, te neka je  $\vec{F}$  sila koja djeluje u svakoj točki te krivulje.

Parametrizacija krivulje dana je s  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , gdje je  $\vec{r}(a) = A$  i  $\vec{r}(b) = B$ .

Promotrimo česticu koja se kreće duž krivulje  $\widehat{\Gamma}$ , pri čemu na nju utječe sila  $\vec{F}$ . Uočavamo da u svakoj točki T krivulje djeluje akceleracija  $\vec{a}(T)$ .

Zanima nas koliko iznosi rad koji obavlja čestica mase  $m$  od početne točke A do krajnje točke B. Zato podijelimo krivulju na manje dijelove točkama

$A = T_0, T_1, T_2, \dots, T_n = B$ . Tada je rad sile duž orijentiranog luka  $\widehat{T_{l-1}T_l}$  približno jednak

$$\Delta W_i \approx m \cdot \vec{a}(T_i) \cdot \overrightarrow{T_{l-1}T_l}$$

gdje je  $T_i$  proizvoljno izabrana točka na luku  $\widehat{T_{l-1}T_l}$ .

Dobivamo ukupni rad

$$W = \sum_{i=1}^n \Delta W_i \approx \sum_{i=1}^n m \cdot \vec{a}(T_i) \cdot \overrightarrow{T_{l-1}T_l}.$$

Uočavamo da s finijim podjelama krivulje dobivamo sve točniju vrijednost rada. Zaključujemo da u graničnom prijelazu, kada lukovi  $T_{l-1}T_l$  postaju beskonačno mali, od konačnih suma prema njihovom limesu - krivuljnom integralu, rad W sile  $\vec{F}$  duž krivulje  $\widehat{\Gamma}$  iznosi

$$W = \int_{\widehat{\Gamma}} \vec{F} d\vec{s}.$$

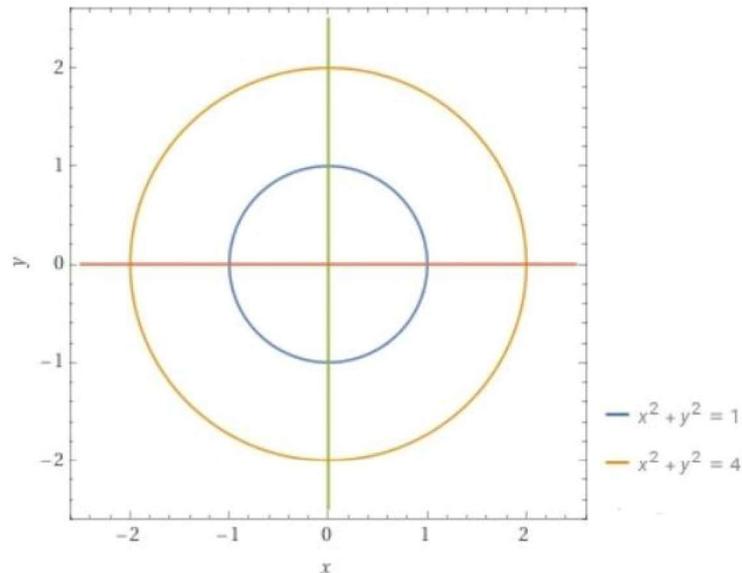
**Primjer 2.4.** *Odredimo rad što ga obavlja sila  $\vec{F} = y^2\vec{i} + 3xy\vec{j}$  za pomicanje čestice po rubu polukružnog vijenca koji se nalazi iznad x-osi omeđen s  $x^2 + y^2 = 1$  i  $x^2 + y^2 = 4$ . Pretpostavimo da je početna pozicija čestice u točki (1,0) i obilazak u suprotnom smjeru od kazaljke na satu.*

### Rješenje:

U ovom primjeru ćemo koristiti Greenovu formulu za rješavanje, jer je to jednostavniji pristup nego direktno računanje krivuljnog integrala korak po korak.

Uočimo sljedeće:

$$P(x, y) = y^2, \quad Q(x, y) = 3xy, \quad \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = 3y.$$



Slika 4: Kružni i polukružni vijenac

Računajmo rad sile:

$$\begin{aligned} W &= \oint_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy \\ &= \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_{\Omega} (3y - 2y) dx dy \\ &= \iint_{\Omega} y dx dy. \end{aligned}$$

Prijelaz na polarne koordinate:

$$\begin{aligned} x &= r \cos p \\ y &= r \sin p \\ dx dy &\rightarrow r dr dp \\ 0 &\leq p \leq \pi, 1 \leq r \leq 2. \end{aligned}$$

Dakle, rad sile je jednak

$$\begin{aligned}
 W &= \int_0^\pi \sin p dp \int_1^2 r^2 dr \\
 &= \int_0^\pi \sin p dp \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_1^2 \\
 &= \frac{7}{3} \cdot (-\cos p) \Big|_0^\pi \\
 &= \frac{7}{3} \cdot (1 + 1) \\
 &= \frac{14}{3} J, \text{ gdje je za fizikalnu jedinicu rada uzeto da je [J].}
 \end{aligned}$$

### 2.2.2 Površina omeđenog područja

Da bismo izračunali površinu područja  $\Omega$  koje je omeđeno konturom  $\vec{C}$  koristit ćemo Greenovu formulu.

$$P(\Omega) = \iint_{\Omega} dx dy.$$

Uočavamo da dobivamo desnu stranu jednakosti samo ukoliko je

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 1.$$

Pitamo se za koje Q i P možemo dobiti dati izraz. Postoje brojne mogućnosti, a neke od njih su sljedeće:

$$\begin{aligned}
 P(x, y) = 0 & \quad \text{i} \quad Q(x, y) = x \\
 P(x, y) = -y & \quad \text{i} \quad Q(x, y) = 0 \\
 P(x, y) = -\frac{1}{2}y & \quad \text{i} \quad Q(x, y) = \frac{1}{2}x.
 \end{aligned}$$

Bez smanjenja općenitosti pokažimo da za

$$P(x, y) = -\frac{1}{2}y \quad \text{i} \quad Q(x, y) = \frac{1}{2}x$$

dobivamo sljedeću formulu:

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= \iint_{\Omega} dx dy \\ &= \iint_{\Omega} \left(\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) dx dy \\ &= \oint_C -\frac{1}{2}y dx + \frac{1}{2}x dy \\ &= \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx. \end{aligned}$$

Dakle, površinu područja  $\Omega$  možemo izračunati koristeći krivuljni integral druge vrste na sljedeći način

$$P(\Omega) = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx.$$

**Primjer 2.5.** *Izračunajmo površinu lika omeđenog elipsom*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

**Rješenje:**

Uvedimo prvo parametrizaciju elipse:

$$\begin{aligned} x &= a \cos t, & y &= b \sin t, & t &\in [0, 2\pi] \\ dx &= -a \sin t dt, & dy &= b \cos t dt. \end{aligned}$$

Zatim izračunajmo površinu:

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [a \cos t \cdot b \cos t - b \sin t \cdot (-a \sin t)] dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (ab \cos^2(t) + ab \sin^2(t)) dt \\ &= \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} (\cos^2(t) + \sin^2(t)) dt = \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} dt = ab\pi. \end{aligned}$$

## Literatura

- [1] T. M. APOSTOL, *Calculus, Volume II: Multi-Variable Calculus and Linear Algebra, with Applications to Differential Equations and Probability*, JohnWiley & Sons, 1969.
- [2] B. APSEN, *Riješeni zadaci više matematike uz treći dio repertorija*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1970.
- [3] K. BURAZIN, J. JANKOV, I. KUZMANOVIĆ, I. SOLDI, *Primjene diferencijalnog i integralnog računa funkcija jedne varijable*, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku – Odjel za matematiku, Osijek, 2017.
- [4] S. J. COLLEY, *Vector Calculus*, Addison Wesley, 2012.
- [5] B. P. DEMIDOVIČ, *Zadaci i riješeni primjeri iz više matematike s primjenom na tehničke nauke*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1986.
- [6] P. JAVOR, *Matematička analiza 2*, Element, Zagreb, 2002.
- [7] S. KUREPA, *Matematička analiza 3, Funkcije više varijabli*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1984.
- [8] J. E. MARSDEN, *Vector Calculus, W. H. Freeman & Co, 4th edition 1996*.
- [9] J. STEWART, *Calculus, 7th Edition*, Brooks/Cole, 2011.
- [10] Š. UNGAR, *Matematička analiza 4*, PMF – Matematički odjel, Zagreb