

# Trobridi krivulje u R3

---

Ferlin, Nives

Undergraduate thesis / Završni rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, School of Applied Mathematics and Informatics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Fakultet primijenjene matematike i informatike**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:388364>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-07-23**



Repository / Repozitorij:

[Repository of School of Applied Mathematics and Computer Science](#)



Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Fakultet primijenjene matematike i informatike  
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

**Nives Ferlin**

## **Trobridi krivulje u $\mathbb{R}^3$**

Završni rad

Osijek, 2023.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Fakultet primijenjene matematike i informatike  
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

**Nives Ferlin**

**Trobridi krivulje u  $\mathbb{R}^3$**

Završni rad

Mentor: doc. dr. sc. Ljiljana Primorac Gajčić

Osijek, 2023.

## Sažetak

Tema ovog rada su trobridi krivulje, tj. trojke vektorskih polja povezanih s krivuljom. Frenetov trobrid čini trojka tangencijalnog polja, normalnog polja i polja binormale te se može pridružiti bilo kojoj krivulji u prostoru, osim pravcu. Darbouxov trobrid pridružujemo krivuljama koje leže na plohi, te je osim uz krivulju, vezan i uz plohu na kojoj krivulja leži. Osim navedenih trobrida, u radu su predstavljene i specijalne krivulje čiji je vektor smjera zadani Darbouxov vektor. U radu su navedeni i odgovarajući primjeri koji ilustriraju danu teoriju.

### Ključne riječi:

parametrizirana krivulja, Frenetov trobrid, Darbouxov trobrid, krivulja zadanog smjera

## Curve frames in $\mathbb{R}^3$

### Abstract

The topic of this work is a curve frames, i.e. triples of vector fields associated with a curve. The Frenet frame consists of a tangent field, a normal field, and a binormal field, and it can be associated with any curve in space, except for a straight line. The Darboux frame is associated with curves lying on a surface and is linked not only to the curve, but also to the surface on which the curve lies. In addition to these frames, the work presents special curves whose direction vector is given by the Darboux vector. The provided theory is illustrated with corresponding examples.

### Keywords:

parameterized curve, Frenet frame, Darboux frame, direction curve



# Sadržaj

Uvod	1
<b>1. Frenetov trobrid krivulje</b>	<b>2</b>
1.1. Lokalna teorija krivulja . . . . .	2
1.2. Frenetov trobrid krivulje . . . . .	3
<b>2. Darbouxov trobrid krivulje</b>	<b>8</b>
2.1. Lokalna teorija ploha . . . . .	8
2.2. Darbouxov trobrid krivulje . . . . .	9
<b>3. Krivulje zadane poljima Darbouxovog trobrida</b>	<b>12</b>
3.1. Frenetov trobrid krivulje zadanog smjera . . . . .	12
3.2. Krivulje zadanog smjera s konstantnom torzijom . . . . .	15
<b>Literatura</b>	<b>19</b>

# Uvod

U ovom radu obradit ćemo Frenetov i Darbouxov trobrid krivulje  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Općenito, Frenetov trobrid koristi se za analizu krivulje kao samostalnog objekta u prostoru, dok se Darbouxov trobrid koristi za analizu krivulje zajedno s plohom kojoj ta krivulja pripada.

Rad se sastoji od tri poglavlja. U prvom poglavlju definirana je krivulja te njezina parametrizacija. Definiran je Frenetov trobrid krivulje te zakrivljenost i torzija. Dane su i Frenetove formule s obzirom na parametrizaciju. U drugom poglavlju definirana je lokalna teorija ploha, Darbouxov trobrid krivulje te normalna zakrivljenost, geodetska zakrivljenost i geodetska torzija. U trećem poglavlju, obrađujemo krivulje zadane poljima Darbouxovog trobrida koje leže na regularnoj plohi. Dani su teoremi za krivulje zadanog smjera te teoremi za Darbouxovu invarijantu koja je jednaka nula.

# 1. Frenetov trobrid krivulje

U ovom poglavlju obradit ćemo ključne pojmove lokalne teorije krivulja, kao što su parametrizacija krivulje, tangencijalni vektor, zakrivljenost i torzija, te ćemo saznati njihovu ulogu u definiranju Frenetovog trobrida krivulje. Sve navedene definicije u ovom poglavlju preuzete su iz [2].

## 1.1. Lokalna teorija krivulja

Prije svega, potrebno je navesti definiciju krivulje kako bismo kasnije mogli uvoditi osnovne pojmove vezane uz nju.

**Definicija 1.1.** *Glatko preslikavanje s otvorenog intervala  $I = \langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$  u  $\mathbb{R}^n$  nazivamo krivulja (parametrizirana krivulja)  $c$  u  $\mathbb{R}^n$ .*

Krivulje u  $\mathbb{R}^3$  označavat ćemo s

$$c(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

te derivacije

$$\frac{dc}{dt}(t) = \dot{c}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$$

$$\frac{d^2c}{dt^2}(t) = \ddot{c}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)).$$

Nakon što smo definirali krivulju i njezinu derivaciju, uvodimo pojam regularne krivulje kako bismo mogli definirati tangencijalni vektor krivulje, a potom i Frenetov trobrid krivulje.

**Definicija 1.2.** *Ako je  $\dot{c}(t) \neq 0$ ,  $t \in I$  kažemo da je krivulja  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  regularna u točki  $c(t)$ . Krivulja  $c$  je regularna ako je regularna u svakoj svojoj točki. U suprotnom kažemo da je singularna u točki  $c(t)$ ,  $t \in I$ .*

U definiciji parametrizirane krivulje podrazumijevamo da je krivulja parametrizirana općim parametrom  $t$ , no krivulja se može parametrizirati i duljinom luka.

**Definicija 1.3.** *Neka je  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  regularna krivulja. Tangencijalnim vektorom ili vektorom brzine krivulje  $c$  u točki  $c(t)$  nazivamo derivaciju krivulje  $c$  po parametru  $t$  u točki  $c(t)$ . Funkciju  $\|\dot{c}(t)\|$  nazivamo brzinom krivulje  $c$  u točki  $c(t)$ . Krivulja  $c$  je parametrizirana duljinom luka ili je jedinične brzine ako je  $\|\dot{c}(t)\| = 1, t \in I$ .*

Kod proučavanja krivulja često je potrebno krivulju parametriziranu jednim parametrom opisati nekim drugim parametrom, a da im oblik i orijentacija ostanu nepromijenjene. Naziv nove krivulje dan je u idućoj definiciji.

**Definicija 1.4.** *Parametrizirana krivulja  $\tilde{c} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$  naziva se reparametrizacijom parametrizirane krivulje  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ako postoji glatki difeomorfizam  $\omega : \tilde{I} \rightarrow I$  za koji vrijedi  $\tilde{c} = c \circ \omega$ , odnosno  $\tilde{c}(\tilde{t}) = c(\omega(\tilde{t})) = c(t)$ ,  $\tilde{t} \in \tilde{I}, t \in I$ .*

Kako bi znali kakve krivulje možemo reparametrizirati duljinom luka, uvodimo sljedeći teorem.

**Teorem 1.1** (vidjeti [2], Teorem 1.1.9). *Svaka regularna krivulja  $c$  se može reparametrizirati duljinom luka.*

U nastavku ćemo derivaciju krivulje  $c$  po općem parametru  $t$  označavati s  $\dot{c}$ , a derivaciju po parametru duljine luka s  $c'$ .

## 1.2. Frenetov trobrid krivulje

Koristeći prethodne pojmove možemo definirati Frenetov trobrid koji nam služi za analiziranje krivulje u prostoru, te za izračunavanje zakrivljenosti i torzije.

**Definicija 1.5.** Neka je  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  krivulja parametrizirana duljinom luka. Neka je  $T(s) = c'(s)$  jedinično tangencijalno polje od  $c$ . Definiramo:

$$\text{polje vektora glavnih normala } N(s) = \frac{c''(s)}{\|c''(s)\|}, c''(s) \neq 0$$

$$\text{i polje binormala } B(s) = T(s) \times N(s).$$

Tada je uređena trojka  $(T(s), N(s), B(s))$  desna ortonormirana baza od  $\mathbb{R}_{c(s)}^3$  i nazivamo ju Frenetovim trobridom krivulje  $c$ .

U idućoj definiciji dani su nazivi ravnina koje su definirane vektorima Frenetovog trobrida.

**Definicija 1.6.** Neka je  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  regularna krivulja u  $s \in I$ . Ravnina kroz točku  $c(s)$  razapeta vektorima:

1.  $T(s)$  i  $N(s)$  naziva se oskulacijska ravnina u točki  $s \in I$ ,
2.  $T(s)$  i  $B(s)$  naziva se rektifikacijska ravnina u točki  $s \in I$ ,
3.  $N(s)$  i  $B(s)$  naziva se normalna ravnina u točki  $s \in I$ .

Kako je Frenetov trobrid ortonormiran, slijedi da je  $B(s)$  vektor normale oskulacijske ravnine,  $N(s)$  vektor normale rektifikacijske ravnine te  $T(s)$  vektor normale normalne ravnine.

U nastavku uvodimo pojam zakrivljenosti krivulje. Intuitivno znamo da je pravac krivulja sa zakrivljenošću 0, te da kružnica većeg radijusa ima manju zakrivljenost od kružnice manjeg radijusa.

Funkcija zakrivljenosti krivulje ne ovisi o položaju krivulje u prostoru.

**Definicija 1.7.** Neka je  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  krivulja parametrizirana duljinom luka  $s$ . Funkciju  $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$  zadanu  $s$

$$\kappa(s) = \|c''(s)\|$$

nazivamo fleksijom ili zakrivljenošću krivulje  $c$  u točki  $c(s)$ .

Nakon što smo uveli pojam zakrivljenosti krivulje, idućom propozicijom dajemo karakterizaciju pravca.

**Propozicija 1.1** (vidjeti [2], Propozicija 1.3.3). Regularna krivulja je pravac ako i samo ako je  $\kappa = 0$ .

*Dokaz:* Pretpostavimo da je krivulja  $c$  pravac definiran kao  $c(s) = sa + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}^3$ . Deriviranjem dobivamo:  $c'(s) = a$  i  $c''(s) = 0$  iz čega slijedi da je  $\kappa = 0$ . Obratno, pretpostavimo da je  $\kappa = 0$ . Treba pokazati da je krivulja  $c$  pravac. Iz pretpostavke  $\kappa(s) = 0$  slijedi da je  $c''(s) = 0$ . Integriranjem dobivamo da je  $c(s) = as + b$ . Dakle, krivulja  $c$  je pravac.  $\square$

Budući da su krivulje češće zadane općim parametrom, a ne parametrom duljine luka, korisno je imati i formulu za zakrivljenost krivulje parametrizirane općim parametrom.



**Propozicija 1.2** (vidjeti [2], Propozicija 1.3.5). *Neka je  $c$  regularna krivulja u  $\mathbb{R}^3$  parametrizirana općim parametrom  $t$ . Tada je njezina zakrivljenost*

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)\|}{\|\dot{c}(t)\|^3}.$$

Za krivulje možemo definirati i funkciju torzije.

**Definicija 1.8.** *Funkciju  $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$  definiranu izrazom*

$$\tau(s) = -N(s) \cdot B'(s)$$

*nazivamo torzija ili sukanje krivulje  $c$  parametrizirane duljinom luka u točki  $c(s)$ .*

Kao i kod zakrivljenosti, korisno je imati i formulu za torziju krivulje parametrizirane općim parametrom.

**Propozicija 1.3** (vidjeti [2], Propozicija 1.3.8). *Neka je  $c$  dopustiva krivulja parametrizirana općim parametrom  $t$ . Tada je njezina torzija*

$$\tau = \frac{(\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)) \cdot \ddot{c}(t)}{\|\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)\|^2} = \frac{\det(\dot{c}(t), \ddot{c}(t), \ddot{c}(t))}{\|\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)\|^2}.$$

Dakle, zakrivljenost i torzija omogućuju nam detaljnije razumijevanje oblika i ponašanje krivulje.

Prije nego što izvedemo formule za Frenetov trobrid krivulje parametrizirane općim parametrom, navedimo definiciju dopustive krivulje.

**Definicija 1.9.** *Za krivulju  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametriziranu općim parametrom kažemo da je dopustiva ako su polja duž krivulje  $\{\dot{c}, \ddot{c}\}$  linearno nezavisna.*

Uočimo da je svaka dopustiva krivulja nužno i regularna, jer u protivnom su vektori  $\dot{c}$  i  $\ddot{c}$  linearno zavisni.

**Propozicija 1.4** (vidjeti [2], Propozicija 1.3.10). *Neka je  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  dopustiva krivulja. Tada vrijedi*

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|} \\ N(t) &= B(t) \times T(t) \\ B(t) &= \frac{\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)}{\|\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)\|}. \end{aligned}$$

*Dokaz:* Neka je  $\tilde{c}$  reparametrizacija duljinom luka krivulje  $c$ , tj.  $\tilde{c}(s) = c(t)$  i neka je  $(\tilde{T}(s), \tilde{N}(s), \tilde{B}(s))$  Frenetov trobrid od  $\tilde{c}$ . Tada je

$$\begin{aligned} \dot{c}(t) &= \tilde{c}(s)\dot{s} = \tilde{T}(s)\|\dot{c}(t)\| = T(t)\|\dot{c}(t)\| \Rightarrow T(t) = \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|} \\ \ddot{c}(t) &= \tilde{\kappa}(s)\tilde{N}(s)\dot{s}^2 + \tilde{T}(s)\ddot{s} = \kappa(t)N(t)\dot{s}^2 + T(t)\ddot{s} \end{aligned}$$

Nadalje,

$$\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t) = \kappa(t)\dot{s}^3 T(t) \times N(t) = \kappa(t)\dot{s}^3 B(t).$$

Znamo da je  $B(t)$  jedinično polje, a  $\kappa(t)\dot{s}^3$  osigurava jednaku orijentaciju vektora lijeve i desne strane pa slijedi da je

$$B(t) = \frac{\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)}{\|\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)\|}.$$

$N(t) = B(t) \times T(t)$  slijedi iz pozitivne orijentiranosti baze  $(T, N, B)$ . □

Sljedećim teoremom koji ima važnu ulogu u prikazu vektorskih polja pomoću Frenetovog trobrida, opisana je veza između polja Frenetovog trobrida i njihovih derivacija.

**Teorem 1.2 (Frenetove formule)** (vidjeti [2], Teorem 1.3.7). *Neka je  $c$  dopustiva krivulja parametrizirana duljinom luka  $s$ . Tada vrijedi*

$$T' = \kappa N \tag{1}$$

$$N' = -\kappa T + \tau B \tag{2}$$

$$B' = -\tau N. \tag{3}$$

*Dokaz:* Vrijedi  $T' = a_1T + a_2N + a_3B$  gdje su  $a_1, a_2, a_3$  glatke funkcije. Uočimo da formulu (1) direktno možemo dobiti iz definicije jediničnog vektora glavne normale i zakrivljenosti. Odnosno, iz  $N = \frac{c''}{\|c''\|} = \frac{T'}{\kappa}$  slijedi  $T' = \kappa N$ .

Dakle, možemo zaključiti da je  $a_1, a_3 = 0$  i  $a_2 = \kappa$ .

Uzmimo sada  $N' = b_1T + b_2N + b_3B$ , gdje su  $b_1, b_2, b_3$  također glatke funkcije. Kako je  $N$  jedinično polje slijedi da je  $N^2 = 1$  pa deriviranjem slijedi  $2 \cdot N \cdot N' = 0$  tj.  $N \cdot N' = 0$ . Pomožimo li izraz  $s$  kojim je definiran  $N'$  skalarno sa  $N$  zbog međusobne okomitosti vektora  $T, N$  i  $B$  dobivamo da je  $N' \cdot N = b_2$ . Stoga slijedi da je  $b_2 = 0$ .

Nadalje, zbog okomitosti vrijedi  $T \cdot N = 0$  pa derivacija produkta povlači  $T' \cdot N + T \cdot N' = 0$  odnosno  $a_2 + b_1 = 0$ , tj.  $b_1 = -\kappa$ .

Neka je  $B' = c_1T + c_2N + c_3B$ . Kao i u prethodnom navedenom, zbog okomitosti vrijedi  $N \cdot B = 0$  te slijedi  $N' \cdot B + N \cdot B' = 0$  odnosno  $b_3 + c_2 = 0$ . Iz definicije torzije vrijedi:  $\tau = -N \cdot B'$  iz čega slijedi  $c_2 = -\tau = -b_3$ . S time su pokazani izrazi (2) i (3). □

Pomnožimo li Frenetove formule parametrizirane duljinom luka sa normom vektora prve derivacije dobivamo Frenetove formule parametrizirane općim parametrom.

**Propozicija 1.5 (Frenetove formule za krivulje parametrizirane općim parametrom)** ( vidjeti [2], Propozicija 1.3.11). *Neka je  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  dopustiva krivulja parametrizirana općim parametrom. Tada vrijedi:*

$$\dot{T}(t) = \|\dot{c}\|\kappa(t)N(t)$$

$$\dot{N}(t) = \|\dot{c}\|(-\kappa(t)T(t) + \tau(t)B(t))$$

$$\dot{B}(t) = -\|\dot{c}\|\tau(t)N(t).$$

**Primjer 1.1.** Odredite Frenetov trobrid, zakrivljenost i torziju krivulje  $c(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$  u  $\mathbb{R}^3$ .

Prvo određujemo prvu derivaciju od  $c$

$$\dot{c}(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t, e^t) = e^t(\cos t - \sin t, \sin t + \cos t, 1).$$

Zatim normu te derivacije

$$\begin{aligned} \|\dot{c}(t)\| &= e^t \sqrt{(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2 + 1} \\ &= e^t \sqrt{\cos^2 t - 2 \cos t \sin t + \sin^2 t + \sin^2 t + 2 \sin t \cos t + \cos^2 t + 1} \\ &= e^t \sqrt{2 \cos^2 t + 2 \sin^2 t + 1} \\ &= e^t \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T(t) = \frac{\sqrt{3}}{3}(\cos t - \sin t, \sin t + \cos t, 1).$$

Sada računamo drugu derivaciju od  $c$

$$\ddot{c}(t) = e^t(\cos t - \sin t, \sin t + \cos t, 1) + e^t(-\sin t - \cos t, \cos t - \sin t, 0) = e^t(-2 \sin t, 2 \cos t, 1)$$

$$\Rightarrow \dot{c}(t) \times \ddot{c}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos t - \sin t & \sin t + \cos t & 1 \\ -2 \sin t & 2 \cos t & 1 \end{vmatrix} = e^{2t}(\sin t - \cos t, -\cos t - \sin t, 2)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)\| &= e^{2t} \sqrt{(\sin t - \cos t)^2 + (-\cos t - \sin t)^2 + 4} \\ &= e^{2t} \sqrt{\sin^2 t - 2 \sin t \cos t + \cos^2 t + \cos^2 t + 2 \sin t \cos t + \sin^2 t + 4} \\ &= e^{2t} \sqrt{2 \sin^2 t + 2 \cos^2 t + 4} \\ &= e^{2t} \sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow B(t) = \frac{\sqrt{6}}{6}(\sin t - \cos t, -\cos t - \sin t, 2).$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow N(t) = B(t) \times T(t) &= \frac{\sqrt{2}}{6} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos t - \sin t & \sin t + \cos t & 1 \\ \sin t - \cos t & -\cos t - \sin t & 2 \end{vmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{6}(3(\sin t + \cos t), 3(\sin t - \cos t), 0) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin t + \cos t, \sin t - \cos t, 0) \end{aligned}$$

Računamo zakrivljenost:

$$\kappa(t) = \frac{\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)}{\|\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)\|} = \frac{\sqrt{6}e^{2t}}{3\sqrt{3}e^{3t}} = \frac{\sqrt{2}}{3e^t}$$

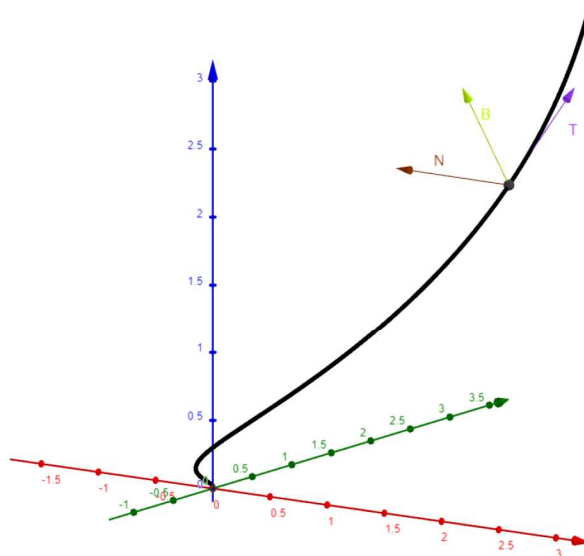
Za torziju nam je potrebna i treća derivacija od  $c$  pa prvo to izračunavamo

$$\ddot{\ddot{c}}(t) = e^t(-2 \sin t, 2 \cos t, 1) + e^t(-2 \cos t, -2 \sin t, 0) = e^t(2(-\sin t - \cos t), 2(\cos t - \sin t), 1)$$

$$\begin{aligned}
 (\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)) \cdot \dddot{c}(t) &= e^{3t}(2(\sin t - \cos t)(-\sin t - \cos t) + 2(-\cos t - \sin t)(\cos t - \sin t) + 2) \\
 &= e^{3t}(2 \cos^2 t - 2 \sin^2 t - 2 \cos^2 t + 2 \sin^2 t + 2) = 2e^{3t}.
 \end{aligned}$$

Sada možemo izračunati torziju:

$$\tau = \frac{(\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)) \cdot \dddot{c}(t)}{\|\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)\|^2} = \frac{2e^{3t}}{6e^{4t}} = \frac{1}{e^t}.$$



Slika 1: Frenetov trobrid krivulje  $c(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$



## 2. Darbouxov trobrid krivulje

U ovom poglavlju obradit ćemo ključne pojmove lokalne teorije ploha kako bismo mogli definirati Darbouxov trobrid krivulje. Sve navedene definicije u ovom poglavlju preuzete su iz [3], odnosno [1].

### 2.1. Lokalna teorija ploha

Kako bismo se uveli u lokalnu teoriju ploha bitno je prvo definirati pojam plohe.

**Definicija 2.1.** Za podskup  $S \subset \mathbb{R}^3$  kažemo da je ploha ako za svaku točku  $L \in S$  postoji otvorena okolina  $V \in \mathbb{R}^3$  i preslikavanje  $\mathbf{r} : U \rightarrow V \cap S$  s otvorenog skupa  $U \subset \mathbb{R}^2$  koje je glatko preslikavanje i homeomorfizam otvorenih skupova.

Kao što smo kod krivulja definirali pojam regularne krivulje, tako i kod ploha možemo definirati regularnu plohu.

**Napomena 2.1.** Ploha  $S$  je regularna ako je diferencijal preslikavanja  $\mathbf{r}$  injektivan.

Sada možemo definirati preslikavanje iz definicije plohe.

**Napomena 2.2.** Preslikavanje  $\mathbf{r}$  nazivamo parametrizacijom ili kartom okoline točke  $L$  plohe  $S$  i pišemo  $\mathbf{r} = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ .

Derivacije prvog reda označavamo s:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} &= \mathbf{r}_u(u, v) = (x_u(u, v), y_u(u, v), z_u(u, v)) \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} &= \mathbf{r}_v(u, v) = (x_v(u, v), y_v(u, v), z_v(u, v)),\end{aligned}$$

a derivacije drugog reda

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^2} &= \mathbf{r}_{uu}(u, v) = (x_{uu}(u, v), y_{uu}(u, v), z_{uu}(u, v)) \\ \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u \partial v} &= \mathbf{r}_{uv}(u, v) = (x_{uv}(u, v), y_{uv}(u, v), z_{uv}(u, v)) \\ \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v^2} &= \mathbf{r}_{vv}(u, v) = (x_{vv}(u, v), y_{vv}(u, v), z_{vv}(u, v)).\end{aligned}$$

Sljedećim definicijama definiramo glatke krivulje na plohi koje ne smiju ovisiti o parametrizaciji.

**Definicija 2.2.** Kažemo da je preslikavanje  $c : I \rightarrow S$  glatko ako je preslikavanje  $\mathbf{r}^{-1} \circ c : I \rightarrow U$  glatko, za neku kartu  $\mathbf{r} : U \rightarrow S$ ,  $c(I) \subset \mathbf{r}(U)$ .

**Definicija 2.3.** Svako glatko preslikavanje  $c : I \rightarrow S$ ,  $I \subset \mathbb{R}$  nazivamo glatkom krivuljom na plohi.

U parametrizaciji plohe ako fiksiramo jedan parametar možemo definirati parametarske krivulje.

**Definicija 2.4.** Neka je  $\mathbf{r} : U \rightarrow \mathbf{r}(U) \subset S$  lokalna parametrizacija plohe  $S$  i  $(u_0, v_0) \in U$ . Krivulja

- $u \mapsto \mathbf{r}(u, v_0)$  naziva se parametarska  $u$ -krivulja
- $v \mapsto \mathbf{r}(u_0, v)$  naziva se parametarska  $v$ -krivulja.

Uočimo da za različite vrijednosti parametra kojeg fiksiramo, dobivamo različite krivulje na plohi.

Za definiranje jediničnog vektora normale karte, važno je najprije definirati tangencijalni vektor i tangencijalnu ravninu.

**Definicija 2.5.** Neka je  $S$  regularna ploha i  $L \in S$ . Tangencijalni vektor u točki  $L$  je vektor  $v_L \in T_L\mathbb{R}^3$  za koji postoji krivulja  $c : I \rightarrow S$ , takva da je  $c(0) = L$ ,  $c'(0) = v_L$ . Skup svih tangencijalnih vektora u  $L$  označavamo s  $T_LS$ .

Potprostor  $T_LS$  nazivamo tangencijalna ravnina plohe  $S$  u točki  $L$ .

**Definicija 2.6.** Neka je  $S$  regularna ploha i  $\mathbf{r} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  karta koja pokriva područje  $\mathbf{r}(U)$ . Kako je tangencijalna ravnina  $T_LS$  plohe  $S$  u točki  $L$  razapeta vektorima  $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$  jedinični vektor normale te ravnine je vektor

$$n = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|}$$

kojeg nazivamo standardnim jediničnim vektorom normale karte  $\mathbf{r}$ .

## 2.2. Darbouxov trobrid krivulje

Kroz analizu zakrivljenosti krivulja, definirali smo Frenetov trobrid. Dok je Frenetov trobrid izuzetno koristan kada analiziramo krivulju kao samostalni objekt, njegova primjena postaje izazovnije kada proučavamo krivulje koje leže na plohi. U takvim slučajevima, kada se krivulja ne pojavljuje kao neovisni objekt već je povezana s plohom, prikladnije je koristiti tzv. Darbouxov trobrid.

**Definicija 2.7.** Neka je  $\mathbf{r} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrizacija regularne plohe  $S$  i neka je  $\boldsymbol{\mu} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  regularna krivulja na plohi definirana s  $\boldsymbol{\mu}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t))$ . Darbouxov trobrid krivulje  $\boldsymbol{\mu}$  na plohi  $S$  u točki  $t \in I$  je uređena trojka  $(\mathbf{T}(t), \mathbf{U}(t) \times \mathbf{T}(t), \mathbf{U}(t))$  gdje je  $\mathbf{T}(t)$  tangencijalni vektor krivulje  $\boldsymbol{\mu}$ , a  $\mathbf{U}(t)$  vektor normale plohe  $S$ .

**Definicija 2.8.** Neka je  $\mathbf{r} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrizacija regularne plohe  $S$  te neka je  $\boldsymbol{\mu} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  regularna krivulja na plohi  $S$ . Izrazom

$$k_n = \kappa N \cdot \mathbf{U}$$

definiramo normalnu zakrivljenost krivulje  $\boldsymbol{\mu}$  na plohi  $S$ , pri čemu je  $\kappa$  zakrivljenost krivulje  $\boldsymbol{\mu}$ ,  $N$  vektor glavne normale krivulje, a  $\mathbf{U}$  vektor normale plohe koji se izračunava u točki  $(u(t), v(t)) \in U$ .

Geometrijski gledano, normalna zakrivljenost nam pomaže vizualizirati način na koji krivulja mijenja smjer u odnosu na svoju okolinu na plohi. Pozitivna normalna zakrivljenost sugerira da se krivulja savija prema normali  $\mathbf{U}$  plohe, dok negativna normalna zakrivljenost ukazuje na savijanje od normale  $\mathbf{U}$  plohe. Ako je normalna zakrivljenost nula, to znači da se krivulja savija okomito na normalu  $\mathbf{U}$  plohe.



Obzirom da Darbouxov trobrid čini bazu prostora  $V^3$  jer je on ortonormirana trojka vektora, tada se svaki vektor iz  $V^3$  može prikazati u toj bazi. Definiramo

$$\kappa N = \alpha \mathbf{T} + \beta(\mathbf{U} \times \mathbf{T}) + \gamma \mathbf{U}$$

i tražimo koeficijente  $\alpha, \beta, \gamma$ , gdje je  $\kappa N$  zakrivljenost krivulje  $\boldsymbol{\mu}$ . Pomnožimo s vektorima  $\mathbf{T}, \mathbf{U} \times \mathbf{T}, \mathbf{U}$  i dobivamo

$$\alpha = 0, \beta = \kappa N \cdot (\mathbf{U} \times \mathbf{T}), \gamma = \kappa N \cdot \mathbf{U}.$$

Uočimo da je  $\gamma = \kappa N \cdot \mathbf{U}$  zapravo jednaka normalnoj zakrivljenosti  $k_n$  pa ćemo sada  $\beta = \kappa N \cdot (\mathbf{U} \times \mathbf{T})$  nazvati geodetska zakrivljenost krivulje  $\boldsymbol{\mu}$  na plohi  $S$ .

**Definicija 2.9.** Neka je  $\mathbf{r} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrizacija regularne plohe  $S$  te neka je  $\boldsymbol{\mu} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  regularna krivulja na plohi  $S$ . Funkciju  $k_g : U \rightarrow \mathbb{R}$  definiranu izrazom  $k_g = \kappa N \cdot (\mathbf{U} \times \mathbf{T})$  nazivamo geodetska zakrivljenost krivulje  $\boldsymbol{\mu}$  na plohi  $S$ . Ako je  $\kappa = 0$  tada je  $k_g = 0$ .

Važno je definirati i derivirane formule Darbouxovog trobrida. Nadalje ćemo radi jednostavnosti  $\mathbf{U}(t) \times \mathbf{T}(t)$  označavati s  $\mathbf{V}(t)$ .

**Definicija 2.10.** Neka je  $(\mathbf{T}(t), \mathbf{V}(t), \mathbf{U}(t))$  Darbouxov trobrid krivulje  $\boldsymbol{\mu}$ , tada vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbf{T}'(t) &= k_g(t)\mathbf{V}(t) + k_n(t)\mathbf{U}(t) \\ \mathbf{V}'(t) &= -k_g(t)\mathbf{T}(t) + \tau_g\mathbf{U}(t) \\ \mathbf{U}'(t) &= -k_n(t)\mathbf{T}(t) - \tau_g\mathbf{V}(t), \end{aligned}$$

gdje su  $k_n$  normalna zakrivljenost,  $k_g$  geodetska zakrivljenost,  $\tau_g$  geodetska torzija zadane sa

$$\begin{aligned} k_g &= \kappa \sin \theta \\ k_n &= \kappa \cos \theta \\ \tau_g &= \tau + \frac{d\theta}{dt}, \end{aligned}$$

pri čemu je  $\theta$  kut između normale plohe  $\mathbf{U}$  i normale  $N$ .

**Primjer 2.1.** Neka je s  $\mathbf{r}(u, v) = (\cos u - \frac{v}{\sqrt{2}} \sin u, \sin u + \frac{v}{\sqrt{2}} \cos u, \frac{v}{\sqrt{2}})$  zadana parametrizacija plohe. Odredite Darbouxov trobrid, normalnu zakrivljenost, geodetsku zakrivljenost i geodetsku torziju krivulje  $\boldsymbol{\mu}(s) = (\cos s, \sin s, 0)$ .

Prvo izračunamo tangencijalni vektor krivulje  $\boldsymbol{\mu}$

$$\mathbf{T}(s) = \boldsymbol{\mu}'(s) = (-\sin s, \cos s, 0).$$

Zatim, računamo derivacije plohe

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u &= \left(-\sin u - \frac{v}{\sqrt{2}} \cos u, \cos u - \frac{v}{\sqrt{2}} \sin u, 0\right), \\ \mathbf{r}_v &= \left(-\frac{\sin u}{\sqrt{2}}, \frac{\cos u}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

Budući da promatramo točke na krivulji, to su točke na plohi koje dobivamo za  $u = s$  i  $v = 0$ . To ćemo odmah koristiti kako bismo pojednostavili izračunavanje.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin s & \cos s & 0 \\ -\frac{\sin s}{\sqrt{2}} & -\frac{\cos s}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos s, \sin s, 0) \\ \Rightarrow \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| &= \sqrt{\frac{1}{2}(\cos^2 s + \sin^2 s)} = \sqrt{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Uvrštavanjem u formulu za određivanje vektora normale plohe, dobivamo

$$\mathbf{U}(s) = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|} = (\cos s, \sin s, 0).$$

Slijedi da je

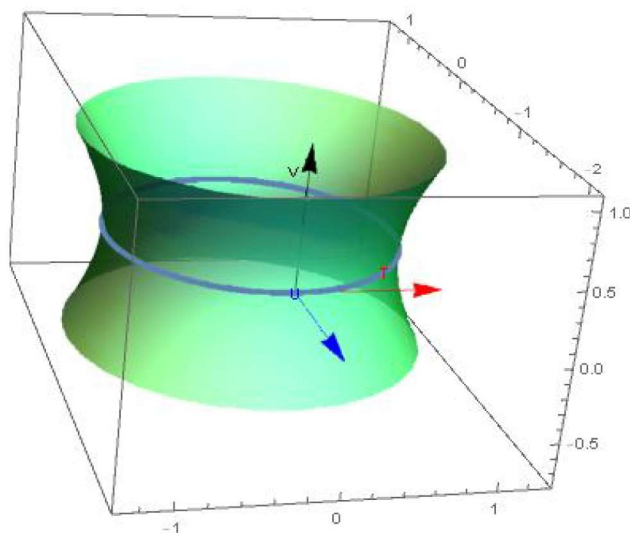
$$\mathbf{V}(s) = \mathbf{U} \times \mathbf{T} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos s & \sin s & 0 \\ -\sin s & \cos s & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1).$$

Izračunajmo sada normalnu zakrivljenost, geodetsku zakrivljenost i geodetsku torziju

$$k_n = \mathbf{T}' \cdot \mathbf{U} = (-\cos s, -\sin s, 0) \cdot (\cos s, \sin s, 0) = -1,$$

$$k_g = \mathbf{T}' \cdot \mathbf{V} = (-\cos s, -\sin s, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0,$$

$$\tau_g = -\mathbf{U}' \cdot \mathbf{V} = -(-\sin s, \cos s, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0.$$



Slika 2: Darbouxov trobrid krivulje  $\boldsymbol{\mu}(s) = (\cos s, \sin s, 0)$  na parametriziranoj plohi  $\mathbf{r}(u, v) = (\cos u - \frac{v}{\sqrt{2}} \sin u, \sin u + \frac{v}{\sqrt{2}} \cos u, \frac{v}{\sqrt{2}})$

### 3. Krivulje zadane poljima Darbouxovog trobrida

Nakon što smo definirali Darbouxov trobrid, u ovom dijelu obradit ćemo krivulje zadane poljima Darbouxovog trobrida koje leže na regularnoj plohi i odrediti ćemo neka njihova svojstva.

Neka je  $\alpha = \alpha(t)$  krivulja parametrizirana duljinom luka koja leži na regularnoj plohi  $M$ . Označimo sa  $(\mathbf{T}(t), \mathbf{V}(t), \mathbf{U}(t))$  Darbouxov trobrid i sa

$$\begin{aligned}\bar{D}_o &= \left( \tau_g \mathbf{T} - \frac{k_n \mathbf{V}}{\sqrt{k_n^2 + \tau_g^2}} \right), & (k_n, \tau_g) &\neq (0, 0) \\ \bar{D}_r &= \left( \tau_g \mathbf{T} + \frac{k_g \mathbf{U}}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} \right), & (k_g, \tau_g) &\neq (0, 0) \\ \bar{D}_n &= \left( -k_n \mathbf{V} + \frac{k_g \mathbf{U}}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} \right), & (k_g, k_n) &\neq (0, 0)\end{aligned}$$

jedinični oskulacijski (odnosno rektifikacijski i normalni) Darbouxov vektor, a s

$$\begin{aligned}\delta_o &= \frac{(\tau'_g k_n - k'_n \tau_g) + k_g(\tau_g^2 + k_n^2)}{\tau_g^2 + k_n^2} \\ \delta_r &= \frac{(\tau'_g k_g - k'_g \tau_g) - k_n(\tau_g^2 + k_g^2)}{\tau_g^2 + k_g^2} \\ \delta_n &= \frac{(k'_n k_g - k'_g k_n) + \tau_g(k_n^2 + k_g^2)}{k_n^2 + k_g^2}\end{aligned}$$

Darbouxovu invarijantu koja ovisi o Darbouxovom trobridu.

**Definicija 3.1.** Integralna krivulja  $\beta_o$ , odnosno  $\beta_r$  i  $\beta_n$  oskulacijskog (odnosno rektifikacijskog i normalnog) Darbouxovog vektora polja  $\bar{D}_o$ , odnosno  $\bar{D}_r$  i  $\bar{D}_n$  naziva se krivuljom smjera  $\bar{D}_o$  (odnosno smjera  $\bar{D}_r$  i smjera  $\bar{D}_n$ ) krivulje  $\alpha$ . Drugim riječima:

$$\begin{aligned}\beta'_o(t) &= \bar{D}_o(t) \\ \beta'_r(t) &= \bar{D}_r(t) \\ \beta'_n(t) &= \bar{D}_n(t).\end{aligned}$$

#### 3.1. Frenetov trobrid krivulje zadanog smjera

U ovom poglavlju određujemo Frenetov trobrid krivulja  $\beta_o$ ,  $\beta_r$  i  $\beta_n$ .

**Teorem 3.1** (vidjeti [1], Teorem 4.). Neka je  $\beta_o$  krivulja smjera  $\bar{D}_o$  krivulje  $\alpha$ . Ako je  $\delta_o \neq 0$  onda su Frenetov trobrid  $(T_{\beta_o}, N_{\beta_o}, B_{\beta_o})$ , zakrivljenost  $k_{\beta_o}$  i torzija  $\tau_{\beta_o}$  dani s

$$\begin{aligned}T_{\beta_o} &= \bar{D}_o, \quad N_{\beta_o} = -\varepsilon \frac{\mathbf{U}'}{\|\mathbf{U}'\|}, \quad B_{\beta_o} = \varepsilon \mathbf{U} \\ k_{\beta_o} &= \varepsilon \delta_o, \quad \tau_{\beta_o} = \sqrt{k_n^2 + \tau_g^2},\end{aligned}$$

gdje je  $\varepsilon = \pm 1$ ,  $\varepsilon \delta_o > 0$ .

*Dokaz:* Znamo  $T_{\beta_o} = \bar{D}_o = \left( \tau_g \mathbf{T} - \frac{k_n \mathbf{V}}{\sqrt{k_n^2 + \tau_g^2}} \right)$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \bar{D}'_o &= \frac{k_n[(\tau'_g k_n - k'_g \tau_g) + k_g(\tau_g^2 + k_n^2)]}{(\tau_g^2 + k_n^2)^{3/2}} \mathbf{T} + \frac{\tau_g[(\tau'_g k_n - k'_g \tau_g) + k_g(\tau_g^2 + k_n^2)]}{(\tau_g^2 + k_n^2)^{3/2}} \mathbf{V} \\ &= k_n \sigma_o \mathbf{T} + \tau_g \sigma_o \mathbf{V} \\ &= \sigma_o \mathbf{U}'. \end{aligned}$$

Onda je

$$\bar{D}'_o = -\delta_o \frac{\mathbf{U}'}{\|\mathbf{U}'\|}. \quad (4)$$

Uzimajući u obzir normu od (4) dobivamo  $\|\bar{D}'_o\| = \varepsilon \delta_o$ ,  $\varepsilon = \pm 1$  ( $\varepsilon \delta_o > 0$ ).  
Zatim,

$$N_{\beta_o} = \frac{\bar{D}'_o}{\|\bar{D}'_o\|} = -\varepsilon \frac{\mathbf{U}'}{\|\mathbf{U}'\|}.$$

Znamo da je  $B_{\beta_o} = T_{\beta_o} \times N_{\beta_o}$  pa slijedi  $B_{\beta_o} = \varepsilon \mathbf{U}$ .

Pokažimo još zakrivljenost i torziju:

$$\begin{aligned} k_{\beta_o} &= \|\bar{D}'_o\| = \varepsilon \delta_o, \\ \tau_{\beta_o}(t) &= -N_{\beta_o}(t) \cdot B'_{\beta_o}(t) = -\left( -\varepsilon \frac{\mathbf{U}'}{\|\mathbf{U}'\|} \cdot \varepsilon \mathbf{U}' \right) = \|\mathbf{U}'\| = \sqrt{k_n^2 + \tau_g^2}. \end{aligned}$$

□

**Teorem 3.2** (vidjeti [1], Teorem 5.). *Neka je  $\beta_r$  krivulja smjera  $\bar{D}_o$  krivulje  $\alpha$ . Ako je  $\delta_r \neq 0$  onda su Frenetov trobrid  $(T_{\beta_r}, N_{\beta_r}, B_{\beta_r})$ , zakrivljenost  $k_{\beta_r}$  i torzija  $\tau_{\beta_r}$  dani s*

$$\begin{aligned} T_{\beta_r} &= \bar{D}_r, \quad N_{\beta_r} = -\varepsilon \frac{\mathbf{V}'}{\|\mathbf{V}'\|}, \quad B_{\beta_r} = \varepsilon \mathbf{V} \\ k_{\beta_r} &= \varepsilon \delta_r, \quad \tau_{\beta_r} = \sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}, \end{aligned}$$

gdje je  $\varepsilon = \pm 1$ ,  $\varepsilon \delta_r > 0$ .

*Dokaz:* Znamo  $T_{\beta_r} = \bar{D}_r = \left( \tau_g \mathbf{T} + \frac{k_g \mathbf{U}}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} \right)$ .

$$\Rightarrow \bar{D}'_r = -\sigma_r (-k_g \mathbf{T} + \tau_g \mathbf{U}) = -\sigma_r \mathbf{V}' = -\delta_r \frac{\mathbf{V}'}{\|\mathbf{V}'\|}.$$

Onda imamo

$$\|\bar{D}'_r\| = \varepsilon \delta_r, \quad \varepsilon = \pm 1 \quad (\varepsilon \delta_r > 0).$$

Zatim,

$$\begin{aligned} N_{\beta_r} &= \frac{\bar{D}'_r}{\|\bar{D}'_r\|} = -\varepsilon \frac{\mathbf{V}'}{\|\mathbf{V}'\|} \\ B_{\beta_r} &= T_{\beta_r} \times N_{\beta_r} = \varepsilon \mathbf{V}. \end{aligned}$$

Pokažimo još zakrivljenost i torziju:

$$k_{\beta_r} = \|\overline{D}'_r\| = \varepsilon\delta_r,$$

$$\tau_{\beta_r}(t) = -N_{\beta_r}(t) \cdot B'_{\beta_r}(t) = -\left(-\varepsilon \frac{\mathbf{V}'}{\|\mathbf{V}'\|} \cdot \varepsilon \mathbf{V}'\right) = \|\mathbf{V}'\| = \sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}.$$

□

**Teorem 3.3** (vidjeti [1], Teorem 6.). *Neka je  $\beta_n$  krivulja smjera  $\overline{D}_n$ ,  $\kappa$  zakrivljenost i  $\tau$  torzija krivulje  $\alpha$ . Ako je  $\tau \neq 0$  onda su Frenetov trobrid  $(T_{\beta_n}, N_{\beta_n}, B_{\beta_n})$ , zakrivljenost  $k_{\beta_n}$  i torzija  $\tau_{\beta_n}$  dani s*

$$T_{\beta_n} = \overline{D}_n, N_{\beta_n} = -\varepsilon \frac{\mathbf{T}'}{\|\mathbf{T}'\|}, B_{\beta_n} = \varepsilon \mathbf{T}$$

$$k_{\beta_n} = \varepsilon\tau, \tau_{\beta_n} = \kappa,$$

gdje je  $\varepsilon = \pm 1$ ,  $\varepsilon\delta_n > 0$ .

*Dokaz:* Znamo  $T_{\beta_n} = \overline{D}_n = \left(-k_n \mathbf{V} + \frac{k_g \mathbf{U}}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}}\right)$ .

$$\Rightarrow \overline{D}'_n = -\delta_n \frac{\mathbf{T}'}{\|\mathbf{T}'\|}$$

Kako je

$$\delta_n = \frac{k'_n k_g - k_n k'_g + \tau_g (k_n^2 + k_g^2)}{k_n^2 + k_g^2} = \tau$$

slijedi

$$\overline{D}'_n = -\tau \frac{\mathbf{T}'}{\|\mathbf{T}'\|}. \quad (5)$$

Uzimajući u obzir normu od (5) dobivamo  $\|\overline{D}'_n\| = \varepsilon\tau$ ,  $\varepsilon = \pm 1$  ( $\varepsilon\delta_n > 0$ ).

Zatim,

$$N_{\beta_n} = -\varepsilon \frac{\mathbf{T}'}{\|\mathbf{T}'\|}$$

$$B_{\beta_n} = T_{\beta_n} \times N_{\beta_n} = \varepsilon \mathbf{T}.$$

Pokažimo još zakrivljenost i torziju:

$$k_{\beta_n} = \|\overline{D}'_n\| = \varepsilon\tau,$$

$$\tau_{\beta_n}(t) = -N_{\beta_n}(t) \cdot B'_{\beta_n}(t) = \sqrt{k_g^2 + k_n^2} = \kappa.$$

□



### 3.2. Krivulje zadanog smjera s konstantnom torzijom

U ovom dijelu promatramo slučajeve kada krivulje smjera  $\beta_o$  (odnosno  $\beta_r$  i  $\beta_n$ ) imaju konstantnu torziju.

**Teorem 3.4** (vidjeti [1], Teorem 10.). *Neka je  $\alpha = \alpha(t)$  krivulja parametrizirana duljinom luka koja leži na regularnoj plohi  $M$ , takva da je  $\delta_o \neq 0$  i  $\beta_o = \beta_o(t)$  krivulja smjera  $\overline{D}_o$ . Ako krivulja  $\beta_o$  ima konstantnu torziju onda normalna zakrivljenost i geodetska torzija zadovoljavaju sljedeće jednakosti:*

$$\begin{aligned} k_n &= \tau_{\beta_o} \cos(\theta(t)), \\ \tau_g &= \tau_{\beta_o} \sin(\theta(t)), \end{aligned}$$

gdje je

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \pm \int (\varepsilon k_{\beta_o} - k_g) dt \text{ ako je } k_n \neq 0 \text{ ili} \\ \theta(t) &= \pm \int (\varepsilon k_{\beta_o} - k_g) dt + \frac{\pi}{2} \text{ ako je } \tau_g \neq 0. \end{aligned}$$

*Dokaz:* Vrijedi  $\tau_{\beta_o} = \sqrt{k_n^2 + \tau_g^2} > 0$ .

Deriviranjem prethodnog izraza dobivamo  $k_n k'_n + \tau_g \tau'_g = 0$ . Promotrimo sada dva slučaja:

1. Ako je  $k_n \neq 0$ , množenjem  $k_{\beta_o} = \varepsilon \delta_o$  s  $\frac{k_n}{k_n}$  i korištenjem prethodne jednakosti dobivamo

$$k_{\beta_o} = \varepsilon \left( \frac{\tau'_g}{k_n} + k_g \right). \quad (6)$$

Kako je

$$\frac{\tau'_g}{k_n} = \pm \frac{\frac{\tau'_g}{\tau_{\beta_o}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\tau_g}{\tau_{\beta_o}}\right)^2}},$$

pa uvrštavanjem u (6) dobivamo

$$k_{\beta_o} = \pm \varepsilon \frac{\frac{\tau'_g}{\tau_{\beta_o}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\tau_g}{\tau_{\beta_o}}\right)^2}} + \varepsilon k_g \iff \varepsilon k_{\beta_o} - k_g = \pm \frac{\frac{\tau'_g}{\tau_{\beta_o}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\tau_g}{\tau_{\beta_o}}\right)^2}}. \quad (7)$$

Integriranjem (7) dobivamo:

$$\tau_g = \tau_{\beta_o} \sin \left( \pm \int (\varepsilon k_{\beta_o} - k_g) dt \right),$$

pa slijedi da je

$$k_n = \tau_{\beta_o} \cos \left( \pm \int (\varepsilon k_{\beta_o} - k_g) dt \right).$$



2. Ako je  $\tau_g \neq 0$ , množenjem  $k_{\beta_o} = \varepsilon \delta_o$  s  $\frac{\tau_g}{\tau_g}$  i korištenjem  $k_n k'_n + \tau_g \tau'_g = 0$  dobivamo

$$k_{\beta_o} = \varepsilon \left( \frac{-k'_n}{\tau_g} + k_g \right). \quad (8)$$

Kako je

$$\frac{k'_n}{\tau_g} = \pm \frac{\frac{k'_n}{\tau_{\beta_o}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{k_n}{\tau_{\beta_o}}\right)^2}},$$

pa uvrštavanjem u (8) dobivamo

$$k_{\beta_o} = \varepsilon \left( \mp \frac{\frac{k'_n}{\tau_{\beta_o}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{k_n}{\tau_{\beta_o}}\right)^2}} + k_g \right) \iff \varepsilon k_{\beta_o} - k_g = \mp \frac{\frac{k'_n}{\tau_{\beta_o}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{k_n}{\tau_{\beta_o}}\right)^2}}. \quad (9)$$

Integriranjem (9) dobivamo:

$$k_n = \tau_{\beta_o} \sin \left( \mp \int (\varepsilon k_{\beta_o} - k_g) dt \right),$$

pa slijedi da je

$$\tau_g = \tau_{\beta_o} \cos \left( \pm \int (\varepsilon k_{\beta_o} - k_g) dt \right).$$

Kako nam je  $\theta(t) = \pm \int (\varepsilon k_{\beta_o} - k_g) dt$  dobivamo traženi rezultat. □

**Teorem 3.5** (vidjeti [1], Teorem 11.). *Neka je  $\alpha = \alpha(t)$  krivulja parametrizirana duljinom luka koja leži na regularnoj plohi  $M$ , takva da je  $\delta_r \neq 0$  i  $\beta_r = \beta_r(t)$  krivulja smjera  $\overline{D}_r$ . Ako krivulja  $\beta_r$  ima konstantnu torziju onda normalna zakrivljenost i geodetska torzija zadovoljavaju sljedeće jednakosti:*

$$\begin{aligned} k_g &= \tau_{\beta_r} \cos(\theta(t)), \\ \tau_g &= \tau_{\beta_r} \sin(\theta(t)), \end{aligned}$$

gdje je

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \pm \int (\varepsilon k_{\beta_r} + k_n) dt \text{ ako je } k_g \neq 0 \text{ ili} \\ \theta(t) &= \pm \int (\varepsilon k_{\beta_r} + k_n) dt + \frac{\pi}{2} \text{ ako je } \tau_g \neq 0. \end{aligned}$$

**Teorem 3.6** (vidjeti [1], Teorem 12.). *Neka je  $\alpha = \alpha(t)$  krivulja parametrizirana duljinom luka koja leži na regularnoj plohi  $M$  sa torzijom  $\tau \neq 0$  i  $\beta_n = \beta_n(t)$  krivulja smjera  $\overline{D}_n$ . Krivulja  $\beta_n$  ima konstantnu torziju ako i samo ako je zakrivljenost  $\kappa$  krivulje  $\alpha$  konstantna.*

Ranije smo definirali i analizirali krivulje zadanog smjera u uvjetima kada je  $\delta_o$  (odnosno  $\delta_r$  i  $\delta_n$ ) različito od nule. U ovom dijelu proučiti ćemo slučaj kada je  $\delta_o = 0$  (odnosno  $\delta_r$  i  $\delta_n$ ).

**Teorem 3.7** (vidjeti [1], Teorem 13.). *Neka je  $\alpha = \alpha(t)$  krivulja parametrizirana duljinom luka koja leži na regularnoj plohi  $M$  i  $\beta_o = \beta_o(t)$  krivulja smjera  $\overline{D}_o$ . Tada je  $\delta_o = 0$  ako i samo ako vektor položaja od  $\beta_o$  leži u oskulacijskoj ravnini krivulje  $\alpha$ .*

*Dokaz:* Prvo ćemo dokazati nužnost. Pretpostavimo da je  $\delta_o = 0$ . Iz (4) slijedi  $\overline{D}_o = \text{const.}$  Pa zaključujemo  $\beta_o \cdot \mathbf{U} = \int \overline{D}_o dt \cdot \mathbf{U} = (\overline{D}_o \int dt) \cdot \mathbf{U} = \int dt (\overline{D}_o \cdot \mathbf{U}) = 0$ .

Sada dokazujemo dovoljnost. Pretpostavimo da je  $\beta_o = \lambda \mathbf{T} + \mu \mathbf{V}$ , gdje su  $\lambda$  i  $\mu$  diferencijabilne funkcije. Deriviranjem  $\beta_o$  po  $t$  varijabli dobivamo

$$\beta'_o = \frac{\tau_g \mathbf{T} - k_n \mathbf{V}}{\sqrt{k_n^2 + \tau_g^2}} = (\lambda' - \mu k_g) \mathbf{T} + (\mu' + \lambda k_g) \mathbf{V} + (\mu \tau_g + \lambda k_n) \mathbf{U}$$

što se nakraju svodi na sljedeće tri jednakosti

$$\begin{aligned} \lambda' - \mu k_g &= \frac{\tau_g}{\sqrt{k_n^2 + \tau_g^2}} \\ \mu' + \lambda k_g &= \frac{-k_n}{\sqrt{k_n^2 + \tau_g^2}} \\ \mu \tau_g + \lambda k_n &= 0, \end{aligned}$$

pri čemu je  $(\tau_g, k_n) \neq (0, 0)$ .

Iz treće jednakosti izrazimo  $\mu$  i stavimo u prvu jednakost

$$\mu = -\frac{k_n}{\tau_g} \lambda \Rightarrow \lambda' + \frac{k_n k_g}{\tau_g} \lambda = \frac{\tau_g}{\sqrt{k_n^2 + \tau_g^2}}.$$

Rješavanjem linearne diferencijalne jednačbe dolazimo do rješenja

$$\lambda(x) = \left[ \int \frac{\tau_g}{\sqrt{k_n^2 + \tau_g^2}} e^{\int \frac{k_n k_g}{\tau_g} dx} dx + F \right] e^{-\int \frac{k_n k_g}{\tau_g} dx},$$

gdje je  $F$  realna konstanta. Uvrstimo li  $\lambda$  u izraz za  $\mu$  dobivamo

$$\mu(t) = -\frac{k_n}{\tau_g} \left[ \int \frac{\tau_g}{\sqrt{k_n^2 + \tau_g^2}} e^{\int \frac{k_n k_g}{\tau_g} dt} dt + F \right] e^{-\int \frac{k_n k_g}{\tau_g} dt}.$$

Sada kada to deriviramo

$$\begin{aligned} \mu'(t) &= \left[ -\left(\frac{k_n}{\tau_g}\right)' + \left(\frac{k_n}{\tau_g}\right)^2 k_g \right] \left[ \int \frac{\tau_g}{\sqrt{k_n^2 + \tau_g^2}} e^{\int \frac{k_n k_g}{\tau_g} dt} dt + F \right] e^{-\int \frac{k_n k_g}{\tau_g} dt} \\ &\quad - \frac{k_n}{\sqrt{k_n^2 + \tau_g^2}}. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem  $\lambda$  i  $\mu'$  u drugu jednakost dobivamo

$$\begin{aligned} &\left[ -\left(\frac{k_n}{\tau_g}\right)' + \left(\frac{k_n}{\tau_g}\right)^2 k_g \right] \left[ \int \frac{\tau_g}{\sqrt{k_n^2 + \tau_g^2}} e^{\int \frac{k_n k_g}{\tau_g} dt} dt + F \right] e^{-\int \frac{k_n k_g}{\tau_g} dt} - \frac{k_n}{\sqrt{k_n^2 + \tau_g^2}} \\ &\quad + \left[ \int \frac{\tau_g}{\sqrt{k_n^2 + \tau_g^2}} e^{\int \frac{k_n k_g}{\tau_g} dx} dx + F \right] e^{-\int \frac{k_n k_g}{\tau_g} dx} k_g = \frac{-k_n}{\sqrt{k_n^2 + \tau_g^2}} \\ \Rightarrow &\left[ \left(\frac{k_n}{\tau_g}\right)' - k_g \left(1 + \left(\frac{k_n}{\tau_g}\right)^2\right) \right] \left[ \int \frac{\tau_g}{\sqrt{k_n^2 + \tau_g^2}} e^{\int \frac{k_n k_g}{\tau_g} dt} dt + F \right] e^{-\int \frac{k_n k_g}{\tau_g} dt} = 0. \end{aligned}$$

Slijedi da je  $\delta_o = 0$ . □

**Teorem 3.8** (vidjeti [1], Teorem 14.). *Neka je  $\alpha = \alpha(t)$  krivulja parametrizirana duljinom luka koja leži na regularnoj plohi  $M$  i  $\beta_r = \beta_r(t)$  krivulja smjera  $\overline{D}_r$ . Tada je  $\delta_r = 0$  ako i samo ako vektor položaja od  $\beta_r$  leži u rektifikacijskoj ravnini krivulje  $\alpha$ .*

**Teorem 3.9** (vidjeti [1], Teorem 15.). *Neka je  $\alpha = \alpha(t)$  krivulja parametrizirana duljinom luka koja leži na regularnoj plohi  $M$  i  $\beta_n = \beta_n(t)$  krivulja smjera  $\overline{D}_n$ . Tada je  $\tau = 0$  ako i samo ako vektor položaja od  $\beta_n$  leži u normalnoj ravnini krivulje  $\alpha$ .*

## Literatura

- [1] N. Echabbi and A. Ouazzani Chahdi, Direction Curves Associated with Darboux Vectors Fields and Their Characterizations, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2021(1):1-11.
- [2] Ž. Milin Šipuš, S. Vidak, Uvod u diferencijalnu geometriju, PMF-Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu, skripta, 2016.
- [3] J. Sedlar, Diferencijalna geometrija, skripta, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije u Splitu, 2016.