Ekstremi funkcija jedne varijable i primjene

Klasanović, Mato

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Mato Klasanović

Ekstremi funkcija jedne varijable i primjene

Završni rad

Osijek, 2023.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Mato Klasanović

Ekstremi funkcija jedne varijable i primjene

Završni rad

Mentor: prof. dr. sc. Krešimir Burazin
Komentor: dr. sc. Jelena Jankov

Osijek, 2023.

Sažetak

U ovom ćemo radu proučavati ekstreme funkcija jedne varijable i njihove primjene. Krenut ćemo od definiranja fundamentalnih pojmova kao što su limes, neprekidnost i derivacija. Zatim ćemo definirati lokalne ekstreme te iskazati i dokazati teoreme potrebne za njihovo određivanje. Nakon toga bavit ćemo se primjenama ekstrema u ekonomiji, fizici, medicini, itd. uz odgovarajuće primjere.

Ključne riječi

derivacija, ekstrem, lokalni minimum, lokalni maksimum

Extrema of single variable functions and their applications

Abstract

In this paper we will study extrema of single variable functions and their applications. We will start by defining fundamental concepts like limit, continuity and derivative. Then we will define local extrema and state and prove theorems which are necessary to determine them. After that we will go through several applications of extrema in economics, physics, medicine, etc., with appropriate examples.

Keywords

derivative, extrema, local maxima, local minima

Sadržaj

Uvod

U ovom radu bavit ćemo se lokalnim ekstremima funkcija jedne varijable i njihovim primjenama. Temelje ove grane matematike postavili su **G. Leibniz** i **I. Newton** paralelno i najvjerojatnije neovisno jedan o drugome krajem 17. stoljeća. Motivacija za uvođenje diferencijalnog računa im se razlikovala, no zajedničko im je bilo da su obojica posegnuli za matematikom kako bi opisali i na kraju riješili isprva nerješiv problem. U ovom radu pokazat ćemo kako možemo diferencijalni račun primijeniti na rješavanje problema u raznim granama. Određivanje lokalnih ekstrema, to jest lokalnih maksimuma i minimuma funkcija koje opisuju matematičke modele daje odgovor na brojne probleme koje ti modeli predstavljaju.

U prvom poglavlju definirat ćemo osnovne pojmove poput neprekidnosti, monotonosti i limesa funkcije te derivacije i višestruke derivacije, te iskazati i dokazati teoreme potrebne za definiranje lokalnih ekstrema.

Zatim ćemo definirati lokalne ekstreme, proučiti nekoliko teorema koji daju kriterije za njihovo određivanje, poput Fermatova, Rolleova i Lagrangeova teorema, te ćemo predstaviti dva načina za određivanje lokalnih ekstrema funkcije jedne varijable. Prvi među njima oslanja se isključivo na prvu derivaciju, dok za drugi funkcija mora biti dva puta derivabilna.

U zadnjem ćemo poglavlju predstaviti primjene lokalnih ekstrema u nekoliko grana znanosti, poput fizike, ekonomije i medicine. Proučit ćemo kako minimizirati potrošnju materijala te maksimizirati profit prilikom proizvodnje, kako odrediti maksimalnu osvjetljenost, kako maksimizirati snagu u strujnom krugu, kako najbrže doći do cilja u utrci preko dvije različite podloge te odgovoriti na još neka korisna pitanja.

1 Osnovni pojmovi

Započnimo s nekoliko definicija i tvrdnji neophodnih za proučavanje ekstrema funkcija jedne varijable.

Najprije ćemo definirati neprekidnost funkcije u točki:

Definicija 1.1. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ dana funkcija, gdje je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval. Kažemo da je funkcija f neprekidna u točki $c \in I$ ako

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in I)\,|x - c| < \delta \implies |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

Kažemo da funkcija ima prekid u točki ukoliko nije neprekidna u toj točki te da je neprekidna na skupu I ukoliko je neprekidna u svakoj točki tog skupa.

Definicija 1.2. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$. Točka $x \in \mathbb{R}$ gomilište je skupa A ukoliko svaki otvoreni interval koji sadrži x sadrži i neki element skupa A različit od x.

Skup svih gomilišta skupa A označavat ćemo s A'.

Definicija 1.3. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ dana funkcija, gdje je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval. Kažemo da funkcija f ima limes u točki $c \in I'$ ako postoji $L \in \mathbb{R}$ tako da:

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in I')\,0 < |x - c| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Kažemo da je L limes funkcije f u točki $c \in I'$ i označavamo ga s $\lim\limits_{x \to c} f(x)$.

Primijetimo da točke u kojima možemo izračunati limes funkcije nisu nužno u domeni funkcije, nego u skupu svih gomilišta domene. To nam omogućava da limese računamo i u točkama u kojima funkcija nije definirana. Također, ukoliko točka jest iz domene funkcije, ali nije iz gomilišta domene, ne možemo izračunati limes u toj točki.

Pokažimo da je tako definirani limes jedinstven:

Lema 1.1. *Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ dana funkcija, gdje je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval, te neka postoje dva limesa funkcije f u točki $c \in I'$: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = A$ i $\lim\limits_{x \to c} f(x) = B$. Tada je $A = B$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, to jest neka je $A \neq B$. Budući da su A i B limesi, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, te specijalno δ postoji i za $\varepsilon = \frac{1}{2}|A - B|$, to jest za polovinu njihove udaljenosti.

Dakle, budući da

$$|x - c| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon = \frac{1}{2}|A - B|$$

i

$$|x - c| < \delta \implies |f(x) - B| < \varepsilon = \frac{1}{2}|A - B|,$$

imamo da je

$$\begin{aligned}
|A - B| &= |A - f(x) + f(x) - B| \leq |A - f(x)| + |f(x) - B| \\
&= |-(f(x) - A)| + |f(x) - B| = |-1||f(x) - A| + |f(x) - B| \\
&< \varepsilon + \varepsilon = \frac{1}{2}|A - B| + \frac{1}{2}|A - B| \\
&= |A - B|.
\end{aligned}$$

Primijetimo da je $|A - B| < |A - B|$ kontradikcija, stoga slijedi $A = B$. $\square$

Poslužit ćemo se definicijom limesa koju smo definirali početkom ovog poglavlja kako bismo izveli karakterizaciju neprekidnosti.

Napomena 1.1. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ dana funkcija, gdje je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval. Kažemo da je funkcija f neprekidna u točki $c \in I$ ukoliko vrijedi:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Zaista, uvrstimo li izraz iz Napomene 1.1 u Definiciju 1.3 dobijamo prvotnu definiciju neprekidnosti (Def. 1.1):

$$\begin{aligned}(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in I)\, 0 < |x - c| < \delta \implies |f(x) - L| &= \left| f(x) - \lim_{x \to c} f(x) \right| \\ &= |f(x) - f(c)| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Također će nam biti potrebna i definicija monotonosti funkcije:

Definicija 1.4. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ dana funkcija, gdje je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval. Kažemo da je funkcija f **monotono rastuća** na intervalu I ako

$$(\forall x, y \in I) \quad x < y \implies f(x) \leq f(y).$$

Ukoliko vrijedi $f(x) \geq f(y)$, funkcija f je **monotono padajuća** na intervalu I.
Također, ako vrijedi stroga nejednakost, funkcija f je **strogo monotono rastuća/padajuća** na danom intervalu.

Konačno, definirat ćemo i derivaciju funkcije, budući da je ista neophodna za opisivanje lokalnih ekstrema:

Definicija 1.5. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ dana funkcija, gdje je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval, te $c \in I$. Tada

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c},$$

ukoliko postoji, nazivamo derivacijom funkcije f u točki c, te označavamo s $f'(c)$.

Budući da je derivacija definirana preko limesa, slijedi da je derivacija funkcije u točki jedinstveno određena.

Sljedeći teorem daje vezu derivabilnosti i neprekidnosti.

Teorem 1.1. *Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ dana funkcija, gdje je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval. Ako je funkcija f derivabilna u točki $c \in I$, tada je ona i neprekidna u toj točki.*

Dokaz. Ovdje ćemo koristiti karakterizaciju neprekidnosti iz Napomene 1.1. Izračunajmo sljedeći limes:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to c} (f(x) - f(c)) &= \lim_{x \to c} \left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot (x - c) \right) \\ &= \lim_{x \to c} \left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right) \cdot \lim_{x \to c} (x - c) \\ &= f'(c) \cdot (c - c) \\ &= f'(c) \cdot 0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Stoga slijedi:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c),$$

dakle, funkcija f neprekidna je u točki $c \in I$. □

Pokažimo još nekoliko svojstava derivabilnih funkcija:

Teorem 1.2. *Neka su $f, g : I \to \mathbb{R}$ dane funkcije, gdje je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval. Ako su f i g derivabilne u točki $c \in I$ tada slijedi:*

i) funkcija $f+g$ derivabilna je u točki $c \in I$ i vrijedi

$$(f+g)'(c) = f'(c) + g'(c),$$

ii) funkcija fg derivabilna je u točki $c \in I$ i vrijedi

$$(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c),$$

iii) funkcija $\frac{f}{g}$, ukoliko je definirana u točki $c \in I$, derivabilna je u toj točki i vrijedi

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{g^2(c)}.$$

Dokaz. Pokažimo najprije tvrdnju i). Očito je:

$$\frac{(f+g)(x) - (f+g)(c)}{x-c} = \frac{f(x) + g(x) - f(c) - g(c)}{x-c} = \frac{f(x) - f(c)}{x-c} + \frac{g(x) - g(c)}{x-c}.$$

Iz definicije derivacije slijedi:

$$(f+g)'(c) = \lim_{x\to c} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(c)}{x-c} = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x-c} + \lim_{x\to c} \frac{g(x) - g(c)}{x-c} = f'(c) + g'(c),$$

čime je tvrdnja i) pokazana. Nadalje, lako se vidi da je

$$\begin{aligned}
\frac{(fg)(x) - (fg)(c)}{x-c} &= \frac{f(x)g(x) - f(c)g(c)}{x-c} \\
&= \frac{f(x)g(x) - f(c)g(x) + f(c)g(x) - f(c)g(c)}{x-c} \\
&= \frac{f(x) - f(c)}{x-c} g(x) + f(c) \frac{g(x) - g(c)}{x-c}.
\end{aligned}$$

Stoga imamo:

$$\begin{aligned}
(fg)'(c) &= \lim_{x\to c} \frac{(fg)(x) - (fg)(c)}{x-c} \\
&= \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x-c} \lim_{x\to c} g(x) + \lim_{x\to c} f(c) \lim_{x\to c} \frac{g(x) - g(c)}{x-c} \\
&= f'(c) \lim_{x\to c} g(x) + f(c)g'(c).
\end{aligned}$$

Kako su funkcije f i g derivabilne u točki $c \in I$, po Teoremu 1.2 slijedi da su i neprekidne u toj točki, stoga možemo iskoristiti Napomenu 1.1:

$$(fg)'(c) = f'(c) \lim_{x\to c} g(x) + f(c)g'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c).$$

Konačno, pokažimo i tvrdnju *iii*). Primijetimo da je

$$\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(c)}}{x-c}=\frac{\frac{g(c)-g(x)}{g(x)g(c)}}{x-c}=-\frac{\frac{g(x)-g(c)}{x-c}}{g(x)g(c)}.$$

Ponovno, iz Definicije 1.5 slijedi

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{g}\right)'(c)&=\lim_{x\to c}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(c)}}{x-c}\\&=-\lim_{x\to c}\frac{\frac{g(x)-g(c)}{x-c}}{g(x)g(c)}\\&=-\frac{\lim\limits_{x\to c}\dfrac{g(x)-g(c)}{x-c}}{\lim\limits_{x\to c}g(x)\lim\limits_{x\to c}g(c)}\\&=-\frac{g'(c)}{\lim\limits_{x\to c}g(x)g(c)}.\end{aligned}$$

Koristimo li opet Teorem 1.2 i Napomenu 1.1 imamo:

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(c)=-\frac{g'(c)}{\lim\limits_{x\to c}g(x)g(c)}=-\frac{g'(c)}{g(c)g(c)}=-\frac{g'(c)}{g^2(c)}.$$

Sada ćemo iskoristiti svojstvo umnoška derivabilnih funkcija koje smo maloprije dokazali:

$$\begin{aligned}\left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(c)&=f'(c)\left(\frac{1}{g}\right)(c)+f(c)\left(\frac{1}{g}\right)'(c)\\&=\frac{f'(c)}{g(c)}+f(c)\left(-\frac{g'(c)}{g(c)g(c)}\right)\\&=\frac{f'(c)}{g(c)}-\frac{f(c)g'(c)}{g^2(c)}\\&=\frac{f'(c)g(c)-f(c)g'(c)}{g^2(c)},\end{aligned}$$

čime je dokazana tražena tvrdnja *iii*). $\square$

2 Ekstremi funkcija

Mogli bismo reći da su lokalni ekstremi funkcije ekstremne, to jest stršeće, vrijednosti funkcije na nekom području, ne nužno na cijeloj domeni funkcije. Započnimo s preciznim definiranjem lokalnih ekstrema.

Definicija 2.1. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ dana funkcija, gdje je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval, te neka je $c \in I$. Ukoliko je

$$(\forall x \in I)\ f(x) \leq f(c),$$

tada je c točka **lokalnog maksimuma** funkcije f na intervalu I. Ako vrijedi stroga nejednakost te ako je $x \neq c$, radi se o točki **strogog lokalnog maksimuma** funkcije f na intervalu I.
Ako je

$$(\forall x \in I)\ f(x) \geq f(c),$$

tada je c točka **lokalnog minimuma** funkcije f na intervalu I. Također, ako vrijedi stroga nejednakost te ako je $x \neq c$, radi se o točki **strogog lokalnog minimuma** funkcije f na intervalu I.

Tako definirane točke lokalnih ekstrema možemo odrediti na više načina, primarno pomoću derivacija. Proći ćemo kroz nekoliko takvih metoda u ovom poglavlju.

Da bismo pokazali kako odrediti je li neka točka potencijalno lokalni ekstrem, najprije ćemo iskazati Fermatov teorem:

Teorem 2.1. ***(Fermat)*** *Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ dana funkcija, gdje je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval, f derivabilna na I, te neka f u točki $c \in I$ postiže lokalni ekstrem. Tada je $f'(c) = 0$.*

Dokaz. Pretpostavimo da funkcija f postiže lokalni minimum u točki c:

$$(\forall x \in I)\ f(x) \geq f(c).$$

Iz Definicije 1.5 slijedi:

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Ukoliko je $x < c$, vrijedi $x - c < 0$, stoga:

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0,$$

te ako je $x > c$, vrijedi $x - c > 0$, stoga:

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

Budući da je funkcija f derivabilna u c i zadani limesi postoje, zbog jedinstvenosti istih slijedi:

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = 0.$$

Dokaz se provodi analogno i ukoliko funkcija f u c postiže lokalni maksimum. □

Fermatov teorem jedan je od najvažnijih teorema diferencijalnog računa, te se također naziva i ***Nužan uvjet lokalnog ekstrema*** jer nam daje informacije o tome što je nužno potrebno da bi točka bila lokalni ekstrem.

Iz Teorema 2.1 slijedi da je vrijednost derivacije funkcije u točki u kojoj se postiže lokalni ekstrem uvijek nula, stoga je svaka točka u kojoj je vrijednost derivacije funkcije nula potencijalni lokalni ekstrem. Zato definiramo *stacionarnu točku.*

Definicija 2.2. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ dana funkcija, gdje je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval, te f derivabilna na I. Svaku točku $c \in I$ za koju vrijedi:

$$f'(c) = 0,$$

nazivamo **stacionarnom točkom** funkcije f na intervalu I.

Nadalje, *Bolzano-Weierstrassov* teorem jedan je od potrebnih nam teorema:

Teorem 2.2. ***(Bolzano-Weierstrass)*** *Neka je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na segmentu $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Tada je $f([a, b]) = [m, M]$ također segment.*

Dokaz. Za dokaz pogledajte [4] str. 77., Teorem 3.12.

□

Pokažimo sada kako pomoću derivacije možemo karakterizirati monotonost funkcije. Za to će nam biti potreban Rolleov teorem:

Teorem 2.3. ***(Rolle)*** *Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ dana funkcija, $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval, te f derivabilna na I. Ako za $a, b \in I$ vrijedi $f(a) = f(b) = 0$, tada postoji $c \in \langle a, b \rangle$ tako da je $f'(c) = 0$.*

Dokaz. U slučaju da je funkcija f konstanta na intervalu $\langle a, b \rangle$, točka c može biti bilo koja točka intervala $\langle a, b \rangle$ budući da je:

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \overset{f(x)=f(c)}{=} \lim_{x \to c} \frac{f(c) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{0}{x - c} = 0,$$

stoga je tvrdnja teorema trivijalno zadovoljena.
Pokažimo sada da tvrdnja teorema vrijedi i za funkciju koja nije konstantna. Po *Bolzano-Weierstrassovu* teoremu slijedi da na segmentu $[a, b]$ postoje minimalna i maksimalna vrijednost.
Kako funkcija nije konstantna na tom intervalu, ne mogu obje ekstremne vrijednosti biti na rubovima, jer bi se to kosilo sa zahtjevima da je $f(a) = f(b) = 0$. To znači da se barem jedna ekstremna vrijednost postiže na intervalu $\langle a, b \rangle$ te je ta vrijednost lokalni ekstrem.
Dakle, odaberemo onu točku lokalnog ekstrema koja nije na rubu, označimo je s c, a njenu vrijednost s $f(c)$ te stoga po *Fermatovu* teoremu vrijedi:

$$f'(c) = 0.$$

□

Ovaj će nam teorem pomoći u dokazivanju Lagrangeova teorema koji ćemo iskoristiti da pokažemo vezu između derivacije i monotonosti funkcije.

Teorem 2.4. ***(Lagrange)*** *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval, $f : I \to \mathbb{R}$ dana funkcija, te f derivabilna na I. Ako za $a, b \in I$ vrijedi $a < b$, tada postoji $c \in \langle a, b \rangle$ tako da:*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Dokaz. Konstruirajmo funkciju $g : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, takvu da je:

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Zbog derivabilnosti funkcije f, razlika $f(x)$ i konstante $f(a)$ je derivabilna kao i umnožak konstante $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ i polinoma prvog stupnja $(x-a)$. Stoga je cjelokupna funkcija g definirana kao razlika dvije derivabilne funkcije i sama derivabilna. Slijedi:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Kako vrijedi $g(a) = g(b) = 0$ možemo primijeniti *Rolleov* teorem: postoji $c \in \langle a, b \rangle$ tako da je

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Odnosno:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a),$$

što je i trebalo pokazati. □

Konačno, pokažimo kako su povezani derivacija i monotonost funkcije:

Teorem 2.5. *Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ dana funkcija, gdje je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval i f derivabilna na I. Funkcija f je (strogo) rastuća na I ako i samo ako:*

$$(\forall x \in I)\ f'(x) \overset{(>)}{\geq} 0,$$

a (strogo) padajuća na I ako i samo ako:

$$(\forall x \in I)\ f'(x) \overset{(<)}{\leq} 0.$$

Dokaz. Pretpostavimo da je funkcija f rastuća, te neka je $c \in I$ proizvoljna točka. Koristit ćemo Definiciju 1.5:

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Računamo li limes slijeva funkcije imamo

$$x < c \implies f(x) \leq f(c) \implies f(x) - f(c) \leq 0,$$

stoga:

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

Također, računamo li limes zdesna imamo

$$x > c \implies f(x) \geq f(c) \implies f(x) - f(c) \geq 0,$$

stoga:
$$\lim_{x\to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0.$$
Dakle, vrijedi:
$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0.$$
Pokažimo sada obrat tvrdnje: neka je
$$(\forall x \in I)\ f'(x) \geq 0,$$
te neka su $a, b \in I$ tako da $a < b$. Iz Lagrangeova teorema slijedi da postoji $c \in \langle a, b\rangle \subset I$ tako da vrijedi:
$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$
Kako smo pretpostavili da je $f'(c) \geq 0$, te $b - a > 0$, slijedi $f(b) - f(a) \geq 0$, to jest vrijedi:
$$b > a \implies f(b) \geq f(a).$$
Dakle, funkcija je rastuća. Ostali se slučajevi lako mogu analogno pokazati. □

Sada možemo, zajedno s *Fermatovim* teoremom, iskoristiti ovu tvrdnju za određivanje lokalnih ekstrema.

Teorem 2.6. *Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ dana funkcija, $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval, f derivabilna na I te neka je $c \in I$ stacionarna točka funkcije f. Ukoliko postoji $\varepsilon > 0$ tako da $\langle c-\varepsilon, c+\varepsilon\rangle \subseteq I$ te*
$$(\forall x \in \langle c-\varepsilon, c\rangle)\ f'(x) < 0$$
i
$$(\forall x \in \langle c, c+\varepsilon\rangle)\ f'(x) > 0,$$
tada se u točki $c \in I$ postiže ***lokalni minimum****.*
Nadalje, ako postoji $\varepsilon > 0$ tako da $\langle c-\varepsilon, c+\varepsilon\rangle \subseteq I$ te
$$(\forall x \in \langle c-\varepsilon, c\rangle)\ f'(x) > 0$$
i
$$(\forall x \in \langle c, c+\varepsilon\rangle)\ f'(x) < 0,$$
tada se u točki $c \in I$ postiže ***lokalni maksimum****.*

Dokaz. Neka
$$(\forall x \in \langle c-\varepsilon, c\rangle)\ f'(x) < 0$$
i
$$(\forall x \in \langle c, c+\varepsilon\rangle)\ f'(x) > 0.$$
Prema *Lagrangeovu* teoremu za svaki $x \in \langle c-\varepsilon, c+\varepsilon\rangle$ postoji t takav da je $t \in \langle x, c\rangle$ te da vrijedi
$$f(c) - f(x) = f'(t)(c-x).$$
Dakle, za $x \in \langle c-\varepsilon, c\rangle$ imamo $x < t < c$, stoga je $f'(t) < 0$ i $c - x > 0$, te slijedi:
$$f(c) - f(x) = f'(t)(c-x) < 0 \implies f(c) < f(x).$$
Isto vrijedi i za $x \in \langle c, c+\varepsilon\rangle$, stoga:
$$(\forall x \in \langle c-\varepsilon, c+\varepsilon\rangle \backslash \{c\})\ f(c) < f(x),$$
to jest, u točki $c \in I$ postiže se **lokalni minimum**.
Dokaz za slučaj lokalnog maksimuma pokazuje se analogno. □

Pokažimo sada na primjeru primjenu Teorema 2.6.

Primjer 2.1. *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana s $f(x) = x^2$. Dana funkcija derivabilna je na cijeloj svojoj domeni, tj. na $\mathbb{R}$, i znamo da je*

$$f'(x) = 2x.$$

Stoga:

$$f'(x) = 0 \iff 2x = 0 \iff x = 0.$$

Dakle, funkcija f ima samo jednu stacionarnu točku, $x = 0$.
Neka je $\varepsilon = 1$. Tada za svaki $x \in \langle -1, 0\rangle$ vrijedi $x < 0$, dakle:

$$(\forall x \in \langle -1, 0\rangle)\ f'(x) = 2x < 0.$$

Uzmemo li proizvoljni $x \in \langle 0, 1\rangle$ vrijedi $x > 0$, stoga:

$$(\forall x \in \langle 0, 1\rangle)\ f'(x) = 2x > 0.$$

Sada su zadovoljeni svi uvjeti Teorema 2.6 te slijedi da se u točki $x = 0$ postiže ***lokalni minimum****.*

Teorem 2.6 također se naziva i ***Dovoljan uvjet lokalnog ekstrema***. Primijetimo da on koristi isključivo prve derivacije te od nas zahtjeva da pronađemo određeni interval oko tražene točke. To samo po sebi kod jednostavnijih elementarnih funkcija nije teško, no u nekim se slučajevima može zakomplicirati.

Pokazat ćemo da je moguće na malo jednostavniji način pokazati je li neka točka točka lokalnog ekstrema, no taj način zahtjeva poznavanje vrijednosti viših derivacija funkcije u danoj točki.
Također, za razliku od Teorema 2.6 koji nam uvijek daje odgovor na pitanje je li nešto lokalni ekstrem, sljedeći teorem ne će uvijek davati traženi rezultat.

Definirajmo prvo više derivacije funkcije:

Definicija 2.3. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ dana funkcija, $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval, f derivabilna na I, $c \in I$ i $n \in \mathbb{N}$. Tada:

$$\lim_{x \to c} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(c)}{x - c},$$

ukoliko postoji, nazivamo **(n+1)-om derivacijom** funkcije f u točki c te označavamo s $f^{(n+1)}(c)$.

Pokažimo sada drugi način za određivanje lokalnih ekstrema:

Teorem 2.7. *Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ dana funkcija, $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval, te neka postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da je f $n + 1$ puta derivabilna na I. Ukoliko postoji $k \in \mathbb{N}, k \leq n$, tako da za $c \in I$ i za svaki $l \in \{1, ..., k\}$ vrijedi $f^{(l)}(c) = 0$ te $f^{(k+1)}(c) \neq 0$ tada:*

i) ako je $k + 1$ paran broj i $f^{(k+1)}(c) < 0$, u točki c postiže se ***lokalni maksimum****,*

ii) ako je $k + 1$ paran broj i $f^{(k+1)}(c) > 0$, u točki c postiže se ***lokalni minimum****,*

iii) ako je $k + 1$ neparan broj, u točki c ***nema lokalnog ekstrema****.*

Dokaz. Za dokaz pogledajte [4] str. 106., Teorem 4.13.

□

Poseban slučaj Teorema 2.7 koji ćemo koristiti jest za $n = 1$, kada dobijamo sljedeći korolar:

Korolar 2.1. *Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ dana funkcija, $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval, f dva puta derivabilna na I i $c \in I$. Ukoliko je $f'(c) = 0$ te*

$$f''(c) < 0,$$

točka c je ***točka lokalnog maksimuma****, a ako je*

$$f''(c) > 0,$$

radi se o ***točki lokalnog minimuma****.*

Dokaz. Dokaz se svodi na primjenu Teorema 2.7 za $n = 1$. Uvjeti teorema su zadovoljeni: funkcija f derivabilna je $n + 1$ puta na intervalu I, za $k = 1$ ispunjeno je $f^{(k)}(c) = 0$ i $f^{(k+1)}(c) \neq 0$.
Ako je $f^{(k+1)}(c) = f''(c) < 0$, točka c točka je lokalnog maksimuma, a ako je $f^{(k+1)}(c) = f''(c) > 0$, točka c točka je lokalnog minimuma. □

Primijetimo da za slučaj $f''(c) = 0$ Korolar 2.1 ne daje nikakav zaključak. U tom ćemo slučaju morati ispitati više derivacije dane funkcije f kako bismo mogli nešto zaključiti.

Primijenimo sada Korolar 2.1 na jednostavnom primjeru.

Primjer 2.2. *Već smo pokazali u Primjeru 2.1 kako funkcija definirana s $f(x) = x^2$ ima samo jednu stacionarnu točku, $x = 0$. Nadalje, također nam je poznato da*

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ f''(x) = (f'(x))' = 2 > 0.$$

Kako to vrijedi za svaki x, tako specijalno vrijedi i za $x = 0$. Sada su zadovoljeni svi uvjeti Korolara 2.1 te slijedi da se u točki $x = 0$ postiže ***lokalni minimum****.*

3 Primjene ekstrema funkcija jedne varijable

Postoji nebrojeno primjena ekstrema funkcija jedne varijable, stoga ćemo se u ovom radu ograničiti na nekoliko njih. Primarno ćemo rješavati praktične optimizacijske probleme u kojima je potrebno pronaći minimum ili maksimum funkcije koja opisuje dani problem.

Pri rješavanju takvih problema korisno je pridržavati se sljedećeg redoslijeda postupaka kojima se dani problem matematički opisuje i rješava:

i) Potrebno je dobro razumjeti problem i ograničenja koja su nam postavljena kako bismo točno znali u kojim parametrima i kakvu točno vrijednost tražimo. Također, korisno bi bilo skicirati problem, ukoliko je to moguće, budući da vizualizacija u većini slučajeva olakšava postavljanje problema.

ii) Nakon toga, potrebno je sve zapisati u matematičkoj notaciji, pri čemu treba paziti na konzistentnost cjelokupnog zapisa.

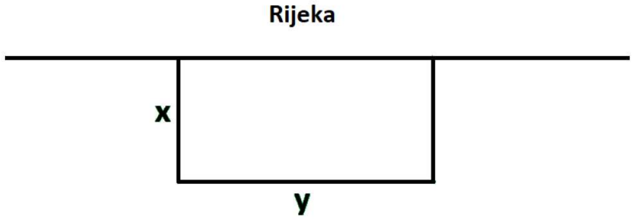
iii) Ukoliko smo traženu vrijednost označili y, tada ju je potrebno zapisati pomoću ostalih veličina. Ako se pojavi više nepoznanica trebamo ih sve pokušati iskazati preko jedne, budući da se bavimo funkcijama jedne varijable.

iv) Konačno, kada smo definirali funkciju jedne varijable, izračunamo njezin ekstrem na zadanoj domeni.

Primijenimo ovaj postupak na jednom jednostavnom primjeru.

Primjer 3.1. *Stočarka Ivana ima prostrani pašnjak na kojem pasu krave. Tijekom zime krave borave u štali, no kako se bliži ljeto htjela bi ih preseliti na otvoreno. Kako uz njezin pašnjak teče ravna rijeka, a vukovi u okruženju i njezine krave poznati su neplivači, Ivana je odlučila ograditi pravokutnik na njenom pašnjaku tako da jednu stranu tog pravokutnika čini rijeka, a ostale tri ograda. Ako Ivana ima* $500m$ *ograde, koja bi bila najveća površina koju može tom ogradom na zadani način ograditi?*

Dakle, stočarka želi ograditi pravokutnik na svome pašnjaku, jednu stranu već ima, onu uz rijeku, te na nju ne će trošiti nikakav materijal. Neka nam je tražena vrijednost, to jest ograđena površina, P*, te imamo dvije nasuprotne strane duljine* x *i jednu okomitu njima duljine* y*. Pogledajmo Sliku 1.*



Slika 1: Skica područja koje je Ivana planirala ograditi.

Poznato nam je da je površina pravokutnika stranica duljina x *i* y *zadana s* $P = xy$*. U problemu je također zadano da je ukupna duljina ograde* $O = 500m$*, što znači da je* $O = 2x + y = 500m$*. Izrazimo sada* y *preko* x *kako bismo dobili funkciju jedne varijable:*

$$y = 500 - 2x.$$

Stoga, funkcija koja opisuje dani problem glasi:

$$P = xy = x(500 - 2x) = -2x^2 + 500x.$$

Odredimo sada stacionarne točke funkcije $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kako smo i dosad određivali. Najprije izračunajmo prvu derivaciju funkcije:

$$P'(x) = -4x + 500,$$

te je izjednačimo s nulom

$$P'(x) = 0,$$

iz čega imamo

$$x = 125.$$

Zatim izračunajmo drugu derivaciju funkcije P:

$$P''(x) = -4.$$

Kako je vrijednost druge derivacije u svakoj točki konstantna i strogo manja od nule, možemo zaključiti da se u točki $x = 125$ postiže lokalni maksimum.

Uvrstimo li vrijednost $x = 125$ u izraz kojim smo zapisali y dobivamo:

$$y = 500 - 2x = 500 - 2 * 125 = 500 - 250 = 250.$$

Zaključujemo kako će stočarka ograditi najveću površinu pašnjaka ukoliko mu dvije stranice pravokutnika budu dugačke $125m$, a jedna $250m$.

Ovakav problem primjer je maksimizacijskog problema budući da želimo odrediti najveću moguću površinu u zadanim parametrima. Sljedeći problem primjer je minimizacijskog problema.

Primjer 3.2. *Kuharica Slava želi pakirati svoje juhe u konzerve zapremnine jedne litre, no želi potrošiti što je manje moguće aluminija na njih. Kolike moraju biti dimenzije konzervi uz dane uvjete?*

Kao i u prošlom primjeru, pročitajmo prvo detaljno tekst zadatka kako bismo odredili traženu vrijednost i ostale parametre. Zapremnina valjka visine h i radijusa baze r zadana je s: $V = r^2\pi h$. Pogledajmo sada Sliku 2.

Kako Slava želi potrošiti što manje aluminija, želimo minimizirati oplošje valjka koje je dano s: $O = 2r^2\pi + 2hr\pi = 2r\pi(r + h)$. Dakle, moramo odrediti minimum funkcije

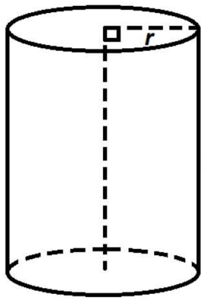
$$O = 2r\pi(r + h).$$

Kako vrijedi $V = r^2\pi h = 1$, možemo izraziti h preko r:

$$h = \frac{1}{r^2\pi},$$

stoga je funkcija koju moramo minimizirati definirana s:

$$O = 2r\pi(r + h) = 2r\pi\left(r + \frac{1}{r^2\pi}\right) = 2r\pi\left(\frac{r^3\pi + 1}{r^2\pi}\right) = \frac{2r^3\pi + 2}{r}.$$



Slika 2: Skica Slavine valjkaste konzerve.

Odredimo sada stacionarne točke ove funkcije tako što ćemo izračunati prvu derivaciju:

$$
\begin{aligned}
O'(r) &= \left(\frac{2r^3\pi + 2}{r}\right)' = \frac{6r^3\pi - 2r^3\pi - 2}{r^2} \\
&= \frac{4r^3\pi - 2}{r^2},
\end{aligned}
$$

i izjednačiti je s nulom:

$$
\begin{aligned}
\frac{4r^3\pi - 2}{r^2} &= 0 \\
4r^3\pi - 2 &= 0 \\
r &= \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \approx 0,542.
\end{aligned}
$$

Zatim izračunamo drugu derivaciju funkcije $O : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*:*

$$
\begin{aligned}
O''(r) &= \left(\frac{4r^3\pi - 2}{r^2}\right)' = \frac{(4r^3\pi - 2)'r^2 - (4r^3\pi - 2)(r^2)'}{r^4} \\
&= \frac{12r^4\pi - 8r^4\pi + 4r}{r^4} = \frac{4r^4\pi + 4r}{r^4} \\
&= \frac{4r^3\pi + 4}{r^3}.
\end{aligned}
$$

Uvrstimo li $r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} > 0$ *u drugu derivaciju dobijamo pozitivnu vrijednost, stoga se radi o lokalnom minimumu.*

Možemo sada uvrstiti $r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$ *u jednadžbu za h:*

$$
\begin{aligned}
h &= \frac{1}{r^2\pi} \\
&= \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}^2 \pi} \approx 1,084.
\end{aligned}
$$

Dakle, kako bi Slava potrošila najmanju količinu aluminija, mora pakirati svoje juhe u konzerve radijusa baze $\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\,dm \approx 5,419\,cm$ *te visine* $\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}^2 \pi}\,dm \approx 10,839\,cm$.

3.1 Primjene u ekonomiji

Prva je grana znanosti na koju ćemo se fokusirati s primjenama ekstrema ekonomija. Jedna od osnovnih primjena ekstrema funkcija jedne varijable je određivanje maksimalnog profita pri proizvodnji i prodaji nekog proizvoda. Funkciju profita možemo zapisati kao:

$$P(x) = Z(x) - T(x),$$

gdje je x količina proizvoda izrađena u nekoj tvornici, funkcija $Z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zarada za datu količinu izrađenog proizvoda, a funkcija $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ trošak za datu količinu izrađenog proizvoda.

Pogledajmo kako bi to izgledalo na primjeru:

Primjer 3.3. *Travarica Anđa vlasnica je tvornice ljekovitih napitaka. Zaposlenica Mira iz njezinog računovodstva izračunala je da će, ukoliko proizvede x hektolitara napitaka, u mjesec dana uprihodovati $Z(x) = -0,02x^3 + 0,2x^2 + 0,1x$ tisuća eura, a potrošiti $T(x) = 0,02x^2 - 0,6x + 1$ tisuća eura. Koliko hektolitara napitaka mora proizvesti ovaj mjesec kako bi što više profitirala?*

Krenimo kao i dosad, uvrstimo li dane funkcije u funkciju profita dobijamo:

$$P(x) = -0,02x^3 + 0,2x^2 + 0,1x - (0,02x^2 - 0,6x + 1) = -0,02x^3 + 0,18x^2 - 0,5x - 1.$$

Izračunajmo prvu derivaciju kako bismo odredili stacionarne točke:

$$\begin{aligned} P'(x) &= \left(-0,02x^3 + 0,18x^2 - 0,5x - 1\right)' \\ &= -0,06x^2 + 0,36x - 0,5. \end{aligned}$$

Izjednačimo li derivaciju s nulom, slijedi:

$$\begin{aligned} -0,06x^2 + 0,36x - 0,5 &= 0 \\ x_1 &\approx 3,816 \\ x_2 &\approx 2,184. \end{aligned}$$

Nakon stacionarnih točaka, odredimo drugu derivaciju funkcije profita:

$$\begin{aligned} P''(x) &= \left(-0,06x^2 + 0,36x - 0,5\right)' \\ &= -0,12x + 0,36. \end{aligned}$$

Nadalje, uvrstimo dobivene stacionarne točke u drugu derivaciju:

$$\begin{aligned} P''(x_1) &\approx -0,12 \cdot (3,816) + 0,36 \\ &\approx -\frac{306}{3125} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} P''(x_2) &\approx -0,12 \cdot (2,184) + 0,36, \\ &\approx \frac{306}{3125}. \end{aligned}$$

Kako je $P''(x_1) < 0$ zaključujemo da se radi o lokalnom maksimumu te da bi Anđa trebala mjesečno proizvesti oko 380 litara ljekovitog napitka kako bi ostvarila maksimalan profit.

Osim profita, na sličan način možemo modelirati i analizirati efekte reklamiranja nekog proizvoda.

Primjer 3.4. *Marketinški stručnjak Ratibor radi u Anđinoj tvornici ljekovitih napitaka. Kroz godine iskustva shvatio je da veća reklamna kampanja ne znači nužno i više novih mušterija. Kampanja treba biti dovoljno glasna da se za nju čuje, no ne preglasna da ne bude naporna. Uz nemalu pomoć Mire iz računovodstva, Ratibor je zaključio da za svakih potrošenih* x *tisuća eura na reklamu pridobije* $N(x) = 10x - \frac{x^2}{2}$ *tisuća novih kupaca Anđinih proizvoda. Koliko bi novca trebalo investirati u marketing kako bi se prikupio maksimalan broj novih mušterija?*

Krenimo redom, odredimo stacionarne točke dane funkcije, tako da prvo deriviramo funkciju:

$$N'(x) = 10 - x,$$

te je izjednačimo s nulom:

$$\begin{aligned} 10 - x &= 0 \\ x &= 10. \end{aligned}$$

Slijedi računanje druge derivacije:

$$N''(x) = -1.$$

Kako je druga derivacija negativna za svaku točku svoje domene, specijalno je i

$$N''(10) = -1 < 0,$$

odnosno, za $x = 10$ *postiže se maksimum.*
Dakle, Ratibor treba potrošiti 10.000 € *za maksimalnu učinkovitost kampanje.*

Osim što je uspješna vlasnica rastuće tvornice, Anđa također u svom posjedu ima i stambene zgrade koje iznajmljuje. Nedavno joj je prišla kućepaziteljica Anamarija s konstruktivnim opažanjem.

Primjer 3.5. *Anamarija u Anđino ime upravlja njenom zgradom sa stotinu identičnih stanova te je primijetila kako su svi stanovi puni ukoliko stanarinu postavi na* 350 €*, a ukoliko poveća stanarinu za* 10 € *izgubi stanare u jednom stanu. Kolika bi bila optimalna stanarina kako bi Anđa primala najveći dohodak?*

Postavimo matematički model: ako je x *broj praznih stanova, tada je Anđin prihod dan kao*

$$f(x) = (350 + 10x)(100 - x) = 35000 - 350x + 1000x - 10x^2 = -10x^2 + 650x + 35000.$$

Započnimo s računanjem prve derivacije:

$$f'(x) = -10 \cdot 2x + 650 + 0 = -20x + 650.$$

Zatim izjednačimo prvu derivaciju s nulom:

$$
\begin{aligned}
-20x + 650 &= 0 \\
20x &= 650 \\
x &= 32,5.
\end{aligned}
$$

Sljedeće je što moramo izračunati druga derivacija:

$$f''(x) = -20 + 0 = -20 < 0.$$

Kako je druga derivacija negativna za svaku točku domene, možemo zaključiti kako se radi o lokalnom maksimumu. Budući da pola stana ne može biti prazno, provjerimo koliki će biti prihodi za $x = 32$ prazna stana te za $x = 33$ prazna stana:

$$f(32) = -10 \cdot (32)^2 + 650 \cdot 32 + 35000 = 45560 \quad f(33) = -10 \cdot (33)^2 + 650 \cdot 33 + 35000 = 45560.$$

Budući da će profit biti jednak, Anamarija je preporučila Anđi da postavi stanarine na $350 + 32 \cdot 10 = 670$ eura kako bi što više ljudi bilo useljeno.

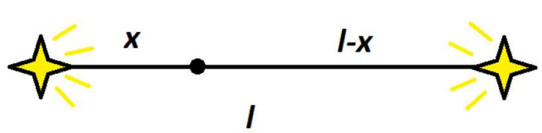
3.2 Primjene u fizici

Sljedeća je znanost kojom ćemo se baviti fizika. Kao i u svakoj drugoj grani, primjene su nebrojene pa ćemo se ograničiti na nekoliko njih i prvi ćemo primjer potražiti u optici. Koristit ćemo činjenicu da je osvjetljenje E [lx] neke točke dano kao omjer intenziteta izvora svjetlosti I [cd] i kvadrata udaljenosti točke od izvora svjetlosti x [m]. Također, ključno je naglasiti kako se točka i izvori svjetlosti nalaze u istoj ravnini, inače bismo morali uzeti i kut upadne zrake u obzir, no ovako ga možemo zanemariti.

Primjer 3.6. *Fizičarka Svjetlana radi na pokusu. Ima dvije lampe različitih intenziteta koje su postavljene na međusobnoj udaljenosti $5\,m$. Ukoliko je intenzitet prve lampe $50\,cd$, a intenzitet druge $66\,cd$, Svjetlanu zanima na kojim se pozicijama između dvije lampe nalaze najsvjetlija i najtamnija točka.*

Pogledajmo Sliku 3 i navedimo formulu za osvjetljenje:

$$E = \frac{I}{x^2}.$$



Slika 3: Skica Svjetlanina pokusa.

Neka je intenzitet prve lampe I_1, intenzitet druge I_2, udaljenost među lampama l i x udaljenost od prve lampe.

Tada je osvjetljenje neke točke na udaljenosti x od prve lampe dano formulom:

$$E = E_1 + E_2 = \frac{I_1}{x^2} + \frac{I_2}{(l-x)^2}.$$

Odredimo stacionarne točke ove funkcije tako što ćemo izračunati prvu derivaciju:

$$\begin{aligned}E'(x) &= \left(\frac{I_1}{x^2} + \frac{I_2}{(l-x)^2}\right)' = \frac{-2I_1}{x^3} - \frac{-2I_2}{(l-x)^3} \\ &= \frac{2I_2}{(l-x)^3} - \frac{2I_1}{x^3},\end{aligned}$$

te je izjednačiti s nulom:

$$\begin{aligned}\frac{2I_2}{(l-x)^3} - \frac{2I_1}{x^3} &= 0 \\ \frac{2I_2x^3 - 2I_1(l-x)^3}{x^3(l-x)^3} &= 0 \\ \frac{l-x}{x} &= \sqrt[3]{\frac{I_2}{I_1}}.\end{aligned}$$

Imamo da je:

$$\begin{aligned}x &= \frac{l}{1+\sqrt[3]{\frac{I_2}{I_1}}} \\ &= \frac{5}{1+\sqrt[3]{\frac{66}{50}}} \approx 2,384.\end{aligned}$$

Izračunajmo sada drugu derivaciju:

$$\begin{aligned}E''(x) &= \left(\frac{2I_2}{(l-x)^3} - \frac{2I_1}{x^3}\right)' = \frac{-6I_2}{(l-x)^4}\cdot(-1) - \frac{-6I_1}{x^4} \\ &= \frac{6I_1}{x^4} + \frac{6I_2}{(l-x)^4}.\end{aligned}$$

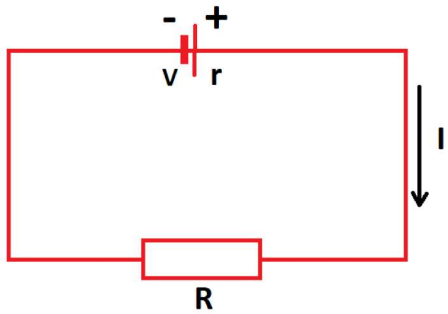
Kako je stacionarna točka $5 > x > 0$ slijedi $E''(x) > 0$. Dakle, radi se o lokalnom minimumu. Svjetlana će najtamniju točku pronaći oko 240 cm od prve lampe.

Najsvjetliju točku ne možemo pronaći, budući da bi ona bila kod lampe jačeg intenziteta, no odaberemo li točku koliko god blizu te lampe, uvijek će postojati prostor između točke i same lampe, te stoga i svjetlija točka od odabrane.

Sljedeći ćemo primjer potražiti u elektrodinamici. Poznato je da je jakost struje I u strujnom krugu dana kao omjer napona V i zbroja vanjskog otpora strujnog kruga R i unutarnjeg otpora strujnog kruga r. Radi se o Ohmovu zakonu koji je otkrio i prvi put objavio u svojoj knjizi 1827. njemački fizičar **Georg Ohm**.

Primjer 3.7. *Električar Brzotrz pokušava složiti strujni krug s otpornikom kao na Slici 4 kako bi trošilo preuzelo maksimalnu snagu od generatora. Koliki mora biti vanjski otpor R kako bi se postigla maksimalna snaga?*

Snaga koju trošilo preuzima od generatora dana je kao umnožak kvadrata jačine struje I u krugu te vanjskog otpora R, to jest:



Slika 4: Brzotrzov strujni krug.

$$P(R) = I^2 R = \left(\frac{V}{R+r}\right)^2 \cdot R = \frac{V^2 R}{(R+r)^2}.$$

Izračunajmo prvu derivaciju funkcije $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*:*

$$\begin{aligned} P'(R) = \left(\frac{V^2 R}{(R+r)^2}\right)' &= \frac{V^2 \cdot (R+r)^2 - V^2 R \cdot 2(R+r))}{(R+r)^4} \\ &= \frac{V^2(R+r) - 2V^2 R}{(R+r)^3} = \frac{V^2(r-R)}{(R+r)^3}. \end{aligned}$$

Sada izjednačimo prvu derivaciju s nulom:

$$\begin{aligned} \frac{V^2(r-R)}{(R+r)^3} &= 0 \\ V^2(r-R) &= 0 \\ r - R &= 0 \\ R &= r. \end{aligned}$$

Budući da za svaki $R < r$, $P'(R) > 0$, *a za svaki* $R > r$, $P'(R) < 0$, *prema Teoremu 2.6 slijedi da se u* $R = r$ *postiže maksimum.*

Stoga, kako bi trošilo primalo maksimalnu snagu od generatora, Brzotrz mora postaviti vanjski otpor jednak unutarnjem otporu.

Nadalje, primjenu lokalnih ekstrema možemo pronaći i u meteorologiji. Radi se o grani geofizike koja je stara kao i sama civilizacija, no značajnije je pomake doživjela početkom 17. stoljeća kada su **Descartes** i **Gallileo** počeli instrumentima mjeriti karakteristike vremena poput vlage, tlaka, temperature...

Primjer 3.8. *Meteorolog Mrazomor radi u DHMZ-u i prilikom eksperimentiranja primijetio je kako kapljica kiše s vremenom gubi svoju masu radi isparavanja. To smanjenje mase opisano je funkcijom:*

$$m(t) = m_0 - bt,$$

gdje je $m(t)$ *masa kapljice u kilogramima u trenutku* t, m_0 *početna masa kapljice u kilogramima i* b *brzina isparavanja u kilogramima po sekundi.*

Mrazomora zanima u kojem će trenutku kapljica imati najveću kinetičku energiju, ukoliko je početna masa kapljice $m_0 = 3 \cdot 10^{-5}\,kg$, a brzina isparavanja $b = 3,48 \cdot 10^{-8}\,kg/s$. Ubrzanje slobodnog pada je standardna fizikalna konstanta od $g = 9,81\,kg/s^2$.

Formula kinetičke energije tijela mase m i brzine v dana je kao:

$$E_{kin} = \frac{mv^2}{2}.$$

U ovom slučaju, kapljica je u slobodnom padu, stoga iz $g = \frac{v}{t}$, gdje je g ubrzanje slobodnog pada, v brzina u trenutku t, slijedi:

$$E_{kin} = \frac{m(gt)^2}{2} = \frac{mg^2t^2}{2}.$$

Nadalje, kako smo napomenuli, masa kapljice se smanjuje i vrijedi:

$$\begin{aligned} E_{kin}(t) &= \frac{m(t) \cdot g^2t^2}{2} = \frac{(m_0 - bt)g^2t^2}{2} \\ &= \frac{(m_0t^2 - bt^3)g^2}{2} = \frac{(3 \cdot 10^{-5}t^2 - 3,48 \cdot 10^{-8}t^3)96,24}{2} \\ &= (3 \cdot 10^{-5}t^2 - 3,48 \cdot 10^{-8}t^3)48,12 = 0,00144t^2 - 1,6746 \cdot 10^{-6}t^3. \end{aligned}$$

Započnimo s računanjem prve derivacije:

$$E'_{kin}(t) = 0,00144 \cdot 2t - 1,6746 \cdot 10^{-6} \cdot 3t^2 = 0,00288t - 5,0237 \cdot 10^{-6}t^2,$$

iz koje zaključujemo da imamo dvije stacionarne točke $t_1 = 0$ i $t_2 \approx 573$.
Izračunajmo sad drugu derivaciju:

$$E''_{kin}(t) = 0,00288 - 5,0237 \cdot 10^{-6} \cdot 2t = 0,00288 - 1,00475 \cdot 10^{-5}t.$$

Uvrstimo zatim dobivene stacionarne točke:

$$E''_{kin}(t_1) = 0,00288 > 0 \quad E''_{kin}(t_2) \approx -0,00288 < 0$$

Kako je $E''_{kin}(t_2) < 0$, možemo zaključiti kako se radi o lokalnom maksimumu te da će kapljica kiše postići maksimalnu kinetičku energiju nakon 573 sekundi, to jest nakon devet minuta i 33 sekunde.

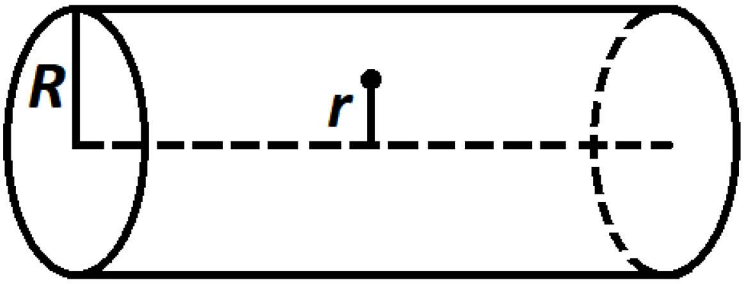
3.3 Primjena u medicini

U ovom potpoglavlju proučavat ćemo tok krvi kroz krvne žile. Prvi takav model izveo je **Jean Léonard Marie Poiseuille** 1840. koji je zaključio da brzina protoka krvi u nekoj točki ovisi isključivo o udaljenosti te točke od središta krvne žile (Slika 5):

$$v(r) = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2),$$

gdje je $v(r)$ brzina na udaljenosti r od središta u metrima po sekundi, P razlika tlakova u paskalima, η koeficijent viskoznosti krvi, l duljina krvne žile u metrima i R polumjer krvne žile, također u metrima.

Primjer 3.9. *Kardiolog Pero planira ugraditi premosnicu pacijentu, no kako bi operacija prošla u najboljem redu mora prikupiti sve potrebne informacije o toku krvi u žili koju planira zamijeniti. Primjerice, kolika je maksimalna brzina protoka krvi u žili. Duljina žile je* $15\,cm = 0,15\,m$*, polumjer je* $2\,cm = 0,02\,m$*, viskoznost krvi je* 4 *i tlak na početku žile je* $110\,mmHg \approx 14,7\,kPa$*, a na kraju žile* $125\,mmHg \approx 16,7\,kPa$*.*



Slika 5: Skica krvne žile na kojoj Pero operira.

Odredimo stacionarne točke dane funcije:

$$\begin{aligned} v'(r) &= \left(\frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)\right)' \\ &= \frac{-2Pr}{4\eta l} = 0, \end{aligned}$$

iz čega slijedi $r = 0$*.*
Izračunajmo sada i drugu derivaciju:

$$\begin{aligned} v''(r) &= \left(\frac{-2Pr}{4\eta l}\right)' \\ &= \frac{-2P}{4\eta l}, \end{aligned}$$

iz koje, uvrštavanjem zadanih vrijednosti, slijedi da je:

$$v''(0) = \frac{-2(16,7 - 14,7)}{4 \cdot 4 \cdot 0,15} = \frac{-5}{3} \approx -1,667 < 0.$$

Dakle, radi se o lokalnom maksimumu. Sada treba izračunati kolika je maksimalna brzina krvi u ovoj krvnoj žili:

$$\begin{aligned} v(0) &= \frac{16,7 - 14,7}{4 \cdot 4 \cdot 0,15}((0,02)^2 - 0^2) \\ &= \frac{1}{3000} \approx 3,333 \cdot 10^{-4}\, m/s. \end{aligned}$$

Slijedi da je najveća brzina kojom se krv kreće danom žilom oko $3,333 \cdot 10^{-4}\, m/s$*.*

3.4 Neke primjene u drugim područjima

U ovome ćemo potpoglavlju obraditi nekoliko primjera koji nemaju posebnu granu znanosti kojoj bi pripadali.

Primjer 3.10. *Novopečeni postolar Mrkonja upravo je završio šegrtovanje kod majstora Trive i otvorio je svoju postolarsku radnju kad se susreo s pomalo neobičnim problemom. Naime, u zračnu je luku došla nova avioprijevoznik te je odlučila počastiti građane jeftinim kartama, no avioprijevoznik ima specifične mjere za kofere koje mogu primiti. Širina im ne smije biti veća od metra, a opseg bočne strane veći od dva metra. Ako bi građani htjeli što veći kofer koji slijedi sva pravila avioprijevoznika, koje bi bile mjere takvog kofera s najvećom mogućom zapremninom?*

Zapremnina pravokutnika zadana je kao:

$$V = xyz,$$

gdje je x širina pravokutnika, y visina, a z duljina. Kako tražimo što veći kofer, za x ćemo odabrati najveći mogući, $x = 1$. Također, kako opseg bočne strane kofera ne smije biti veći od dva metra vrijedi $2y + 2z = 2$, stoga imamo:

$$y = \frac{2 - 2z}{2} = 1 - z.$$

Uvrštavanjem u formulu za zapremninu imamo:

$$V(z) = xyz = 1 \cdot (1 - z) \cdot z = z - z^2.$$

Izračunajmo prvu derivaciju kako bismo odredili stacionarne točke:

$$V'(z) = 1 - 2z,$$

i izjednačimo je s nulom:

$$\begin{aligned} 1 - 2z &= 0 \\ z &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

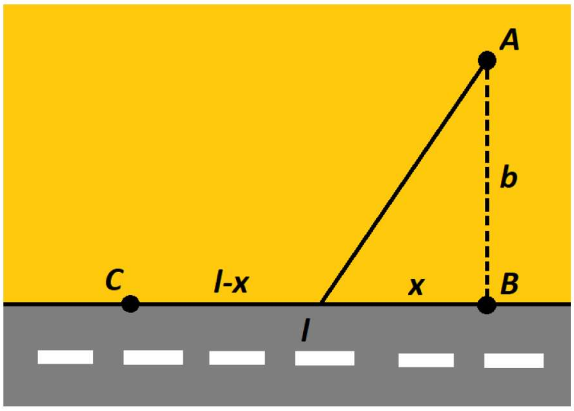
Kako je druga derivacija $V''(z) = -2$ negativna za svaku točku domene, možemo zaključiti kako se radi o lokalnom maksimumu te da će mjere idealnog kofera biti $x = 1\,m$, $y = 1 - z = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,m$ i $z = \frac{1}{2}\,m$.

Primjenu lokalnih ekstrema možemo pronaći i u sportu te ćemo u sljedećem primjeru pogledati kako lokalni ekstremi mogu pomoći trkaču u nevolji.

Primjer 3.11. *Trkačica Helena došla je do poslijednje etape svoje utrke. Potrebno je doći do točke A koja se nalazi u pijesku na udaljenosti b od ceste. Problem je što je Helenina brzina na pijesku (v_2) manja od njezine brzine na cesti (v_1) te je teško odrediti u kojem bi se trenutku trebala odvojiti od ceste i krenuti k cilju na pijesku. Od početne točke C poslijednje etape do točke B ima l metara (Slika 6).*

Prisjetimo se kako je brzina dana kao pređeni put u jedinici vremena:

$$v = \frac{s}{t} \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{s}{v}.$$



Slika 6: Skica poslijednje etape utrke koju Helena mora pretrčati.

Ako je x udaljenost od točke B kada se Helena počne kretati po pijesku prema cilju, tada možemo njezino vrijeme modelirati kao:

$$f(x) = \frac{l-x}{v_1} + \frac{\sqrt{x^2+b^2}}{v_2}.$$

Izračunajmo sada prvu derivaciju dane funkcije:

$$f'(x) = \left(\frac{l-x}{v_1} + \frac{\sqrt{x^2+b^2}}{v_2}\right)' = \frac{-1}{v_1} + \frac{x}{\sqrt{x^2+b^2}v_2}.$$

Izjednačimo je sada s nulom kako bismo dobili stacionarne točke:

$$\begin{aligned}
\frac{-1}{v_1} + \frac{x}{\sqrt{x^2+b^2}v_2} &= 0\\
\frac{x}{\sqrt{x^2+b^2}v_2} &= \frac{1}{v_1}\\
v_1 x &= \sqrt{x^2+b^2}v_2\\
v_1^2x^2 &= (x^2+b^2)v_2^2\\
v_1^2x^2 - v_2^2x^2 &= b^2v_2^2\\
x^2(v_1^2-v_2^2) &= b^2v_2^2\\
x^2 &= \frac{b^2v_2^2}{v_1^2-v_2^2}\\
x &= \frac{bv_2}{\sqrt{v_1^2-v_2^2}}.
\end{aligned}$$

Slijedi određivanje druge derivacije kako bismo provjerili radi li se o maksimumu ili minimumu:

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \left(\frac{-1}{v_1} + \frac{x}{\sqrt{x^2+b^2}v_2}\right)' = 0 + \frac{1\cdot(\sqrt{x^2+b^2}v_2) - x\left(\frac{xv_2}{\sqrt{x^2+b^2}}\right)}{(x^2+b^2)v_2^2} \\
&= \frac{\sqrt{x^2+b^2}v_2 - \frac{x^2v_2}{\sqrt{x^2+b^2}}}{(x^2+b^2)v_2^2} = \frac{\sqrt{x^2+b^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+b^2}}}{(x^2+b^2)v_2} \\
&= \frac{\frac{x^2+b^2-x^2}{\sqrt{x^2+b^2}}}{(x^2+b^2)v_2} = \frac{\frac{b^2}{\sqrt{x^2+b^2}}}{(x^2+b^2)v_2} \\
&= \frac{b^2}{(x^2+b^2)^{\frac{2}{3}}v_2}.
\end{aligned}
$$

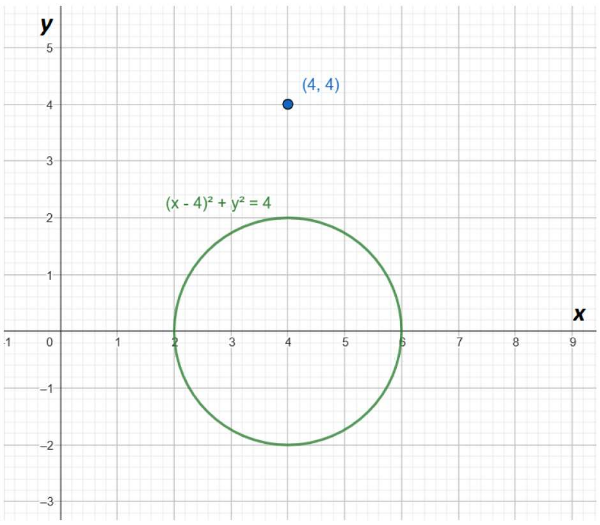
Kako je druga derivacija pozitivna za svaku točku domene, možemo zaključiti kako se radi o lokalnom minimumu.

Prirodno se postavlja pitanje što je s rubovima, to jest što ako Helena odmah krene na pijesak ili ako čeka da dođe do točke B i krene prema cilju. Primijetimo da, kako je druga derivacija uvijek pozitivna, slijedi da prva derivacija isključivo raste. Kako je $x = \frac{bv_2}{\sqrt{v_1^2-v_2^2}}$ stacionarna točka, slijedi da je $f'(x) = 0$, a budući da je prva derivacija stalno rastuća, slijedi da je negativna na intervalu $\langle 0, x\rangle$, a pozitivna na intervalu $\langle x, l\rangle$, što povlači $f(0) > f(x)$ te $f(l) > f(x)$.

Dakle, kako bi najbrže stigla do cilja Helena bi trebala, kad dođe na udaljenost $x = \frac{bv_2}{\sqrt{v_1^2-v_2^2}}$ od točke B, skrenuti ravno prema cilju.

Posljednju primjenu u ovom radu potražit ćemo u matematici.

Primjer 3.12. *Profesorica Ivona želi pokazati svojim učenicima što se sve može odrediti uz pomoć lokalnih ekstrema. Skicirala je kružnicu danu jednadžbom $(x-4)^2 + y^2 = 4$ te točku $(4,4)$ (Slika 7). Zatim je postavila sljedeći problem: koja je točka na danoj krivulji najbliža točki $(4,4)$?*



Slika 7: Skica primjera profesorice Ivone.

Poznato je da je euklidska udaljenost točaka (x_1, y_1) i (x_2, y_2) zadana kao:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

No, u ovom je primjeru poznata druga točka $(x_2, y_2) = (4, 4)$*, kao i odnos među koordinatama prve točke:*

$$\begin{aligned} (x-4)^2 + y^2 &= 4 \\ y^2 &= 4 - (x-4)^2 = -x^2 + 8x - 12. \end{aligned}$$

Sa Slike 7 je očito da će y *za dani problem biti pozitivan, te je zato:*

$$y = \sqrt{-x^2 + 8x - 12}.$$

Stoga imamo:

$$d(x) = \sqrt{(x-4)^2 + \left(\sqrt{-x^2 + 8x - 12} - 4\right)^2}.$$

Kako je norma nenegativna funkcija, slijedi da je lokalni ekstrem funkcije d *također i lokalni ekstrem funkcije* d^2*. Stoga ćemo, kako bismo olakšali račun, odrediti ekstreme funkcije* d^2*:*

$$f(x) = d^2(x) = (x-4)^2 + \left(\sqrt{-x^2 + 8x - 12} - 4\right)^2.$$

Izračunajmo prvu derivaciju funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*:*

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x-4) \cdot 1 + 2\left(\sqrt{-x^2 + 8x - 12} - 4\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{-x^2 + 8x - 12}} \cdot (-2x + 8) \\ &= 2x - 8 + -2x + 8 - \frac{-8x + 32}{\sqrt{-x^2 + 8x - 12}} = -\frac{-8x + 32}{\sqrt{-x^2 + 8x - 12}}. \end{aligned}$$

Zatim, izjednačimo prvu derivaciju s nulom kako bismo odredili stacionarne točke:

$$\begin{aligned} -\frac{-8x + 32}{\sqrt{-x^2 + 8x - 12}} &= 0 \\ -8x + 32 &= 0 \\ x &= 4. \end{aligned}$$

Potom računamo drugu derivaciju kako bi odredili postiže li se u danoj točki ekstrem:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{-8\sqrt{-x^2 + 8x - 12} - (-8x + 32)\frac{1}{2\sqrt{-x^2+8x-12}}(-2x + 8)}{-x^2 + 8x - 12} \\ &= -\frac{-8\sqrt{-x^2 + 8x - 12} - \frac{8x^2 - 32x - 32x + 128}{\sqrt{-x^2+8x-12}}}{-x^2 + 8x - 12} \\ &= -\frac{\frac{8x^2 - 64x + 96 - 8x^2 + 64x - 128}{\sqrt{-x^2+8x-12}}}{-x^2 + 8x - 12} \\ &= \frac{32}{\sqrt{-x^2 + 8x - 12}}. \end{aligned}$$

Budući da je:

$$f''(4) = \frac{32}{\sqrt{-4^2 + 8 \cdot 4 - 12}} = \frac{32}{\sqrt{4}} = 16 > 0,$$

možemo zaključiti kako je točka krivulje koja je najbliža točki $(4, 4)$ *određena s* $x = 4$. *Dakle, točka na krivulji* $(x - 4)^2 + y^2 = 4$ *najbliža točki* $(4, 4)$ *jest točka* $(4, 2)$.

Literatura

[1] K. Burazin, J. Jankov, I. Kuzmanović, I. Soldo, *Primjene diferencijalnog i integralnog računa funkcija jedne varijable*, Odjel za matematiku, Osijek, 2017.

[2] *Encyclopedia Britannica*, https://www.britannica.com/, 2023.

[3] I. Gogić, P. Pandžić, J. Tambača, *Diferencijalni račun funkcija više varijabli*, skripta, PMF–MO, Zagreb, 2019.

[4] B. Guljaš, *Matematička analiza I. i II.*, skripta, PMF–MO, Zagreb, 2018.

[5] D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika I (Prepravljeno izdanje)*, Odjel za matematiku, Osijek, 2017.

[6] S. Kurepa, *Matematička analiza 1: diferenciranje i integriranje (prerađeno i prošireno izadnje)*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.

[7] S. Kurepa, *Matematička analiza 2: funkcije jedne varijable*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.

[8] J. Stewart, *Single Variable Essential Calculus*, University of Toronto, Toronto, 2013.