Skaliranje vremena u slučajnim procesima

Majdenić, Ivana

Master's thesis / Diplomski rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, School of Applied Mathematics and Informatics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Fakultet primijenjene matematike i informatike**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:963631

Rights / Prava: In copyright/Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2025-04-02**

Repository / Repozitorij:

Repository of School of Applied Mathematics and Informatics

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni diplomski studij matematike
Smjer: Financijska matematika i statistika

Ivana Majdenić

Skaliranje vremena u slučajnim procesima

Diplomski rad

Osijek, 2023.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni diplomski studij matematike
Smjer: Financijska matematika i statistika

Ivana Majdenić

Skaliranje vremena u slučajnim procesima

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Nenad Šuvak

Osijek, 2023.

Sadržaj

1 Uvod

U ovom diplomskom radu bavimo se skaliranjem vremena u slučajnim procesima. U okviru modeliranja, ideja skaliranja vremena je pronaći jednostavniji prikaz za slučajni proces $X = (X_t,\, t \geq 0)$, kombinirajući proces $L = (L_t,\, t \geq 0)$ s dobro poznatom strukturom i slučajni proces $T = (T_t,\, t \geq 0)$ kojim modeliramo vrijeme. Dakle, cilj je za slučajni proces X komplicirane strukture pronaći jednostavniji prikaz kombiniranjem jednostavnijeg slučajnog procesa L u vremenu modeliranom nekim drugim, prikladnim, slučajnim procesom T. Postupak skaliranja vremena podrazumijeva da prelazimo sa starog vremena t na novo vrijeme t', $t' = T_t$, na način da možemo početni komplicirani proces X_t konstruirati korištenjem jednostavnijeg procesa L_t u novom vremenu tako da vrijedi $X_t = L_{T_t}$.

1.1 Osnovni pojmovi

Neka je $\big(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P\big)$ filtrirani vjerojatnosni prostor sa skupom elementarnih događaja Ω, σ-algebrom $\mathscr{F}$ na Ω i vjerojatnosnom mjerom P te filtracijom $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t,\, t \geq 0)$, koja je zdesna neprekidna, neopadajuća familija σ-podalgebri od $\mathscr{F}$. Pogledajmo definiciju procesa skaliranja vremena.

Definicija 1.1. Proces skaliranja vremena $(T_t, t \geq 0)$ je zdesna neprekidan, rastući, $\mathbb{F}$-adaptiran slučajni proces s vrijednostima u $[0, \infty)$ takav da je $\lim\limits_{t \to +\infty} T_t = +\infty$. T_t je također vrijeme zaustavljanja za svaki $t \geq 0$, odnosno $\{T_t \leq t\} \in \mathscr{F}_t$, $\forall t \geq 0$.

Uvođenjem $\hat{\mathscr{F}}_t := \mathscr{F}_{T_t}$ definiramo vremenski promijenjenu filtraciju $\mathbb{G} = (\hat{\mathscr{F}}_t, t \geq 0)$. Inverzna promjena vremena $(\hat{T}_t, t \geq 0)$, definirana kao $\hat{T}_t := \inf\{s \geq 0 : T_s > t\}$, je rastući proces i vrijedi $\lim\limits_{t \to +\infty} \hat{T}_t = +\infty$ te je $\hat{T}_t$ $\mathscr{F}_t$-vrijeme zaustavljanja. Sada za $\mathbb{F}$-adaptiran proces $(X_t, t \geq 0)$ možemo razmatrati vremenski promijenjen proces $X_{\hat{T}_t}$. Uočavamo kako su procesi promjene vremena T_t i $\hat{T}_t$ međusobno inverzni, jer smo mogli konstruirati $\hat{T}_t$ koristeći T_t, $\hat{T}_t = \inf\{s \geq 0 : T_s > t\}$ ili T_t pomoću $\hat{T}_t$, $T_t = \inf\Big\{s \geq 0 : \hat{T}_s > t\Big\}$. Kako je navedeno da su procesi međusobno inverzni, slijedi:

$$T_t = \hat{T}_t^{-1},$$

odnosno

$$\hat{T}_{T_t} = \hat{T}_{\hat{T}_t^{-1}} = t.$$

Analogno se dobije

$$T_{\hat{T}_t} = t.$$

2 Skaliranje vremena u difuzijama

2.1 Definicija difuzije i procesa skaliranja vremena

Najprije navedimo definiciju Brownovog gibanja.

Definicija 2.1. Slučajni proces $W = (W_t, t \geq 0)$ koji je definiran na vjerojatnosnom prostoru $\big(\Omega, \mathscr{F}, P\big)$ naziva se Brownovim gibanjem ako vrijedi sljedeće:

(i) trajektorije $t \mapsto W_t(\omega)$ su neprekidne P-g.s., za svaki fiksni $\omega \in \Omega$,

(ii) $P(W_0 = 0) = 1$,

(iii) za $0 \leq s \leq t$, $W_t - W_s$ je jednako distribuirano kao W_{t-s},

(iv) za $0 \leq s \leq t$, $W_t - W_s$ je slučajna varijabla nezavisna od familije $(W_u, u \leq s)$,

(v) $\forall t > 0$, $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$.

Neka je $\big(\Omega, \mathscr{F}, P\big)$ vjerojatnosni prostor s prirodnom filtracijom Brownovog gibanja $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t,\, t \geq 0)$, gdje je $\mathscr{F}_t = \sigma(W_s, 0 \leq s \leq t)$. Difuzija je Markovljev proces $X = (X_t, t \geq 0)$ na vjerojatnosnom prostoru $\big(\Omega, \mathscr{F}, P\big)$ u neprekidnom vremenu s neprebrojivim skupom stanja S i g.s. neprekidnim trajektorijama. Svaka difuzija zadovoljava sljedeći zahtjev:

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} P(|X_{t+h} - x| > \varepsilon | X_t = x) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0, \forall x \in S \tag{2.1}$$

što osigurava g.s. neprekidnost trajektorija difuzije. Neka je $S = (a, b), S = (a, b], S = [a, b)$ ili $S = [a, b]$ za neke $a, b \in \mathbb{R}$, gdje dozvoljavamo da je $a = -\infty$ i/ili $b = \infty$. Označimo s $\Delta X_t(h)$ prirast procesa X na intervalu duljine h, $\Delta X_t(h) = X_{t+h} - X_t$. Zahtijeva se da za $a < x < b$, uz pretpostavku o postojanju svih potrebnih momenata,

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} E[\Delta X_t(h) | X_t = x] = \mu(x, t), \tag{2.2}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} E[(\Delta X_t(h))^2 | X_t = x] = \sigma^2(x, t), \tag{2.3}$$

postoje i da su neprekidne funkcije prostorne varijable $x \in S$ i vremenske varijable $t \geq 0$. Funkcija $\mu(x, t)$ zove se infinitezimalno očekivanje ili drift parametar, a funkcija $\sigma^2(x, t)$ infinitezimalna varijanca ili parametar difuzije. Difuzija se formalno definira kao Markovljev proces u neprekidnom vremenu s neprebrojivim skupom stanja koji zadovoljava zahtjev (2.1) i za kojega su infinitezimalni parametri (2.2) i (2.3) neprekidne funkcije obiju nezavisnih varijabli. Također, difuzija je rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe.
Navodimo općenitiji slučaj, to jest stohastičku diferencijalnu jednadžbu sljedećeg oblika

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t,\ 0 \leq t \leq T,$$

gdje je $W = (W_t, 0 \leq t \leq T)$ Brownovo gibanje koje nazivamo pogonskim procesom, a $\mu(t, x)$ i $\sigma(t, x)$ su determinističke funkcije koje nazivamo drift parametrom i parametrom difuzije. U nastavku promatramo stohastičku diferencijalnu jednadžbu u kojoj je drift parametar $\mu = 0$, a parametar difuzije $\sigma = \alpha$, to jest

$$dX(t) = \alpha(t, X(t))dW(t), \tag{2.4}$$

gdje je W standardno Brownovo gibanje i $\alpha(t, x)$ je neprekidna, realna funkcija na $[0, \infty) \times \mathbb{R}$. Dovoljni uvjeti za egzistenciju i jedinstvenost jakog rješenja stohastičke diferencijalne jednadžbe $dX(t) = \alpha(t, X(t))dW(t)$ su:

1. X_0 je nezavisna od Brownovog gibanja $W(t)$ i kvadratno je integrabilna, to jest $E[X_0^2] < \infty$,

2. funkcija $\alpha(t,x)$ je neprekidna te za sve $t \geq 0$ i sve $x \in \mathbb{R}$ zadovoljava sljedeće zahtjeve:

   (a) zadovoljava Lipschitzov uvjet po prostornoj varijabli, to jest postoji konstanta $k_1 > 0$ takva da je
   $$|\alpha(t,x) - \alpha(t,y)| \leq k_1|x-y|,$$

   (b) zadovoljava uvjet linearnog rasta, to jest postoji konstanta $k_2 > 0$ takva da je
   $$\alpha^2(t,x) \leq k_2^2(1+x^2).$$

U [7] detaljnije pogledati definicije slabog i jakog rješenja stohastičke diferencijalne jednadžbe i uvjete za egzistenciju i jedinstvenost jakog rješenja. Kako su mnoga svojstva Brownovog gibanja, pa prema tome i difuzije čije je ono pogonski proces, diktirana varijacijom Brownovog gibanja, odnosno samog procesa, u nastavku navodimo definiciju varijacije funkcije.

Definicija 2.2. Neka je $\pi = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$, subdivizija segmenta $[0,T]$ s dijametrom $||\pi|| = \max\limits_{i \in \{1,\ldots,n\}} (t_i - t_{i-1})$. Za $p \geq 1$ varijacija funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ na $[0,T]$ definirana je izrazom

$$V_T^p(f,\pi) = \lim_{||\pi|| \to 0} \sum_{j=1}^{n} |f(t_j) - f(t_{j-1})|^p.$$

Teorem 2.3. *Neka je $\widetilde{W}(t)$ jednodimenzionalno $\mathscr{F}_t$-izmjerivo Brownovo gibanje s $\widetilde{W}(0) = 0$,na vjerojatnosnom prostoru $\big(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P\big)$ i neka je $X(0)$ $\mathscr{F}_0$-izmjeriva slučajna varijabla. Definiramo proces $V = V(t)$ tako da vrijedi*

$$V(t) = X(0) + \widetilde{W}(t).$$

Neka je T_t proces promjene vremena:

$$T_t = \int_0^t \alpha^{-2}(T_s, X(0) + \widetilde{W}(s))ds.$$

Ako je

$$X(t) := V(\hat{T}_t) = X(0) + \widetilde{W}(\hat{T}_t),$$

gdje je

$$\hat{T}_t = \int_0^t \alpha^2(s, X(0) + \widetilde{W}(\hat{T}_s))ds,$$

i $\hat{\mathscr{F}}_t := \mathscr{F}_{\hat{T}_t}$, tada postoji $\hat{\mathscr{F}}_t$-izmjerivo Brownovo gibanje $W = W(t)$ tako da je $(X(t), W(t))$ rješenje $dX(t) = \alpha(t, X(t))dW(t)$ na vjerojatnosnom prostoru $\big(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{G}, P\big)$. Ovdje je $\hat{T}_t$ inverzni proces od T_t.

Dokaz teorema može se pronaći u [4], poglavlje 4, teorem 4.3.
U ovom slučaju je $M(t) := \widetilde{W}(\hat{T}_t)$ martingal s kvadratnom varijacijom

$$\langle M \rangle(t) = \hat{T}_t = \int_0^{\hat{T}_t} \alpha^2(T_s, X)dT_s = \int_0^t \alpha^2(s, X)ds,$$

gdje $\hat{T}_t$ zadovoljava

$$\hat{T}_t = \int_0^t \alpha^2(s, X(0) + \widetilde{W}(\hat{T}_s))ds.$$

Pretpostavimo da je $X(0)$ konstanta. Zamjenom $X(t)$ u (2.4) s $(X(0) + \widetilde{W}(\hat{T}_t))$ slijedi

$$d(X(0) + \widetilde{W}(\hat{T}_t)) = \alpha(t, X(t))dW(t),$$

iz čega slijedi

$$d\widetilde{W}(\hat{T}_t) = \alpha(t, X(t))dW(t),$$

to jest

$$dW(t) = \alpha^{-1}(t, X(t))d\widetilde{W}(\hat{T}_t).$$

Nadalje, jer je $W(0) = 0$, slijedi

$$W(t) = \int_0^t \alpha^{-1}(s, X(s))d\widetilde{W}(\hat{T}_s), \text{ a iz}$$

$d\widetilde{W}(\hat{T}_t) = \alpha(t, X(t))dW(t)$, uz $\widetilde{W}(0) = 0$, slijedi $\widetilde{W}(\hat{T}_t) = \int_0^t \alpha(s, X(s))dW(s)$, odnosno

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \alpha(s, X(s))dW(s).$$

Korolar 2.4. *Rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe*

$$dX(t) = a(X(t))dW(t)$$

može se napisati u sljedećem obliku

$$X(t) = X(0) + \widetilde{W}(\hat{T}_t),$$

gdje je $a(x)$ neprekidna izmjeriva funkcija, $\widetilde{W}(t)$ je jednodimenzionalno $\mathscr{F}_t$-izmjerivo Brownovo gibanje s $\widetilde{W}(0) = 0$, dano na vjerojatnosnom prostoru $\big(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P\big)$ i $X(0)$ je $\mathscr{F}_0$-izmjeriva slučajna varijabla. U tom slučaju vrijedi

$$T_t = \int_0^t a^{-2}(X(0) + \widetilde{W}(s))ds,$$

i

$$\hat{T}_t = \int_0^t a^2(X(0) + \widetilde{W}(\hat{T}_s))ds.$$

Nadalje, vrijedi da je $M(t) := \widetilde{W}(\hat{T}_t)$ $\mathbb{F}$-martingal s kvadratnom varijacijom

$$\langle M \rangle(t) = \hat{T}_t = \int_0^{\hat{T}_t} a^2(X)dT_s = \int_0^t a(X)^2 ds.$$

Također, pretpostavimo da je $X(0) = 0$, zamjenom $X(t)$ u (2.4) s $(X(0) + \widetilde{W}(\hat{T}_t))$ slijedi

$$d(X(0) + \widetilde{W}(\hat{T}_t)) = a(X(t))dW(t),$$

odnosno

$$d\widetilde{W}(\hat{T}_t) = a(X(t))dW(t).$$

Nadalje, uočimo da vrijedi

$$dW(t) = a^{-1}(X(t))d\widetilde{W}(\hat{T}_t),$$

a zbog $W(0) = 0$ slijedi da je

$$W(t) = \int_0^t a^{-1}(X(s))d\widetilde{W}(\hat{T}_s) = \int_0^t a^{-1}(X(0) + \widetilde{W}(\hat{T}_s))d\widetilde{W}(\hat{T}_s).$$

Iz $d\widetilde{W}(\hat{T}_t) = a(X(t))dW(t)$, uz $\widetilde{W}(0) = 0$, slijedi $\widetilde{W}(\hat{T}_t) = \int_0^t a(X(s))dW(s)$, odnosno

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(X(s))dW(s).$$

U daljnjem radu ćemo korolar 2.4 i ostale rezultate koristiti u dokazima tvrdnji koje će nam pomoći pri izvodu Black-Scholes-Mertonove formule.

2.2 Skaliranje vremena u Black-Scholes-Mertonovom modelu

U ovom poglavlju ćemo koristiti skaliranje vremena za izvođenje Black-Scholes-Mertonove formule za određivanje nearbitražne cijene europske call opcije. Tu cijenu zovemo premija te je važno odrediti pravednu visinu premije, jer kupac opcije plaća premiju na opciju kojom si osigurava pravo koje mu opcija daje. Opcija pripada izvedenim financijskim instrumentima čija se vrijednost izvodi iz vrijednosti osnovnih financijskih instrumenata, te se koristi za upravljanje rizikom na financijskom tržištu.

Neka je $\big(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P\big)$ filtrirani vjerojatnosni prostor i $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t, t \geq 0)$, $\mathscr{F}_t = \sigma(W_s, 0 \leq s \leq t)$. Sa $S(t)$ označavamo cijenu financijskog instrumenta u trenutku $t \geq 0$. Neka je T vrijeme dospijeća opcije i K cijena izvršenja. Kako bi bolje shvatili što znači nearbitražna cijena navodimo definiciju arbitraže.

Definicija 2.5. Arbitraža je samofinancirajući portfelj koji na početku vrijedi 0, te mu je u svakom trenutku vrijednost nenegativna i s pozitivnom vjerojatnošću generira zaradu u trenutku T.

U nastavku navodimo definiciju opcije.

Definicija 2.6. Opcija je ugovor koji vlasniku daje pravo, ali ne nameće obavezu, da kupi ili proda određeni financijski instrument do određenog datuma $T > 0$ u budućnosti po cijeni K određenoj u sadašnjosti $t = 0$.

Pogledajmo sada definiciju europske call i put opcije.

Definicija 2.7. Europska call opcija je ugovor koji vlasniku daje pravo, ali ne nameće obavezu, da kupi određeni financijski instrument u trenutku $T > 0$ po cijeni K određenoj u $t = 0$.

Cijenu financijskog instrumenta u trenutku dospijeća T označavamo s $S(T)$. Ako je cijena $S(T) > K$, vlasnik europske call opcije ima pravo kupiti financijski instrument za $K < S(T)$. Koristi svoje pravo, kupuje financijski instrument za K i prodaje na tržištu za $S(T)$, te mu opcija vrijedi $(S(T) - K)$. U drugom slučaju, ako je $S(T) < K$, vlasnik europske call opcije neće iskoristiti svoje pravo i opcija mu je bezvrijedna. Vrijednost europske call opcije u trenutku dospijeća T, za vlasnika je

$$C(T) = \max(S(T) - K, 0).$$

Definicija 2.8. Europska put opcija je ugovor koji vlasniku daje pravo, ali ne nameće obavezu, da proda određeni financijski instrument u trenutku $T > 0$ po cijeni K određenoj u $t = 0$.

Ako je cijena financijskog instrumenta u trenutku T veća od K, to jest $S(T) > K$, vlasnik europske put opcije neće iskoristiti svoje pravo i opcija mu je bezvrijedna. U suprotnom ako je $S(T) < K$, vlasnik europske put opcije ima pravo prodati financijski instrument za $K > S(T)$, te koristeći svoje pravo opcija mu vrijedi $(K - S(T))$. Vrijednost europske put opcije u trenutku dospijeća T, za vlasnika je

$$P(T) = \max\left(K - S(T), 0\right).$$

Slike 1. i 2. prikazuju vrijednosti europske call i put opcije za vlasnika u trenutku dospijeća T. Treba naglasiti da obje slike prikazuju vrijednosti opcija bez premije. Sa slike 1. uočavamo kako je vrijednost europske call opcije za vlasnika nula sve dok cijena financijskog instrumenta, na primjer dionice, ne prijeđe cijenu izvršenja K. Kada cijena dionice prijeđe cijenu izvršenja K vlasnik opcije ostvaruje profit. U drugom slučaju na slici 2. uočavamo da vlasnik opcije ostvaruje profit sve dok je cijena dionice manja od cijene izvršenja K.

Slika 1. Vrijednost europske call opcije u trenutku dospijeća

Slika 2. Vrijednost europske put opcije u trenutku dospijeća

U trenutku $t = 0$ kupac opcije prodavatelju plaća premiju kojom si osigurava pravo koje mu opcija daje. Glavno pitanje je kolika je pravedna visina premije i kako ju odrediti. Premiju za europsku call opciju označavamo s $C(0)$, a premiju za europsku put opciju s $P(0)$. Kako bismo odgovorili na pitanja pogledajmo dva koncepta, diskontiranje i princip nepostojanja arbitraže. Prvo promotrimo princip diskontiranja. Pretpostavimo da se depozit C ukamaćuje neprekidno uz intezitet kamate r, tada vrijednost depozita nakon t godina iznosi Ce^{rt}.
Pretpostavimo da u $t = 0$ imamo iznos $C(0)$. Tada u trenutku dospijeća T vrijedi $C(T) = e^{rT}C(0)$, to znači da ako u trenutku dospijeća imamo iznos novca $C(T)$ da u trenutku $t = 0$ moramo imati $C(0) = e^{-rT}C(T)$.
S druge strane, princip nepostojanja arbitraže se odnosi na rizičnu financijsku imovinu. Premiju europske call opcije možemo izračunati iz

$$C(0) = e^{-rT}E_Q[\max(S(T) - K, 0)], \tag{2.5}$$

gdje se očekivanje računa s obzirom na vjerojatnost Q neutralnu na rizik i ekvivalentnu objektivnoj vjerojatnosti P, te u odnosu na koju je proces diskontiranoh cijena $(\widetilde{S}(t), 0 \leq t \leq T)$, $\widetilde{S}(t) = e^{-rt}S(t)$ $\mathbb{F}$-martingal. Premija za europsku put opciju dana je s

$$P(0) = e^{-rT}E_Q[\max(K - S(T), 0)].$$

Navodimo Girsanovljev teorem koji će nam trebati pri izvodu Black-Scholes-Mertonove formule.

Teorem 2.9. *Neka je $(W(t), 0 \leq t \leq T)$ Brownovo gibanje na $\big(\Omega, \mathscr{F}, P\big)$ i $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t, 0 \leq t \leq T)$ njegova prirodna filtracija. Tada je slučajni proces $(X(t), 0 \leq t \leq T)$, gdje je*

$$X(t) = e^{-qW(t)-q^2\frac{t}{2}}, \quad E[X(t)] = 1, \quad q \in \mathbb{R},$$

$\mathbb{F}$-martingal. Relacija

$$Q(A) = E[X(t)I_A], \quad A \in \mathscr{F},$$

definira vjerojatnost na izmjerivom prostoru $\big(\Omega, \mathscr{F}\big)$ koja je ekvivalentna vjerojatnosti P i u odnosu na koju je slučajni proces $(\widetilde{W}(t), 0 \leq t \leq T)$, gdje je

$$\widetilde{W}(t) = W(t) + qt, \quad q \in \mathbb{R},$$

$\mathbb{F}$-adaptirano Brownovo gibanje na $\big(\Omega, \mathscr{F}, Q\big)$.

Skica dokaza se može pronaći u [8], poglavlje 6, teorem 6.4., str. 148-149.
Black-Scholes-Mertonovu formulu promatramo na financijskom tržištu u neprekidnom vremenu. Na takvom tržištu promatramo portfelj koji se sastoji od

- nerizične financijske imovine $B(t) = e^{rt}B(0)$ za koju vrijedi

  $$dB(t) = rB(t)dt, B(0) > 0, r > 0,$$

  gdje je r konstantna neprekidna kamatna stopa,

- rizične financijske imovine čija je vrijednost u trenutku t modelirana slučajnom varijablom $S(t)$ i za koju pretpostavljamo da joj se vrijednost kroz vrijeme može modelirati geometrijskim Brownovim gibanjem $(S(t), 0 \leq t \leq T)$, $S(t) = S(0)e^{\sigma W(t)+(\mu-\sigma^2/2)t}$.

Odnosno, geometrijsko Brownovo gibanje $(S(t), 0 \leq t \leq T)$, $S(t) = S(0)e^{\sigma W(t)+(\mu-\sigma^2/2)t}$ je rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), S(0) > 0. \tag{2.6}$$

Dokazat ćemo skaliranjem vremena da je s

$$C(0) = S(0)\Phi(y_+) - e^{-rT}K\Phi(y_-)$$

dana premija europske call opcije, gdje je

$$\Phi(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

i

$$y_+ := \frac{\ln(\frac{S(0)}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad y_- := \frac{\ln(\frac{S(0)}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

2.2.1 Izvod Black-Scholes-Mertonove formule

Najprije definirajmo Itôv proces i navodimo Itôvu formulu koja će nam trebati u daljnjem radu.

Definicija 2.10. Za slučajni proces $(X_t, t \geq 0)$ kažemo da je Itôv proces ako vrijedi

$$X_t = X_0 + \int_0^t A_s^{(1)} ds + \int_0^t A_s^{(2)} dW_s,$$

gdje su $(A_t^{(1)}, t \geq 0)$ i $(A_t^{(2)}, t \geq 0)$ adaptirani u odnosu na prirodnu filtraciju Brownovog gibanja $(W_t, t \geq 0)$ te su integrali u gornjem zapisu dobro definirani.

Teorem 2.11. *Neka je $(X_t, t \geq 0)$ Itôv proces i neka je $f(t, x)$ funkcija dviju varijabli s neprekidnim derivacijama drugog reda po vremenskoj varijabli t i prostornoj varijabli x. Tada vrijedi:*

$$f(t, X_t) - f(s, X_s) = \int_s^t \left(f_1(y, X_y) + A_y^{(1)} f_2(y, X_y) + \frac{1}{2}(A_y^{(2)})^2 f_{22}(y, X_y) \right) dy + \\ + \int_s^t A_y^{(2)} f_2(y, X_y) dW_y, \quad s < t.$$

Oznaka f_1 predstavlja derivaciju prvog reda po vremenskoj varijabli t funkcije $f(t, x)$, f_2 predstavlja derivaciju prvog reda po prostornoj varijabli x funkcije $f(t, x)$ i f_{22} predstavlja derivaciju drugog reda po prostornoj varijabli x funkcije $f(t, x)$. Skica dokaza može se pronaći u [7].

Pogledajmo sljedeću lemu koja govori o drugoj reprezentaciji rješenja stohastičke diferencijalne jednadžbe $dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$, koju ćemo iskoristiti u izvodu izraza za visinu premije europske call opcije. Zatim ćemo navesti svojstvo Brownovog gibanja koje se pojavljuje u navedenoj reprezentaciji rješenja te ćemo to svojstvo također iskoristiti u izvodu izraza za visinu premije.

Lema 2.12. *Rješenje jednadžbe* $dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), S(0) > 0$ *ima sljedeći oblik*

$$S(t) = e^{\mu t}(S(0) + \widetilde{W}(\hat{T}_t)),$$

gdje je $\widetilde{W}(t)$ *jednodimenzionalno Brownovo gibanje,*

$$\hat{T}_t = \sigma^2 \int_0^t [S(0) + \widetilde{W}(\hat{T}_s)]^2 ds$$

i

$$T_t = \sigma^{-2} \int_0^t [S(0) + \widetilde{W}(s)]^{-2} ds.$$

Dokaz. Koristit ćemo sljedeću verziju teorema 2.11

$$df(t, X_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu_t \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\sigma_t^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma_t \frac{\partial f}{\partial x} dW_t. \tag{2.7}$$

Definiramo $f(t, S) = e^{-\mu t} S(t)$. Znamo da vrijedi

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t).$$

Primjenom (2.7) dobivamo

$$\begin{aligned} df(t, S) &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu S(t) \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\sigma^2 S^2(t)}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \right) dt + \sigma S(t) \frac{\partial f}{\partial s} dW(t) \\ &= \left(-\mu e^{-\mu t} S(t) + \mu S(t) e^{-\mu t} \right) dt + \sigma S(t) e^{-\mu t} dW(t) \\ &= \sigma S(t) e^{-\mu t} dW(t). \end{aligned}$$

Supstitucijom $V(t) = f(t, S) = e^{-\mu t} S(t)$ dobivamo

$$dV(t) = \sigma V(t) dW(t). \tag{2.8}$$

Primjenom korolara 2.4 rješenje jednadžbe (2.8) može se napisati u sljedećem obliku, gdje je $a(V(t)) = \sigma V(t)$,

$$\begin{aligned} V(t) &= V(0) + \widetilde{W}(\hat{T}_t) \\ &= e^{-\mu \cdot 0} S(0) + \widetilde{W}(\hat{T}_t) \\ &= S(0) + \widetilde{W}(\hat{T}_t). \end{aligned}$$

U korolaru 2.4 stoji da je $\widetilde{W}(\hat{T}_t)$ jednodimenzionalno Brownovo gibanje i

$$T_t = \int_0^t a^{-2}(S(0) + \widetilde{W}(s)) ds = \sigma^{-2} \int_0^t (S(0) + \widetilde{W}(s))^{-2} ds,$$

$$\hat{T}_t = \int_0^t a^2(S(0) + \widetilde{W}(\hat{T}_s)) ds = \sigma^2 \int_0^t (S(0) + \widetilde{W}(\hat{T}_s))^2 ds.$$

Kako je $V(t) = e^{-\mu t} S(t)$ slijedi

$$e^{-\mu t} S(t) = S(0) + \widetilde{W}(\hat{T}_t),$$

odakle slijedi

$$S(t) = e^{\mu t}(S(0) + \widetilde{W}(\hat{T}_t)).$$

$\square$

U sljedećoj lemi dana su svojstva procesa $(\widetilde{W}(\hat{T}_t), t \geq 0)$.

Lema 2.13. *Proces $\widetilde{W}(\hat{T}_t)$ je martingal s očekivanjem nula i kvadratnom varijacijom*

$$\langle \widetilde{W}(\hat{T}_t) \rangle = \hat{T}_t = \sigma^2 \int_0^t [S(0) + \widetilde{W}(\hat{T}_s)]^2 ds$$

te ima sljedeću reprezentaciju

$$\widetilde{W}(\hat{T}_t) = S(0)(e^{\sigma W(t) - \frac{\sigma^2}{2} t} - 1).$$

Dokaz. Iz korolara 2.4 slijedi da je $\widetilde{W}(\hat{T}_t)$ martingal s kvadratnom varijacijom

$$\langle \widetilde{W}(\hat{T}_t) \rangle = \hat{T}_t = \int_0^t a^2(S(0) + \widetilde{W}(\hat{T}_s)) ds = \sigma^2 \int_0^t (S(0) + \widetilde{W}(\hat{T}_s))^2 ds.$$

Također $W(t)$ možemo prikazati u sljedećem obliku

$$W(t) = \int_0^t a^{-1}(S(0) + \widetilde{W}(\hat{T}_s)) d\widetilde{W}(\hat{T}_s) = \sigma^{-1} \int_0^t (S(0) + \widetilde{W}(\hat{T}_s))^{-1} d\widetilde{W}(\hat{T}_s).$$

Kako je $W(0) = 0$ slijedi

$$dW(t) = \sigma^{-1}(S(0) + \widetilde{W}(\hat{T}_t))^{-1} d\widetilde{W}(\hat{T}_t).$$

Množenjem prethodnog sa $\sigma(S(0) + \widetilde{W}(\hat{T}_t))$ slijedi

$$d\widetilde{W}(\hat{T}_t) = \sigma(S(0) + \widetilde{W}(\hat{T}_t)) dW(t).$$

Primjenom teorema 2.11, uzimajući $f(t, \widetilde{W}(\hat{T}_t)) = \log(S(0) + \widetilde{W}(\hat{T}_t))$ i $\widetilde{W}(0) = 0$, slijedi:

$$\begin{aligned}\log(S(0) + \widetilde{W}(\hat{T}_t)) - \log(S(0)) &= \int_0^t -\frac{1}{2}\sigma^2 (S(0) + \widetilde{W}(\hat{T}_t))^2 \frac{1}{(S(0) + \widetilde{W}(\hat{T}_t))^2} dy + \\ &+ \int_0^t \sigma(S(0) + \widetilde{W}(\hat{T}_t)) \frac{1}{S(0) + \widetilde{W}(\hat{T}_t)} dW(y).\end{aligned}$$

Sređivanjem izraza dobivamo

$$\log\left(\frac{S(0) + \widetilde{W}(\hat{T}_t)}{S(0)}\right) = -\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W(t),$$

odnosno

$$\frac{S(0) + \widetilde{W}(\hat{T}_t)}{S(0)} = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W(t)},$$

iz čega slijedi

$$\begin{aligned}\widetilde{W}(\hat{T}_t) &= S(0) e^{\sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t} - S(0) \\ &= S(0)(e^{\sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t} - 1).\end{aligned}$$

□

Prethodno smo spomenuli vjerojatnost Q neutralnu na rizik i ekvivalentnu objetivnoj vjerojatnosti P. Prema teoremu 2.9 slijedi da je $(W^*(t), 0 \leq t \leq T)$,

$$W^*(t) = W(t) + \frac{\mu - r}{\sigma} t$$

Brownovo gibanje u odnosu na vjerojatnost Q. Slijedi

$$dW^*(t) = dW(t) + \frac{\mu - r}{\sigma} dt,$$

odnosno

$$dW(t) = dW^*(t) - \frac{\mu - r}{\sigma} dt.$$

Zamjenom $dW(t)$ u (2.6) slijedi

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t) \left(dW^*(t) - \frac{\mu - r}{\sigma} dt \right),$$

odnosno

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW^*(t) - \mu S(t)dt + rS(t)dt.$$

Nadalje, vrijedi

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW^*(t).$$

Analogno kao u lemi 2.12 rješenje jednadžbe $dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW^*(t)$ ima sljedeći oblik

$$S(t) = e^{rt}(S(0) + \widetilde{W}^*(\hat{T}_t)), \tag{2.9}$$

a prema lemi 2.13 $\widetilde{W}^*(\hat{T}_t)$ ima sljedeću reprezentaciju

$$\widetilde{W}^*(\hat{T}_t) = S(0)(e^{\sigma W^*(t) - \frac{\sigma^2}{2}t} - 1). \tag{2.10}$$

Izrazi u (2.9) i (2.10) su ključni za dokaz sljedeće propozicije u kojoj je dan izraz za visinu premije europske call opcije.

Propozicija 2.14. *U okviru Black-Scholes-Mertonova modela visina premije europske call opcije dana je izrazom*

$$C(0) = S(0)\Phi(y_+) - e^{-rT}K\Phi(y_-)$$

gdje su

$$\Phi(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

i

$$y_+ := \frac{\ln(\frac{S(0)}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \quad y_- := \frac{\ln(\frac{S(0)}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Dokaz. S (2.5) smo definirali premiju europske call opcije, to jest

$$C(0) = e^{-rT}E_Q[\max(S(T) - K, 0)].$$

Gledajući (2.9), zamijenimo $S(T)$ i dobivamo

$$C(0) = e^{-rT}E_Q[\max(e^{rT}(S(0) + \widetilde{W}^*(\hat{T}_T)) - K, 0)].$$

Po (2.10) slijedi

$$C(0) = e^{-rT}E_Q[\max(e^{rT}(S(0) + S(0)(e^{\sigma W^*(T) - \frac{\sigma^2}{2}T} - 1)) - K, 0)],$$

odnosno

$$\begin{aligned} C(0) &= e^{-rT} E_Q[\max(e^{rT} S(0) e^{\sigma W^*(T) - \frac{\sigma^2}{2}T} - K, 0)] \\ &= e^{-rT} E_Q[\max(S(0) e^{\sigma W^*(T) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T} - K, 0)]. \end{aligned}$$

Kako vrijedi $W^*(t) \sim \mathcal{N}(0, t)$ slijedi:

$$C(0) = e^{-rT} \int_{-\infty}^{+\infty} max(S(0) e^{\sigma v + (r - \frac{\sigma^2}{2})T} - K, 0) \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{1}{2}\frac{v^2}{T}} dv = \left| \begin{array}{r} \dfrac{v}{\sqrt{T}} = u \\ dv = \sqrt{T} du \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned} &= e^{-rT} \int_{-\infty}^{+\infty} max(S(0) e^{\sigma u\sqrt{T} + (r - \frac{\sigma^2}{2})T} - K, 0) \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{1}{2}u^2} \sqrt{T} du \\ &= e^{-rT} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} max(S(0) e^{\sigma u\sqrt{T} + (r - \frac{\sigma^2}{2})T} - K, 0) e^{-\frac{1}{2}u^2} du. \end{aligned}$$

Integral je pozitivan kada je

$$S(0) e^{\sigma u\sqrt{T} + (r - \frac{\sigma^2}{2})T} - K > 0,$$

to jest za one $u \in \mathbb{R}$ za koje je

$$S(0) e^{\sigma u\sqrt{T} + (r - \frac{\sigma^2}{2})T} > K.$$

Znamo da je $S(0) > 0$, te dijeljenjem prethodnog s $S(0)$ slijedi

$$e^{\sigma u\sqrt{T} + (r - \frac{\sigma^2}{2})T} > \frac{K}{S(0)},$$

odakle slijedi

$$\sigma u\sqrt{T} + (r - \frac{\sigma^2}{2})T > \ln\left(\frac{K}{S(0)}\right).$$

Konačno dobivamo

$$u > \frac{\ln\left(\frac{K}{S(0)}\right) - (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Vrijedi, uzimajući $y = \frac{\ln\left(\frac{K}{S(0)}\right) - (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$:

$$\begin{aligned} C(0) &= e^{-rT} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y}^{+\infty} (S(0) e^{\sigma u\sqrt{T} + (r - \frac{\sigma^2}{2})T} - K) e^{-\frac{1}{2}u^2} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y}^{+\infty} S(0) e^{\sigma u\sqrt{T} - \frac{\sigma^2}{2}T} e^{-\frac{1}{2}u^2} du - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y}^{+\infty} K e^{-rT} e^{-\frac{1}{2}u^2} du. \end{aligned}$$

Označimo

$$\Phi(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \tag{2.11}$$

Tada vrijedi

$$C(0) = \frac{S(0)}{\sqrt{2\pi}} \int_{y}^{+\infty} e^{\sigma u\sqrt{T} - \frac{\sigma^2}{2}T} e^{-\frac{1}{2}u^2} du - K e^{-rT}(1 - \Phi(y)). \tag{2.12}$$

Promatrajući integral vidimo da vrijedi

$$\int_y^{+\infty} e^{\sigma x\sqrt{T}-\frac{\sigma^2}{2}T-\frac{1}{2}x^2}dx = \int_y^{+\infty} e^{\frac{2\sigma x\sqrt{T}-\sigma^2 T-x^2}{2}}dx = \int_y^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+\sigma^2 T-2\sigma x\sqrt{T})}dx =$$

$$= \int_y^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-\sigma\sqrt{T})^2}dx = \left| \begin{aligned} x-\sigma\sqrt{T} &= u \\ dx &= du \end{aligned} \right| = \int_{y-\sigma\sqrt{T}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2}du.$$

Tada u (2.12) vrijedi

$$\begin{aligned} C(0) &= \frac{S(0)}{\sqrt{2\pi}}\int_{y-\sigma\sqrt{T}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2}du - Ke^{-rT}(1-\Phi(y)) \\ &\overset{(2.11)}{=} S(0)(1-\Phi(y-\sigma\sqrt{T})) - Ke^{-rT}(1-\Phi(y)). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Uočimo

$$y_- := \frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + (r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} = -\left(\frac{\ln\left(\frac{K}{S(0)}\right) - (r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) = -y$$

i

$$y_+ := \frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + (r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} = -\left(\frac{\ln\left(\frac{K}{S(0)}\right) - (r+\frac{\sigma^2}{2}\pm\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) =$$

$$= -\left(\frac{\ln\left(\frac{K}{S(0)}\right) - (r-\frac{\sigma^2}{2})T - \sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right) = -y + \sigma\sqrt{T}$$

Primjenom prethodnog slijedi

$$1-\Phi(y) = \Phi(-y) = \Phi(y_-) \tag{2.14}$$

i

$$1-\Phi(y-\sigma\sqrt{T}) = \Phi(-y+\sigma\sqrt{T}) = \Phi(y_+). \tag{2.15}$$

U (2.13), primjenom (2.14) i (2.15), slijedi

$$C(0) = S(0)\Phi(y_+) - Ke^{-rT}\Phi(y_-).$$

□

Za izvođenje Black-Scholes-Mertonove formule za europsku put opciju koristimo call-put paritet. Vrijedi:

$$\begin{aligned} C(T)-P(T) &= \max\left(S(T)-K,0\right) - \max(K-S(T),0) \\ &= \begin{cases} S(T)-K, & S(T)>K \\ 0, & S(T)\le K \end{cases} - \begin{cases} K-S(T), & S(T)<K \\ 0, & S(T)\ge K \end{cases} \\ &= \begin{cases} S(T)-K, & S(T)>K \\ 0, & S(T)\le K \end{cases} - \begin{cases} 0, & S(T)>K \\ K-S(T), & S(T)\le K \end{cases} \\ &= S(T)-K. \end{aligned}$$

Korištenjem prethodnog slijedi

$$\begin{aligned}
C(0) - P(0) &= e^{-rT} E_Q[\max(S(T) - K, 0) - \max(K - S(T), 0)] \\
&= e^{-rT} E_Q[S(T) - K] \\
&= S(0) - e^{-rT} K.
\end{aligned}$$

Odnosno,

$$P(0) = C(0) - S(0) + e^{-rT} K.$$

2.3 Frakcionalne difuzije

2.3.1 Definicija frakcionalne difuzije

U ovom poglavlju definirat ćemo frakcionalne difuzije pomoću skaliranja vremena u odgovarajućim Pearsonvim difuzijama. Najprije ćemo definirati Pearsonovu difuziju i Lévyjev proces koji će nam trebati u definiranju frakcionalne difuzije.

Definicija 2.15. Pearsonova distribucija je svaka neprekidna distribucija s gustoćom koja zadovoljava Pearsonovu diferencijalnu jednadžbu oblika:

$$\frac{p'(x)}{p(x)} = \frac{(a_1 - 2b_2)x + (a_0 - b_1)}{b_2 x^2 + b_1 x + b_0}. \tag{2.16}$$

Definicija 2.16. Pearsonova difuzija je jako rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \; t \geq 0, \tag{2.17}$$

gdje su

$$\mu(x) = a_0 + a_1 x, \; \sigma(x) = \sqrt{2b(x)} = \sqrt{2(b_2 x^2 + b_1 x + b_0)}$$

i a_0, a_1, b_0, b_1, b_2 su isti koeficijenti kao u (2.16) za koje je $\sigma(x)$ dobro definirana.

Lévyjev proces je proces s nezavisnim i stacionarnim prirastima čiji su putevi zdesna neprekidni s lijevim limesima, te pripada klasi stohastičkih procesa sa skokovima. Lévyjevi procesi su jednostavni za proučavanje i imaju široku primjenu u modeliranju raznih fenomena. Mogu služiti kao baza za stvaranje realnijih modela, koji se mogu primjenjvati npr. na financijskom tržištu. U nastavku navodimo definiciju Lévyjevog procesa.

Definicija 2.17. Proces $X = (X_t, t \geq 0)$ definiran na vjerojatnosnom prostoru $\big(\Omega, \mathscr{F}, P\big)$ naziva se Lévyjevim procesom ako ima sljedeća svojstva:

(i) putevi $t \mapsto X_t$ procesa X su P-g.s. zdesna neprekidni s lijevim limesima, to jest vrijedi:

  i) $\lim_{t \to t_0^+} X_t(\omega) = X_{t_0}(\omega)$, $\forall t_0 \in [0, +\infty)$ (neprekidnost zdesna),

  ii) $\forall t_0 \in [0, +\infty) \, \exists L^- \in \mathbb{R}$ tako da je $\lim_{t \to t_0^-} X_t(\omega) = L^-$ (funkcija s lijevim limesima),

(ii) $P(X_0 = 0) = 1$,

(iii) za $0 \leq s \leq t$, $X_t - X_s$ je jednako distribuirano kao X_{t-s},

(iv) za $0 \leq s \leq t$, $X_t - X_s$ je nezavisna od familije $(X_u, u \leq s)$.

Za skaliranje vremena često se koriste Lévyjevi procesi s neopadajućim trajektorijama, koji se zovu subordinatori.
Za uvođenje indeksa α definiramo Caputo frakcionalnu derivaciju reda $0 < \alpha < 1$:

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{d}{dx} f(x-y) y^{-\alpha} dy.$$

Neka je $(X(t), t \geq 0)$ Pearsonova difuzija koja rješava (2.17) i neka je $(D_t, t \geq 0)$ standardni stabilni subordinator s indeksom $0 < \alpha < 1$, koji je nezavisan od procesa $(X(t), t \geq 0)$. D_t je homogen Lévyjev proces te je njegov inverzni proces definiran kao

$$E_t = \inf\{x > 0 : D_x > t\}.$$

E_t nije Markovljev i neopadajući je, te ga nazivamo inverzom stabilnog subordinatora.
Imamo sve potrebno za definiranje frakcionalne Pearsonove difuzije. Neka je $(X_\alpha(t), t \geq 0)$ frakcionalna Pearsonova difuzija definirana tako da u Pearsonovoj difuziji vrijeme modeliramo inverzom stabilnog subordinatora, to jest vrijedi:

$$X_\alpha(t) = X(E_t),\ t \geq 0. \tag{2.18}$$

$X_\alpha(t)$ također nije Markovljev proces. Može se pokazati ako Pearsonova difuzija zadovoljava (2.17) s početnim uvjetom $X(0) = 0$, tada odgovarajuća frakcionalna Pearsonova difuzija (2.18) zadovoljava stohastičku diferencijalnu jednadžbu oblika:

$$dX_\alpha(t) = \mu(X_\alpha(t))dE_t + \sigma(X_\alpha(t))dB_{E_t},$$

s početnim uvjetom $X_\alpha(0) = 0$.

2.3.2 Simulacija frakcionalne difuzije

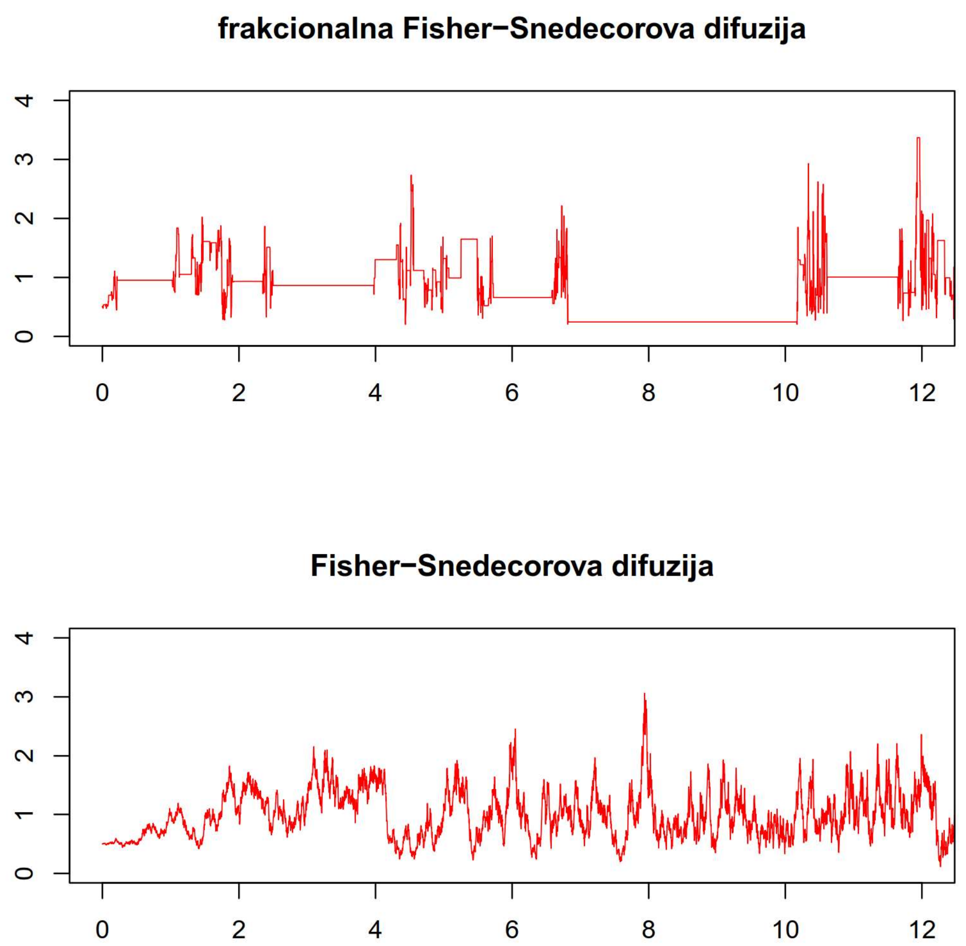
U ovom dijelu rada simulirat ćemo trajektorije frakcionalne recipročne gama i Fisher-Snedecorove difuzije. Navedene difuzije pripadaju frakcionalnim Pearsonovim difuzijama s teškim repovima.
Recipročna gama difuzija zadovoljava sljedeću stohastičku diferencijalnu jednadžbu:

$$dX_t = -\theta\left(X_t - \frac{\gamma}{\beta-1}\right)dt + \sqrt{\frac{2\theta}{\beta-1}X_t^2}dW_t,\ t \geq 0,\ \theta > 0,$$

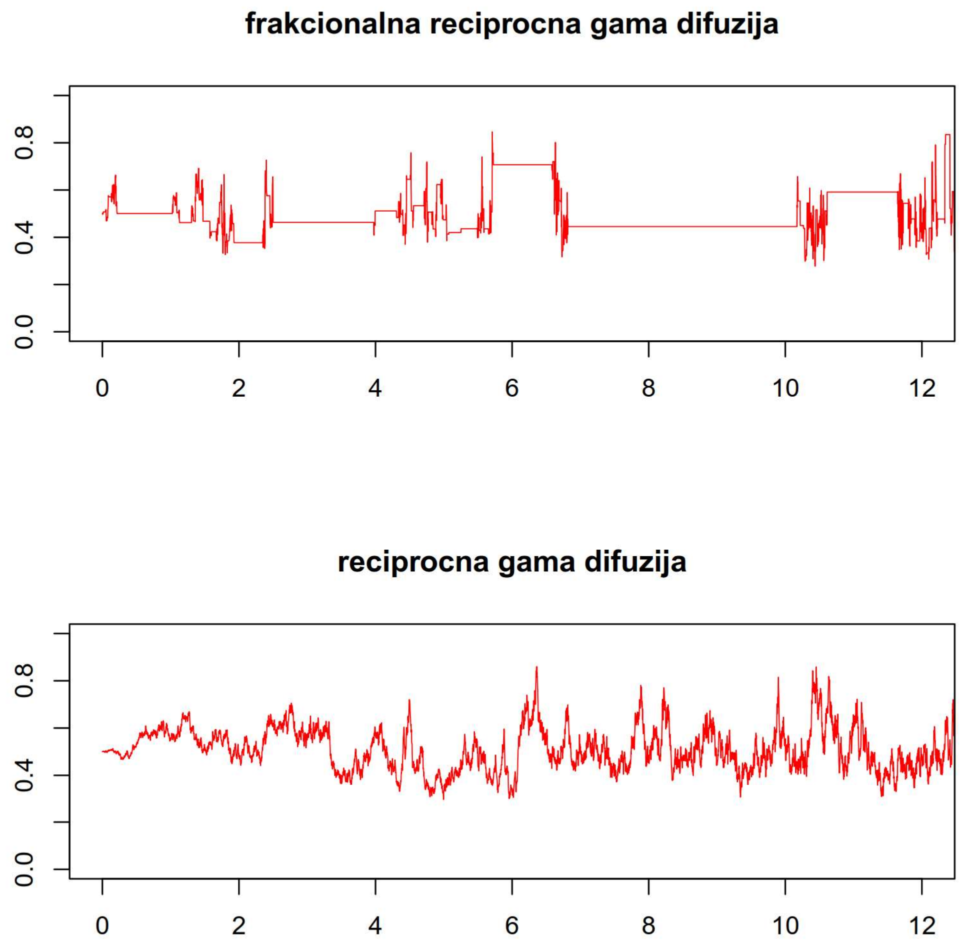
dok Fisher-Snedecorova difuzija zadovoljava stohastičku diferencijalnu jednadžbu sljedećeg oblika:

$$dX_t = -\theta\left(X_t - \frac{\beta}{\beta-2}\right)dt + \sqrt{\frac{4\theta}{\gamma(\beta-2)}X_t(\gamma X_t + \beta)}dW_t,\ t \geq 0,\ \theta > 0.$$

Simulacije su rađene prema algoritmu koji se nalazi u [3]. U [3] se pretpostavlja da su standardna difuzija i inverz stabilnog subordinatora nezavisni, što mi imamo u našem slučaju. U algoritmu se odvojeno simulira trajektorija inverza stabilnog subordinatora i trajektorija standardne difuzije, te se na kraju trajektorija frakcionalne difuzije dobiva linearnom interpolacijom.
Na slici 3. prikazane su simulirane trajektorije frakcionalne i standardne Fisher-Snedecorove difuzije, dok su na slici 4. prikazane simulirane trajektorije frakcionalne i standardne recipročne gama difuzije. Za obje difuzije uzeti su sljedeći parametri $\theta = 0.05$, $\gamma = 12$, $\beta = 25$ i $\alpha = 0.7$, s početnim stanjem $X_0 = 0.5$. Trajektorije su simulirane na temelju 10000 točaka. Uočavamo kako se trajektorije frakcionalne difuzije i standardne difuzije razlikuju, trajektorije frakcionalne difuzije imaju periode mirovanja zbog inverza stabilnog subordinatora E_t.



Slika 3. Trajektorije frakcionalne i standardne Fisher-Snedecorove difuzije



Slika 4. Trajektorije frakcionalne i standardne recipročne gama difuzije

Literatura

[1] A. Nikolić, *Lévyjevi procesi*, Sveučilište J.J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2014.

[2] A. Swishchuk, *Change of time methods in quantitative finance*, Springer International Publishing, 2016.

[3] M. Magdziarz, K. Weron, *Fractional Fokker-Planck dynamics: Stohastic representation and computer simulation*, Physical Review E, 75(1), 016708, 2007.

[4] N. Ikeda, S. Watanabe, *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, North-Holland/Kodansha Ltd., Tokyo, 1981.

[5] N.N. Leonenko, I. Papić, A. Sikorskii, N. Šuvak, *Theoretical and simulation results on heavy-tailed fractional Pearson diffusions*, 20th European Young Statisticians Meeting, Uppsala, Sweden, 2017, 95-103

[6] O.E. Barndorff-Nielsen, A.N. Shiryaev, *Change of time and change of measure*, (Vol. 21), World Scientific Publishing Company, 2015.

[7] T. Mikosch, *Elementary Stochastic Calculus With Finance in View*, World Scientific, 1998.

[8] Web materijali za kolegij Financijski praktikum na Matematičkom odsjeku PMF-a, Sveučilište u Zagrebu, `https://web.math.pmf.unizg.hr/~vondra/fm-p6.pdf`

Sažetak

U ovom diplomskom radu bavimo se skaliranjem vremena u slučajnim procesima. Definiramo proces skaliranja vremena, te promatramo skaliranje vremena u difuzijama i Black-Scholes-Mertonovom modelu. Pomoću rezultata navedenih u poglavlju skaliranje vremena u difuzijama dokazujemo rezultate potrebne za izvod Black-Scholes-Mertonove formule za određivanje nearbitražne cijene europske call opcije. Nadalje, definiramo frakcionalnu difuzije pomoću Pearsonove difuzije u kojoj vrijeme modeliramo inverzom stabilnog subordinatora. Na kraju rada simuliramo trajektorije frakcionalne recipročne gama i Fisher-Snedecorove difuzije.

Ključne riječi: skaliranje vremena, Black-Scholes-Mertonova formula, opcija, frakcionalna difuzija, stabilni subordinator

Time-changed stochastic processes

Abstract

In this thesis, we deal with time-changed stohastic processes. We define the change of time process and observe time change in diffusions and the Black-Scholes-Merton model. Using the results given in the chapter time change in diffusions, we prove the results necessary for the derivation of the Black-Scholes-Merton formula for determining the non-arbitrage price of the European call option. Furthermore, we define fractional diffusion using Pearson diffusion in which time is modeled by the inverse of a stable subordinator. At the end of the thesis, we simulate the trajectories of fractional reciprocal gamma and Fisher-Snedecor diffusion.

Keywords: time-change, Black-Scholes-Merton formula, option, fractional diffusion, stable subordinator

Životopis

Rođena sam 27. ožujka 1999. godine u Osijeku. Pohađala sam osnovnu školu "August Harambašić" u Donjem Miholjcu. Upisujem opću gimnaziju u Donjem Miholjcu 2014. godine. Tijekom srednjoškolskog obrazovanja sudjelovala sam na županijskim natjecanjima iz matematike. 2018. godine završavam srednju školu te iste godine upisujem prijediplomski studij Matematika na Odjelu za matematiku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku. Završavam ga 2021. godine s temom završnog rada "Neke osobite točke trokuta" pod mentorstvom prof. dr. sc. Zdenke Kolar Begović. 2021. godine upisujem diplomski studij matematike, smjer Financijska matematika i statistika na Odjelu za matematiku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku.