Stratonovicheve stohastičke diferencijalne jednadžbe

Majdenić, Jelena

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni diplomski studij matematike
Smjer: Financijka matematika i statistika

Jelena Majdenić

Stratonovicheve stohastičke diferencijalne jednadžbe

Diplomski rad

Osijek, 2023.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni diplomski studij matematike
Smjer: Financijska matematika i statistika

Jelena Majdenić

Stratonovicheve stohastičke diferencijalne jednadžbe

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Nenad Šuvak

Osijek, 2023.

Sadržaj

1 Uvod **1**

2 Brownovo gibanje **2**

3 Itôv stohastički integral **5**

4 Stratonovichev stohastički integral **6**

5 Stratonovicheva stohastička diferencijalna jednadžba **12**

6 Stratonovich-Taylorov razvoj **16**

7 Milsteinova aproksimacijska shema **20**

Literatura **23**

Sažetak **24**

Abstract **25**

Životopis **26**

1 Uvod

Obična diferencijalna jednadžba

$$\frac{dx(s)}{ds} = a(s, x(s)),\ x(0) = x_0,$$

opisuje položaj čestice $x(t)$ koja se giba brzinom $a(s, x)$ ovisno o vremenu i trenutnom položaju. Slučajne učinke, uzrokovane pogreškama u mjerenju ili neopservabilnim utjecajima, može se uzeti u obzir dodavanjem slučajnog poremećaja koji može ovisiti o trenutnom položaju. Neka je $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ vjerojatnosni prostor, $B = (B_t,\ t \geq 0)$ Brownovo gibanje na tom vjerojatnosnom prostoru i $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t, t \geq 0)$, gdje je $\mathscr{F}_t = \sigma(B_s, 0 \leq s \leq t)$ prirodna filtracija Brownovog gibanja. Jedan od načina za uvođenje slučajnosti u diferencijalnu jednadžbu je slučajnost početnog uvjeta i uvođenje slučajnog šuma, odnosno dobivamo stohastičku diferencijalnu jednadžbu

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dB_t, \quad X_0(\omega) = Y(\omega), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{1}$$

gdje su $a(t, x)$ i $b(t, x)$ deterministčke funkcije s pretpostavkom da su to neprekidne funkcije prostorne i vremenske varijable. Funkciju $a(t, x)$ nazivamo drift parametar, a $b(t, x)$ parametar difuzije. Rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe (1) tada postaje slučajni proces $(X_t, t \in [0, T])$ čija slučajnost proizlazi iz početnog uvjeta i šuma generiranog Brownovim gibanjem.

Zbog g.s. nediferencijabilnosti trajektorija Brownovog gibanja stohastičku diferencijalnu jednadžbu zapravo treba shvatiti kao stohastičku integralnu jednadžbu

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s)dB_s, \quad 0 \leq t \leq T,$$

gdje je prvi integral na desnoj strani Riemannov integral, a drugi Itôv stohastički integral. Brownovo gibanje B naziva se pogonski proces Itôve stohastičke diferencijalne jednadžbe.

2 Brownovo gibanje

Budući da je Brownovo gibanje pogonski proces stohastičke diferencijalne jednadžbe, u ovom ćemo poglavlju definirati Brownovo gibanje, navesti nekoliko bitnih svojstava tog slučajnog procesa i razloge uvođenja stohastičkih integrala.

Definicija 1. Brownovo gibanje $B = (B_t,\, t \geq 0)$ je slučajni proces s indeksnim skupom $[0, \infty)$ i vrijednostima u $\mathbb{R}$ koji zadovoljava sljedeće uvjete:

- $B_0 = 0$ g.s.;
- Prirasti $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \ldots, B_{t_1} - B_{t_0}$ su nezavisni za sve $n \geq 0, \quad 0 = t_0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \infty$;
- $B_t - B_s \stackrel{d}{=} B_{t+h} - B_{s+h}$ za sve $0 \leq s < t$ i za sve h za koje vrijedi $s + h \geq 0$;
- $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$, gdje je $\mathcal{N}(0, t-s)$ normalna distribucija;
- $t \mapsto B_t(\omega)$ je neprekidna g.s.

Po definiciji, Brownovo gibanje je slučajni proces sa startom u $B_0 = 0$, nezavisnim i stacionarnim prirastima i g.s. neprekidnim trajektorijama. Za proces $(B_t + a, t \geq 0)$, $a \in \mathbb{R}$ kažemo da je Brownovo gibanje sa startom u a. U nastavku ćemo podrazumjevati da je $B(t)$ isto što i B_t, te ćemo za prirast Brownovog gibanja koristiti oznaku $\Delta_i B = B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$. Neka je $(B(t), t \geq 0)$ Brownovo gibanje i $a > 0$ fiksno. Tada je $(W(t), t \geq 0), W(t) := B(t+a) - B(a)$ također Brownovo gibanje. Vrijedi $W(0) = 0$, a g.s. neprekidnost trajektorija naslijeđena je od standardnog Brownovog gibanja. U nastavku ćemo izvesti ostale uvjete iz Definicije 1. Za sve $s \leq t$ imamo

$$W(t) - W(s) = B(t+a) - B(a) - B(s+a) + B(a) = B(t+a) - B(s+a) \sim \mathcal{N}(0, t-s),$$

$$\begin{aligned} W(t+h) - W(s+h) &= B(t+h+a) - B(a) - B(s+h+a) + B(a) \\ &= B(t+h+a) - B(s+h+a) \sim \mathcal{N}(0, t-s), \end{aligned}$$

gdje je $h \geq -s$. Ako je $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_n$, onda je

$$W(t_j) - W(t_{j-1}) = B(t_j + a) - B(t_{j-1} + a) \text{ za sve } j = 1, \ldots, n,$$

odnosno nezavisnost prirasta procesa $(W(t), t \geq 0)$ naslijeđena je od nezavisnosti prirasta Brownovog gibanja.

Lema 1. *Neka je $(B(t), t \geq 0)$ Brownovo gibanje i $W(t) := B(t+a) - B(a)$. Tada su procesi $(B(t), 0 \leq t \leq a)$ i $(W(t), t \geq 0)$ nezavisni, to jest σ-algebre generirane ovim procesima su nezavisne:*

$$\mathscr{F}_a^B := \sigma(B(t) : 0 \leq t \leq a) \quad \textit{je nezavisna od} \quad \mathscr{F}_\infty^W := \sigma(W(t) : 0 \leq t < \infty).$$

Posebno vrijedi $B(t) - B(s)$ nezavisno od $\mathscr{F}_s^B$ za sve $0 \leq s < t$.

Dokaz se može pronaći u [2]. Tvrdnja Leme 1. govori da je posljedica nezavisnih prirasta Brownovog gibanja to što Brownovo gibanje nema "memoriju", odnosno svojstvo pamćenja.

Teorem 1. *Brownovo gibanje $B = (B_t,\, t \geq 0)$ je $\frac{1}{2}$-sebi-sličan proces odnosno za svaki $c > 0$ i $t > 0$ vrijedi $B_{ct} \sim c^{\frac{1}{2}} B_t$. Posebno, $(c^{-\frac{1}{2}} B_{ct}, t \geq 0)$ je također Brownovo gibanje.*

Tvrdnja Teorema 1. se lako vidi promatrajući normalnu distribuciju. Znamo da vrijedi $\mathcal{N}(0, ct) = c^{\frac{1}{2}}\mathcal{N}(0, t)$ odnosno

$$B_{ct} \stackrel{d}{=} B_{ct} - B_0 \sim \mathcal{N}(0, ct) = c^{\frac{1}{2}}\mathcal{N}(0, t) \sim c^{\frac{1}{2}}(B_t - B_0) \stackrel{d}{=} c^{\frac{1}{2}}B_t.$$

U nastavku se bavimo kvadratnom varijacijom Brownovog gibanja i njezinim posljedicama. Prvo definiramo pojam jake p-varijacije.

Definicija 2. Neka je $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ funkcija i $\tau = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}, 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$, konačna subdivizija intervala $[0, t]$. Sa $|\tau| := \max\limits_{1 \leq j \leq n}(t_j - t_{j-1})$ označavamo duljinu najvećeg podintervala subdivizije. Za $p > 0$ p-varijacijska suma za τ je

$$S_p^\tau(f; n) := \sum_\tau |f(t_j) - f(t_{j-1})|^p = \sum_{j=1}^n |f(t_j) - f(t_{j-1})|^p.$$

Supremum po svim konačnim subdivizijama je jaka p-varijacija

$$VAR_p(f; t) := \sup\{S_p^\tau(f; n) : \tau \text{ je konačna subdivizija od } [0, t]\}.$$

Često se za zadani niz konačnih subdivizija $(\tau_n)_{n\geq 1}$ od $[0, t]$ za koji vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} |\tau_n| = 0$ definira p-varijacija kao

$$var_p(f; t) = \lim_{|\tau_n|\to 0} S_p^{\tau_n}(f; n).$$

Jaka varijacija $VAR_p(f; t)$ je uvijek definirana, a ako $var_p(f; t)$ postoji onda vrijedi $VAR_p(f; t) \geq var_p(f; t)$.

Teorem 2. *Neka je $B = (B_t,\, t \geq 0)$ Brownovo gibanje i $(\tau_n)_{n\geq 1}$ proizvoljan niz konačnih subdivizija od $[0, t]$ koji zadovoljava $\lim\limits_{n\to\infty} |\tau_n| = 0$. Tada vrijedi konvergencija u srednje-kvadratnom smislu, odnosno*

$$var_2(B; t) = t.$$

S $var_2(B; t)$ označavamo kvadratnu varijaciju Brownovog gibanja.

Dokaz. Neka je $\tau = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}, 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n \leq t$, bilo koja konačna subdivizija od $[0, t]$. Brownovo gibanje ima nezavisne i stacionarne priraste pa vrijedi

$$\mathrm{E}[\Delta_i B \Delta_j B] = \begin{cases} 0 & , i \neq j \\ \mathrm{Var}(\Delta_i B) = t_i - t_{i-1} = \Delta_i & , i = j. \end{cases}$$

Tada je

$$\mathrm{E}\left[\sum_{j=1}^n (B(t_j) - B(t_{j-1}))^2\right] = \sum_{j=1}^n \mathrm{E}[(B(t_j) - B(t_{j-1}))^2] = \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1}) = t.$$

Tada koristeći nezavisnost prirasta Brownovog gibanja i formulu $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2$ vrijedi

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[\left(\sum_{j=1}^n (B(t_j) - B(t_{j-1}))^2 - t\right)^2\right] &= \mathrm{Var}\left(\sum_{j=1}^n (B(t_j) - B(t_{j-1}))^2\right) \\ &= \sum_{j=1}^n \mathrm{Var}\left((B(t_j) - B(t_{j-1}))^2\right) \\ &= \sum_{j=1}^n [\mathrm{E}[(B(t_j) - B(t_{j-1}))^4] - (t_j - t_{j-1})^2]. \end{aligned}$$

Uočimo da je $B_1 \stackrel{d}{=} B_1 - B_0 \sim \mathcal{N}(0,1)$ i znamo da je $\mathrm{E}[B_1^4] = 3$. Koristeći svojstvo $B_t - B_s \stackrel{d}{=} B_{t-s}$ i $\frac{1}{2}$-sebi-sličnost Brownovog gibanja dobivamo

$$\mathrm{E}[(B(t_j) - B(t_{j-1}))^4] = \mathrm{E}[B^4_{t_j - t_{j-1}}] = \mathrm{E}[(\sqrt{t_j - t_{j-1}} B_1)^4] = 3(t_j - t_{j-1})^2.$$

Znamo da $|\tau| \to 0$ pa slijedi

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\Bigg[\bigg(\sum_{j=1}^{n}(B(t_j) - B(t_{j-1}))^2 - t\bigg)^2\Bigg] &= \sum_{j=1}^{n} 2(t_j - t_{j-1})^2 \\ &\leq 2|\tau| \sum_{j=1}^{n}(t_j - t_{j-1}) = 2|\tau| t \to 0.\end{aligned}$$

□

Posljedice Teorema 2. navedene su u nastavku, a dokazi se mogu pronaći u [2].

Korolar 1. *Za gotovo sve trajektorije Brownovog gibanja vrijedi:*

$$\sup\left\{\sum_{j=1}^{n} |B(t_j) - B(t_{j-1})|^p : \tau \textit{ je konačna subdivizija od } [0,t]\right\} = \infty \textit{ g.s. za sve } p < 2.$$

Tvrdnja Korolara 1. za $p = 1$ znači da Brownovo gibanje nema ograničenu varijaciju. Funkcija $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ zove se (lokalno) Hölder neprekidna funkcija reda $\alpha > 0$, ako za svaki segment $[a, b] \subset [0, \infty)$ postoji konstanta $c = c(f, a, [a, b])$ tako da vrijedi $|f(t) - f(s)| \leq c|t - s|^{\alpha}$ za sve $s, t \in [a, b]$. Za $\alpha = 1$ kažemo da je funkcija f Lipschitz neprekidna.

Korolar 2. *Gotovo sve trajektorije Brownovog gibanja nisu (lokalno) Hölder neprekidne reda* $\alpha > \frac{1}{2}$.

Tvrdnja Korolara 2. povlači da trajektorije Brownovog gibanja nisu Lipschitz neprekidne i nisu diferencijabilne.

Teorem 3. *Neka je $B = (B_t,\, t \geq 0)$ Brownovo gibanje. Tada je funkcija $t \mapsto B_t(\omega)$ za gotovo sve $\omega \in \Omega$ nediferencijabilna.*

Glavni razlozi uvođenja stohastičkih integrala su neograničena varijacija i nediferencijabilnost trajektorija Brownovog gibanja. Više o tome može se pronaći u [1], poglavlje 2.1.2.

3 Itôv stohastički integral

U ovom poglavlju navodimo Itôv stohastički integral koji će nam trebati u nastavku. Neka je $B = (B_t, t \in [0,T])$ Brownovo gibanje. Neka je $C = (C_t, t \in [0,T])$ proces adaptiran na prirodnu filtraciju Brownovog gibanja $\mathscr{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$, $t \in [0,T]$. Nadalje, pretpostavimo da vrijedi $\int_0^T \mathrm{E}[C_t^2]dt < \infty$. Itôv stohastički integral slučajnog procesa C je

$$I_t(C) = \int_0^t C_s dB_s, \quad t \in [0,T].$$

Itôvi stohastički integrali čine slučajni proces $(I_t(C),\, t \in [0,T])$. Za danu subdiviziju

$$\tau_n : 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = T$$

i $t \in [t_{k-1}, t_k]$, slučajna varijabla $I_t(C)$ je "bliska" Riemann-Stieltjesovoj sumi

$$\sum_{i=1}^{k-1} C_{t_{i-1}}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + C_{t_{k-1}}(B_t - B_{t_{k-1}}).$$

Ova aproksimacija je bolja (u srednje-kvadratnom smislu) što više profinimo subdiviziju τ_n intervala $[0,T]$. U nastavku ćemo u obliku teorema navesti bitna svojstva koja zadovoljava Itôv stohastički integral, a dokazi se mogu naći u [1].

Teorem 4. *Neka je proces $C = (C_t, t \in [0,T])$ adaptiran na prirodnu filtraciju Brownovog gibanja $(\mathscr{F}_t,\, t \in [0,T])$ za kojeg vrijedi $\int_0^T \mathrm{E}[C_t^2]dt < \infty$. Tada vrijedi:*

- *Slučajni proces $(I_t(C),\, t \in [0,T])$ je martingal u odnosu na prirodnu filtraciju Brownovog gibanja $(\mathscr{F}_t,\, t \in [0,T])$.*
- *Očekivanje Itôvog stohastičkog integrala je nula.*
- *Itôv stohastički integral zadovoljava svojstvo izometrije:*

$$\mathrm{E}\left[\int_0^t C_s dB_s\right]^2 = \int_0^t \mathrm{E}[C_s^2]ds,\; t \in [0,T].$$

Zanima nas stohastički analogon pravila

$$[f(g(s))]' = f'(g(s))g'(s),$$

gdje su f i g diferencijabilne funkcije, odnosno u integralnom zapisu

$$f(g(t)) - f(g(0)) = \int_0^t f'(g(s))g'(s)ds = \int_0^t f'(g(s))dg(s).$$

U Itôvom računu Itôva lema (formula) je analogon pravila za derivaciju kompozicije funkcija.

Teorem 5. *Neka je funkcija f dva puta neprekidno diferencijabilna. Itôva lema za Brownovo gibanje je*

$$f(B_t) - f(B_s) = \int_s^t f'(B_x)dB_x + \frac{1}{2}\int_s^t f''(B_x)dx, \quad s < t.$$

U nastavku ćemo navesti općenitije verzije Itôve leme. Koristit ćemo sljedeće oznake za parcijalne derivacije funkcije f:

$$f_i(t,x) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1,x_2)\Big|_{x_1=t,\, x_2=x}, \quad i=1,2,$$

$$f_{ij}(t,x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} f(x_1,x_2)\Big|_{x_1=t,\, x_2=x}, \quad i,j=1,2.$$

Teorem 6. *Neka je $f(t,x)$ funkcija dvije varijable s neprekidnim derivacijama drugog reda po varijablama t i x. Tada vrijedi:*

$$f(t,B_t) - f(s,B_s) = \int_s^t \left[f_1(x,B_x) + \frac{1}{2} f_{22}(x,B_x) \right] dx + \int_s^t f_2(x,B_x) dB_x, \quad s<t.$$

Definicija 3. Za slučajni proces $X=(X_t, t \geq 0)$ kažemo da je Itôv proces ako vrijedi

$$X_t = X_0 + \int_0^t A_s^{(1)} ds + \int_0^t A_s^{(2)} dB_s,$$

gdje su $(A_t^{(1)}, t\geq 0)$, $(A_t^{(2)}, t \geq 0)$ adaptirani na prirodnu filtraciju Brownovog gibanja i oba integrala su dobro definirana.

Teorem 7. *Neka je X Itôv proces i $f(t,x)$ funkcija dviju varijabli s neprekidnim derivacijama drugog reda. Tada vrijedi:*

$$\begin{aligned} f(t,X_t) - f(s,X_s) = &\int_s^t \left[f_1(y,X_y) + A_y^{(1)} f_2(y,X_y) + \frac{1}{2}\left(A_y^{(2)}\right)^2 f_{22}(y,X_y) \right] dy \\ &+ \int_s^t A_y^{(2)} f_2(y,X_y) dB_y, \quad s<t. \end{aligned}$$

4 Stratonovichev stohastički integral

U prošlom poglavlju naveli smo da se Itôv stohastički integral može aproksimirati Riemann-Stieltjesovim sumama oblika

$$\sum_{i=1}^{k-1} C_{t_{i-1}} \Delta_i B + C_{t_{k-1}}(B_t - B_{t_{k-1}}) \quad \text{za} \quad t_{k-1} \leq t \leq t_k,$$

za subdivizije

$$\tau_n : 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = T$$

za koje vrijedi

$$\max_{i=1,\ldots n} (t_i - t_{i-1}) \to 0, \quad n \to \infty.$$

U Riemann-Stieltjesovim sumama vrijednosti procesa C odabrane su u krajnjim lijevim točkama podintervala $[t_{i-1}, t_i]$. Neka je sada proces C dan s $C_t = f(B_t)$, $t \in [0,T]$, gdje je funkcija f dva puta diferencijabilna na $[0,T]$. Može se pokazati da niz Riemann-Stieltjesovih suma $(\widetilde{S_n})_{n\in\mathbb{N}}$ definiran s

$$\widetilde{S_n} = \sum_{i=1}^{n} f(B_{y_i}) \Delta_i B, \tag{2}$$

gdje je $y_i = \frac{t_{i-1}+t_i}{2}$, $i=1,\ldots n$, konvergira u srednje-kvadratnom smislu ako $\max_{i=1,\ldots,n}(t_i - t_{i-1}) \to 0$.

Definicija 4. Jedinstveni limes u srednje-kvadrtnom smislu $S_T(f(B))$ niza Riemann-Stieltjesovih suma (2) postoji ako vrijedi $\int_0^T \mathrm{E}[f^2(B_t)]\,dt < \infty$. Limes se zove Stratonovichev stohastički integral od $f(B)$ i označava s

$$S_T(f(B)) = \int_0^T f(B_s) \circ dB_s.$$

Stratonovichev stohastički integral

$$S_t(f(B)) = \int_0^t f(B_s) \circ dB_s,\ t \in [0,T]$$

je limes u srednje-kvadratnom smislu odgovarajućeg niza Riemann-Stieltjesovih suma.

Primjer 1. *Neka za subdiviziju* $\tau_n = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}, 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = T$, *segmenta* $[0,T]$ *vrijedi* $\max\limits_{i=1,\ldots n} (t_i - t_{i-1}) \to 0$. *Neka su Riemann-Stieltjesove sume oblika*

$$\widetilde{S_n} = \sum_{i=1}^n B_{y_i} \Delta_i B, \quad B = (B_t, t \in [0,T]),$$

gdje je $y_i = \frac{1}{2}(t_{i-1} + t_i)$, $i = 1, \ldots, n$. *U nastavku ćemo pokazat da niz* $(\widetilde{S_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergira u srednje-kvadratnom smislu prema* $B_T^2/2$. *Znamo da je*

$$\widetilde{S_n} = \sum_{i=1}^n B_{\frac{t_{i-1}+t_i}{2}} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) = \sum_{i=1}^n \left(B_{\frac{t_{i-1}+t_i}{2}} B_{t_i} - B_{\frac{t_{i-1}+t_i}{2}} B_{t_{i-1}} \right). \tag{3}$$

Uočimo da vrijedi

$$\left(B_{t_i} - B_{\frac{t_{i-1}+t_i}{2}} \right)^2 = B_{t_i}^2 - 2B_{t_i} B_{\frac{t_{i-1}+t_i}{2}} + B^2_{\frac{t_{i-1}+t_i}{2}},$$

odnosno

$$B_{\frac{t_{i-1}+t_i}{2}} B_{t_i} = \frac{1}{2} B_{t_i}^2 + \frac{1}{2} B^2_{\frac{t_{i-1}+t_i}{2}} - \frac{1}{2} \left(B_{t_i} - B_{\frac{t_{i-1}+t_i}{2}} \right)^2. \tag{4}$$

Analogno dobivamo i

$$B_{\frac{t_{i-1}+t_i}{2}} B_{t_{i-1}} = \frac{1}{2} B_{t_{i-1}}^2 + \frac{1}{2} B^2_{\frac{t_{i-1}+t_i}{2}} - \frac{1}{2} \left(B_{\frac{t_{i-1}+t_i}{2}} - B_{t_{i-1}} \right)^2. \tag{5}$$

Ako u (3) uvrstimo (4) i (5) dobivamo

$$\begin{aligned}
\widetilde{S_n} &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} B_{t_i}^2 + \frac{1}{2} B^2_{\frac{t_{i-1}+t_i}{2}} - \frac{1}{2} \left(B_{t_i} - B_{\frac{t_{i-1}+t_i}{2}} \right)^2 - \frac{1}{2} B_{t_{i-1}}^2 - \frac{1}{2} B^2_{\frac{t_{i-1}+t_i}{2}} + \frac{1}{2} \left(B_{\frac{t_{i-1}+t_i}{2}} - B_{t_{i-1}} \right)^2 \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} B_{t_i}^2 - \frac{1}{2} B_{t_{i-1}}^2 - \frac{1}{2} \left(B_{t_i} - B_{\frac{t_{i-1}+t_i}{2}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(B_{\frac{t_{i-1}+t_i}{2}} - B_{t_{i-1}} \right)^2 \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (B_{t_i}^2 - B_{t_{i-1}}^2) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[\left(B_{\frac{t_{i-1}+t_i}{2}} - B_{t_{i-1}} \right)^2 - \left(B_{t_i} - B_{\frac{t_{i-1}+t_i}{2}} \right)^2 \right].
\end{aligned}$$

Raspišemo prvu sumu, iskoristimo $B_0 = 0$ *i dobivamo*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (B_{t_i}^2 - B_{t_{i-1}}^2) &= \frac{1}{2} \left[B_{t_1}^2 - B_0^2 + B_{t_2}^2 - B_{t_1}^2 + B_{t_3}^2 - B_{t_2}^2 + \cdots + B_{t_{n-1}}^2 - B_{t_{n-2}}^2 + B_{t_n}^2 - B_{t_{n-1}}^2 \right] \\
&= \frac{1}{2} B_{t_n}^2 = \frac{1}{2} B_T^2.
\end{aligned}$$

Označimo

$$Q_n(T) := \sum_{i=1}^{n} \left(B_{\frac{t_{i-1}+t_i}{2}} - B_{t_{i-1}}\right)^2 \quad i \quad W_n(T) := \sum_{i=1}^{n} \left(B_{t_i} - B_{\frac{t_{i-1}+t_i}{2}}\right)^2.$$

Za Brownovo gibanje vrijedi

$$\mathrm{E}[\Delta_i B \Delta_j B] = \begin{cases} 0 & , i \neq j \\ \mathrm{Var}(\Delta_i B) = t_i - t_{i-1} = \Delta_i & , i = j. \end{cases}$$

Ako to iskoristimo dobivamo

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[Q_n(T)] &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\left[\left(B_{\frac{t_{i-1}+t_i}{2}} - B_{t_{i-1}}\right)^2\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}\left(B_{\frac{t_{i-1}+t_i}{2}} - B_{t_{i-1}}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{t_{i-1}+t_i}{2} - t_{i-1}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{t_i}{2} - \frac{t_{i-1}}{2}\right) = \frac{t_1}{2} - \frac{t_0}{2} + \frac{t_2}{2} - \frac{t_1}{2} + \frac{t_3}{2} - \frac{t_2}{2} + \cdots + \frac{t_{n-1}}{2} - \frac{t_{n-2}}{2} + \frac{t_n}{2} - \frac{t_{n-1}}{2} \\ &= \frac{t_n}{2} = \frac{T}{2}. \end{aligned}$$

Slijedi:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[W_n(T)] &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\left[\left(B_{t_i} - B_{\frac{t_{i-1}+t_i}{2}}\right)^2\right] = \sum_{i=1}^{n} \left(t_i - \frac{t_{i-1}+t_i}{2}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{t_i}{2} - \frac{t_{i-1}}{2}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\Delta_i = \frac{T}{2}. \end{aligned}$$

Nadalje opet zbog nezavisnosti prirasta Brownovog gibanja vrijedi

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Q_n(T)) &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}\left(\left(B_{\frac{t_{i-1}+t_i}{2}} - B_{t_{i-1}}\right)^2\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[\mathrm{E}\left[\left(B_{\frac{t_{i-1}+t_i}{2}} - B_{t_{i-1}}\right)^4\right] - \left(\frac{t_{i-1}+t_i}{2} - t_{i-1}\right)^2\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[\mathrm{E}\left[\left(B_{\frac{t_{i-1}+t_i}{2}} - B_{t_{i-1}}\right)^4\right] - \frac{1}{4}\Delta_i^2\right]. \end{aligned}$$

Znamo da vrijedi $B_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$ *i* $\mathrm{E}B_1^4 = 3$. *Iskoritimo li još* $B_{\frac{t_{i-1}+t_i}{2}} - B_{t_{i-1}} \overset{d}{=} B_{\frac{t_{i-1}+t_i}{2} - t_{i-1}}$ *i* $\frac{1}{2}$*-sebi-sličnost Brownovog gibanja dobivamo*

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[\left(B_{\frac{t_{i-1}+t_i}{2}} - B_{t_{i-1}}\right)^4\right] &= \mathrm{E}\left[B^4_{\frac{t_i}{2} - \frac{t_{i-1}}{2}}\right] = \mathrm{E}\left[\left(\sqrt{\frac{1}{2}(t_i - t_{i-1})}B_1\right)^4\right] \\ &= \frac{3}{4}(t_i - t_{i-1})^2 = \frac{3}{4}\Delta_i^2. \end{aligned}$$

Odnosno, vrijedi

$$\mathrm{Var}(Q_n(T)) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{3}{4}\Delta_i^2 - \frac{1}{4}\Delta_i^2\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2.$$

Zbog $\max_{i=1,\dots n} \Delta_i \to 0$ *slijedi*

$$\operatorname{Var}(Q_n(T)) \leq \frac{1}{2} \max_{i=1,\dots n} \Delta_i \sum_{i=1}^{n} \Delta_i = \frac{T}{2} \max_{i=1,\dots n} \Delta_i \to 0.$$

Kako je

$$\operatorname{Var}(Q_n(T)) = \mathrm{E}\left[\left(Q_n(T) - \frac{T}{2}\right)^2\right]$$

pokazano je da $Q_n(T)$ *konvergira u srednje-kvadratnom smislu prema* $T/2$. *Analogno se pokaže da* $W_n(T)$ *također konvergira u srednje-kvadratnom smislu prema* $T/2$. *Zaključujemo da*

$$\widetilde{S_n} = \frac{1}{2} B_T^2 + \frac{1}{2}[Q_n(T) - W_n(T)]$$

konvergira u srednje-kvadratnom smislu prema

$$\frac{1}{2}\left(B_T^2 + \frac{T}{2} - \frac{T}{2}\right),$$

odnosno prema $\frac{1}{2}B_T^2$. *To je vrijednost odgovarajućeg Stratonovichevog stohastičkog integrala, odnosno vrijedi*

$$S_T(B) = \int_0^T B_s \circ dB_s = \frac{1}{2} B_T^2.$$

Riemann-Stieltjesove sume $\sum_{i=1}^{k} B_{y_i} \Delta_i B$, $k = 1, \dots, n$ *nisu konstruirane kao martingal i slučajni proces* $(B_t^2/2, t \in [0,T])$ *također nije martingal u odnosu na prirodnu filtraciju Brownovog gibanja. Neka je* $\mathscr{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$ *prirodna filtracija Brownovog gibanja. Tada vrijedi*

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[B_t^2/2 | \mathscr{F}_s] &= \frac{1}{2}\mathrm{E}[(B_t - B_s + B_s)^2 | \mathscr{F}_s] \\
&= \frac{1}{2}[\mathrm{E}[(B_t - B_s)^2 | \mathscr{F}_s] + 2\mathrm{E}[(B_t - B_s) B_s | \mathscr{F}_s] + \mathrm{E}[B_s^2 | \mathscr{F}_s]] \\
&= \frac{1}{2}[\mathrm{E}[(B_t - B_s)^2] + 2B_s \mathrm{E}[B_t - B_s] + B_s^2] \\
&= \frac{1}{2}[(t-s) + B_s^2] = \frac{1}{2}(t-s) + \frac{1}{2}B_s^2.
\end{aligned}$$

U raspisu je korišteno $\mathrm{E}[(B_t - B_s)] = 0$ *i* $(B_t - B_s)^2$ *nezavisno od* $\mathscr{F}_s$ *(Lema 1.).*

Rezultat $\int_0^T B_s \circ dB_s = \frac{1}{2} B_T^2$ pokazuje da vrijedi pravilo za derivaciju kompozicije funkcija. Neka je $b(t)$ deterministička diferencijabilna funkcija takva da je $b(0) = 0$. Koristeći jednakost $\frac{1}{2}\frac{db^2(s)}{ds} = b(s)\frac{db(s)}{ds}$ slijedi

$$\frac{1}{2}\int_0^T \frac{db^2(s)}{ds} ds = \frac{1}{2} b^2(T) = \int_0^T b(s)\frac{db(s)}{ds} ds = \int_0^T b(s) db(s).$$

Ako $b(T)$ zamijenimo Brownovim gibanjem B_T dobivamo prethodno izračunat stohastički integral. Ali ovo je samo formalna zamjena, budući da je to pravilo primjenjivo na diferencijabilne funkcije. Razlog korištenja Stratonovichevog stohastičkog integrala je u tome što formalno zadovoljava pravilo za derivaciju kompozicije funkcija. Može se pokazati da vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 8. *Pretpostavimo da funkcija f zadovoljava*

$$\int_0^T \mathrm{E}[f(B_t)]^2 dt < \infty \quad i \quad \int_0^T \mathrm{E}[f'(B_t)]^2 dt < \infty.$$

Tada vrijedi formula:

$$\int_0^T f(B_t) \circ dB_t = \int_0^T f(B_t) dB_t + \frac{1}{2} \int_0^T f'(B_t) dt.$$

Dokaz. Neka je Taylorov razvoj funkcije f dan s

$$f(B_{y_i}) = f(B_{t_{i-1}}) + f'(B_{t_{i-1}})(B_{y_i} + B_{t_{i-1}}) + \dots$$

Tada vrijedi

$$\begin{aligned}
\widetilde{S_n} = \sum_{i=1}^{n} f(B_{y_i})\Delta_i B &= \sum_{i=1}^{n} f(B_{t_{i-1}})\Delta_i B + \sum_{i=1}^{n} f'(B_{t_{i-1}})(B_{y_i} - B_{t_{i-1}})\Delta_i B + \dots \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(B_{t_{i-1}})\Delta_i B + \sum_{i=1}^{n} f'(B_{t_{i-1}})(B_{y_i} - B_{t_{i-1}})(B_{t_i} - B_{y_i} + B_{y_i} - B_{t_{i-1}}) + \dots \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(B_{t_{i-1}})\Delta_i B + \sum_{i=1}^{n} f'(B_{t_{i-1}})(B_{y_i} - B_{t_{i-1}})^2 \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} f'(B_{t_{i-1}})(B_{y_i} - B_{t_{i-1}})(B_{t_i} - B_{y_i}) + \dots \\
&= \widetilde{S_n}^{(1)} + \widetilde{S_n}^{(2)} + \widetilde{S_n}^{(3)} + \dots
\end{aligned}$$

Prema definiciji Itôvog integrala niz suma $\left(\widetilde{S_n}^{(1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira u srednje-kvadratnom smislu prema $\int_0^T f(B_s)dB_s$.
U zapisu $\widetilde{S_n}^{(2)}$ pojavljuje se $(B_{y_i} - B_{t_{i-1}})^2$. U Primjeru 1. pokazali smo da vrijedi

$$\mathrm{E}[(B_{y_i} - B_{t_{i-1}})^2] = \frac{1}{2}(t_i - t_{i-1}) = \frac{1}{2}\Delta_i$$

i

$$\mathrm{Var}\left(\left(B_{y_i} - B_{t_{i-1}}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\Delta_i^2.$$

Ako vrijedi $\max_{i=1,\dots,n} \Delta_i \to 0$, onda je

$$\mathrm{Var}\left(\left(B_{y_i} - B_{t_{i-1}}\right)^2\right) \leq \frac{1}{2}\Delta_i \max_{i=1,\dots,n} \Delta_i \to 0.$$

Kako je

$$\mathrm{Var}\left(\left(B_{y_i} - B_{t_{i-1}}\right)^2\right) = \mathrm{E}\left[\left(\left(B_{y_i} - B_{t_{i-1}}\right)^2 - \frac{1}{2}\Delta_i\right)^2\right]$$

pokazano je da $(B_{y_i} - B_{t_{i-1}})^2$ konvergira u srednje-kvadratnom smislu prema $\frac{1}{2}\Delta_i$. Zbog toga $\left(\widetilde{S_n}^{(2)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira u srednje-kvadratnom smislu prema $\frac{1}{2}\int_0^T f'(B_t)dt$. Znamo da je

$\mathrm{E}[(B_{y_i}-B_{t_{i-1}})(B_{t_i}-B_{y_i})]=0$ pa $\left(\widetilde{S_n}^{(3)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira u srednje-kvadratnom smislu prema 0. Prema Definiciji 4. $(\widetilde{S_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira u srednje-kvadratnom smislu prema $\int_0^T f(B_t)\circ dB_t$. Uzimajući u obzir te konvergencije dobivamo tvrdnju Teorema 8. $\square$

Uzimanje specifične funkcije $f(t)=g'(t)$ i primjena jednostavne verzije Itôve leme (Teorem 5.) daje tvrdnju Korolara 3.

$$\begin{aligned} g(B_T)-g(B_0) &= \int_0^T g'(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^T g''(B_s)ds = \int_0^T f(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^T f'(B_s)ds \\ &= \int_0^T g'(B_s)\circ dB_s. \end{aligned}$$

Korolar 3. *Za Stratonovichev stohastički integral vrijedi:*

$$g(B_T)-g(B_0)=\int_0^T g'(B_s)\circ dB_s.$$

Tvrdnja Korolara 3. ne znači da je Stratonovichev stohastički integral klasični Riemannov integral.

Primjer 2. *Uzmimo funkciju $g(t)=t^2$. Tada iz tvrdnje Korolara 3. dobivamo*

$$\int_0^T B_t\circ dB_t=\frac{1}{2}B_T^2-\frac{1}{2}B_0^2=\frac{1}{2}B_T^2.$$

Ovo je u skladu s vrijednosti $S_T(B)$ iz Primjera 1.

Primjer 3. *Uzmimo funkciju $g(t)=e^t$. Primjenom Korolara 3. slijedi*

$$\int_0^T e^{B_t}\circ dB_t=e^{B_T}-e^{B_0}=e^{B_T}-1.$$

Ovo pokazuje da je funkcija $g(B_t)=e^{B_t}$ Stratonovicheva eksponencijalna funkcija.

Definirali smo Stratonovichev stohastički integral samo za transformaciju Brownovog gibanja, odnosno za integrande oblika $f(B_t)$. Sada želimo tu definiciju proširiti na integrande oblika $f(t,x)$. Neka je dan proces

$$C_t=f(t,X_t),\quad t\in[0,T],$$

gdje funkcija $f(t,x)$ ima neprekidne parcijalne derivacije drugog reda. Pretpostavimo da je X Itôv proces zadan stohastičkom diferencijalnom jednadžbom

$$X_t=X_0+\int_0^t a(s,X_s)ds+\int_0^t b(s,X_s)dB_s,$$

gdje su $a(t,x)$ i $b(t,x)$ funkcije koje zadovoljavaju uvjete za egzistenciju i jedinstvenost jakog rješenja stohastičke diferencijalne jednadžbe. Odnosno, pretpostavimo da za sve $t\in[0,T]$ i $x,y\in\mathbb{R}$ funkcijski koeficijenti zadovoljavaju:

- Funkcije $a(t,x)$ i $b(t,x)$ su neprekidne.

- Zadovoljavaju Lipschitzov uvjet po prostornoj varijabli, to jest postoji konstanta $K_1 > 0$ takva da vrijedi:

$$|a(t,x) - a(t,y)| + |b(t,x) - b(t,y)| \leq K_1|x - y|.$$

- Zadovoljavaju uvjet linearnog rasta, to jest postoji konstanta $K_2 > 0$ takva da vrijedi:

$$a^2(t,x) + b^2(t,x) \leq K_2^2(1 + x^2).$$

Za funkciju $f(t,x)$ i proces X Stratonovichev stohastički integral

$$\int_0^T f(t, X_t) \circ dB_t$$

je limes u srednje-kvadratnom smislu niza Riemann-Stieltjesovih suma

$$\widetilde{S_n} = \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1}, 0.5(X_{t_{i-1}} + X_{t_i}))\Delta_i B,$$

ako vrijedi

$$\int_0^T E[f(t, X_t)]^2 dt < \infty.$$

Teorem 9. *Neka vrijede dane pretpostavke za funkciju f i proces X. Tada vrijedi sljedeća formula:*

$$\int_0^T f(t, X_t) \circ dB_t = \int_0^T f(t, X_t) dB_t + \frac{1}{2}\int_0^T b(t, X_t) f_2(t, X_t) dt,$$

gdje je $f_2(t,x)$ parcijalna derivacija funkcije f po x.

Dokaz se može pronaći u [3]. U Teoremu 9. Stratonovichev stohastički integral prikazan je pomoću Itôvog stohastičkog integrala i Riemannovog integrala, odnosno to je općenitija formula od formule u Teoremu 8.

5 Stratonovicheva stohastička diferencijalna jednadžba

U primjenama stohastičkih diferencijalnih jednadžbi nije uvijek lako odrediti koji tip diferencijalne jednadžbe koristiti, to jest koji tip integrala koristiti (Itôv stohastički integral ili Stratonovichev stohastički integral). Stratonovichev stohastički integral formalno zadovoljava pravilo za derivaciju kompozicije funkcija pa se ovo svojstvo koristi za rješavanje Itôvih stohastičkih diferencijalnih jednadžbi, jer je to pravilo lakše koristiti kod nekih izračuna. Stratonovicheva stohastička diferencijalna jednadžba je stohastička integralna jednadžba oblika

$$X_t = X_0 + \int_0^t \tilde{a}(s, X_s) ds + \int_0^t \tilde{b}(s, X_s) \circ dB_s, \quad t \in [0, T],$$

za zadane funkcijske koeficijente $\tilde{a}(t,x)$ i $\tilde{b}(t,x)$. Prvi integral je Riemannov integral, drugi je Stratonovichev stohastički integral, a $B = (B_t, t \in [0,T])$ je Brownovo gibanje. Slučajni proces X naziva se rješenje jednadžbe ako zadovoljava danu jednadžbu. Jednadžba se može napisati i u obliku

$$dX_t = \tilde{a}(t, X_t) dt + \tilde{b}(t, X_t) \circ dB_t, \quad X_0(\omega) = Y(\omega).$$

Pretpostavimo da je X rješenje Itôve stohastičke diferencijalne jednadžbe

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s)dB_s, \quad t \in [0, T],$$

gdje funkcijski koeficijenti $a(t, x)$ i $b(t, x)$ zadovoljavaju uvjete za egzistenciju i jedinstvenost jakog rješenja stohastičke diferencijalne jednadžbe (navedeni na stranici 11.), a X_0 je nezavisna od $(B_t, t \in [0, T])$ i $\mathrm{E}[X_0^2] < \infty$. Prema Teoremu 9. znamo da vrijedi

$$\int_0^t f(s, X_s) \circ dB_s = \int_0^t f(s, X_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t b(s, X_s)f_2(s, X_s)ds.$$

Za $f = b$ dobivamo

$$\int_0^t b(s, X_s)dB_s = -\frac{1}{2}\int_0^t b(s, X_s)b_2(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s) \circ dB_s.$$

Uključivanjem ove relacije u Itôvu stohastičku diferencijalnu jednadžbu dobivamo Stratonovichevu stohastičku diferencijalnu jednadžbu

$$X_t = X_0 + \int_0^t \tilde{a}(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s) \circ dB_s,$$

gdje je $\tilde{a}(t, x) = a(t, x) - \frac{1}{2}b(t, x)b_2(t, x)$. Posljedica ovoga je ta da su Itôva stohastička diferencijalna jednadžba i Stratonovicheva stohastička diferencijalna jednadžba ekvivalentne u smislu da imaju isto jako rješenje pod uvjetom da ono postoji.
Promotrimo slučajni proces $Y_t = u(t, X_t)$ gdje je X rješenje Itôve stohastičke diferencijalne jednadžbe i neka je $u(t, x)$ glatka funkcija. Primjenom Itove leme iz Teorema 7. na $A_t^{(1)} = a(t, X_t)$ i $A_t^{(2)} = b(t, X_t)$ dobivamo

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \left[u_1 + au_2 + \frac{1}{2}b^2u_{22}\right]ds + \int_0^t bu_2dB_s. \tag{6}$$

Funkcije a, b, u i njihove derivacije su funkcije od s i X_s. Primjena formule iz Teorema 9. na $f = bu_2$ i $f_2 = b_2u_2 + bu_{22}$ daje

$$\int_0^t bu_2dB_s = -\frac{1}{2}\int_0^t \left[b_2u_2 + bu_{22}\right]b\,ds + \int_0^t bu_2 \circ dB_s.$$

Kombinirajući ovu relaciju sa (6) dobivamo:

$$\begin{aligned} Y_t &= Y_0 + \int_0^t \left[u_1 + au_2 + \frac{1}{2}b^2u_{22}\right]ds - \frac{1}{2}\int_0^t \left[b_2u_2 + bu_{22}\right]b\,ds + \int_0^t bu_2 \circ dB_s \\ &= Y_0 + \int_0^t \left[u_1 + (a - \frac{1}{2}bb_2)u_2\right]ds + \int_0^t bu_2 \circ dB_s \\ &= Y_0 + \int_0^t \left[u_1 + \tilde{a}u_2\right]ds + \int_0^t bu_2 \circ dB_s. \end{aligned} \tag{7}$$

Ova formula je u Stratonovichevom diferencijalnom računu analogon pravila za derivaciju kompozicije funkcija za dva puta diferencijabilnu funkciju $u(t, x)$.

Da bismo to pokazali, pretpostavimo da $x(t)$ zadovoljava determinističku diferencijalnu jednadžbu
$$dx(t) = \tilde{a}(t, x(t))dt + b(t, x(t))dc(t),$$
gdje je $c(t)$ diferencijabilna funkcija. Tada dobivamo:

$$\begin{aligned}
u(t + dt, x + dx) - u(t, x) &= u_1(t, x)dt + u_2(t, x)dx \\
&= [u_1(t, x) + \tilde{a}(t, x)u_2(t, x)]dt + b(t, x)u_2(t, x)dc.
\end{aligned}$$

Formalna analogija s (7) omogućuje rješavanje Stratonovichevih stohastičkih diferencijablinih jednadžbi korištenjem pravila za derivaciju kompozicije funkcija.
U sljedećim primjerima dan je postupak rješavanja Itôve stohastičke diferencijalne jednadžbe pomoću ekvivalentne Stratonovicheve stohastičke diferencijalne jednadžbe.

Primjer 4. *Neka je f diferencijabilna funkcija. Promotrimo Itôvu stohastičku diferencijalnu jednadžbu za koju vrijedi $a(t, x) = \frac{1}{2}f(x)f'(x)$ i $b(t, x) = f(x)$, odnosno*

$$X_t = X_0 + \frac{1}{2}\int_0^t f(X_s)f'(X_s)ds + \int_0^t f(X_s)dB_s.$$

Za odgovarajuću Stratonovichevu stohastičku diferencijalnu jednadžbu vrijedi $b(t, x) = f(x)$ i

$$\begin{aligned}
\tilde{a}(t, x) &= a(t, x) - \frac{1}{2}b(t, x)b_2(t, x) \\
&= \frac{1}{2}f(x)f'(x) - \frac{1}{2}f(x)f'(x) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Stratonovicheva stohastička diferencijalna jednadžba je

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(X_s) \circ dB_s.$$

Deterministička diferencijalna jednadžba istog tipa kao Stratonovicheva stohastička diferencijalna jednadžba je oblika $dx(t) = f(x(t))dc(t)$, gdje je $c(t)$ diferencijabilna funkcija. Separacija varijabli daje

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{f(x)} = \int_0^t dc(s),$$

odnosno

$$g(x(t)) - g(x(0)) = c(t) - c(0),$$

za neku funkciju $g(x)$. Zamjenom $x(t) = X_t$ i $c(t) = B_t$ dobivamo

$$g(X_t) - g(X_0) = B_t.$$

Preostaje rješiti jednadžbu po X da bi se dobilo eksplicitno rješenje zadane Itôve stohastičke diferencijalne jednadžbe.

Primjer 5. *Neka je dana Itôva stohastička diferencijalna jednadžba*

$$X_t = X_0 + \frac{1}{2}n\int_0^t X_s^{2n-1}ds + \int_0^t X_s^n dB_s, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Uočimo da je $a(t,x)=\frac{1}{2}nx^{2n-1}$, $b(t,x)=x^n$, $b_2(t,x)=nx^{n-1}$ *i* $\tilde{a}(t,x)=0$. *Ekvivalentna Stratonovicheva stohastička diferencijalna jednadžba je*

$$X_t = X_0 + \int_0^t X_s^n \circ dB_s.$$

Deterministička diferencijalna jednadžba istog tipa je oblika $dx(t)=x^n(t)dc(t)$. *Separacija varijabli daje*

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{x^n} = \int_0^t dc(s).$$

Vrijedi

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{x^n} = \frac{x^{-n+1}}{1-n}\Big|_{x(0)}^{x(t)} = \frac{1}{1-n}x^{-n+1}(t) - \frac{1}{1-n}x^{-n+1}(0).$$

Zamjenom $x(t)$ *s* X_t *i* $c(t)$ *s* B_t *dobivamo*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-n}X_t^{1-n} - \frac{1}{1-n}X_0^{1-n} &= B_t \\
\frac{1}{X_t^{n-1}} &= \frac{1}{X_0^{n-1}} + (1-n)B_t \\
1 &= X_t^{n-1}(X_0^{1-n} + (1-n)B_t) \\
X_t^{n-1} &= \frac{1}{X_0^{1-n} + (1-n)B_t} \\
X_t &= \sqrt[n-1]{\frac{1}{X_0^{1-n} + (1-n)B_t}}.
\end{aligned}$$

Primjer 6. *Neka je sada Itôva stohastička diferencijalna jednadžba oblika*

$$X_t - X_0 = \int_0^t \left[qf(X_s) + \frac{1}{2}f(X_s)f'(X_s) \right] ds + \int_0^t f(X_s)dB_s,$$

gdje je q *zadana konstanta i* f *diferencijabilna funkcija. Iz jednadžbe se uočava da je* $a(t,x)=qf(x)+\frac{1}{2}f(x)f'(x)$ *i* $b(t,x)=f(x)$. *Za ekvivalentnu Stratonovichevu stohastičku diferencijalnu jednadžbu vrijedi*

$$\tilde{a}(t,x) = qf(x) + \frac{1}{2}f(x)f'(x) - \frac{1}{2}f(x)f'(x) = qf(x),$$

odnosno jednadžba je oblika

$$X_t = X_0 + \int_0^t qf(X_s)ds + \int_0^t f(X_s) \circ dB_s.$$

Deterministička diferencijalna jednadžba istog tipa kao stohastička diferencijalna jednadžba je oblika $dx(t)=qf(x(t))dt+f(x(t))dc(t)$, *gdje je* $c(t)$ *diferencijabilna funkcija. Jednadžba se rješava separacijom varijabli, integriranjem obje strane jednakosti te zamjenom* $x(t)$ *s* X_t *i* $c(t)$ *sa* B_t. *Odnosno, dobivamo*

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{f(x)} = g(x(t)) - g(x(0)) = \int_0^t q\,ds + \int_0^t dc(s) = qt + c(t) - c(0).$$

Rješenje je

$$g(X_t) - g(X_0) = qt + B_t.$$

Primjer 7. *Neka je dana funkcija $f(x) = x + 1$, $x \geq 0$, $X_0 = 0$ i neka je q konstanta. Tada je prema Primjeru 6. Itôva stohastička diferencijalna jednadžba oblika*

$$X_t = \int_0^t \left[q(X_s + 1) + \frac{1}{2}(X_s + 1) \right] ds + \int_0^t (X_s + 1) dB_s$$

Tada je $\tilde{a}(t, x) = q(x+1)$ i ekvivalentna Stratonovicheva stohastička diferencijalna jednadžba je

$$X_t = \int_0^t \left[q(X_s + 1) \right] ds + \int_0^t (X_s + 1) \circ dB_s.$$

Deterministička diferencijalna jednadžba istog tipa je oblika $dx(t) = q\,(x(t) + 1)dt + (x(t) + 1)dc(t)$. Nakon separacije varijabli i integriranja dobivamo

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{x+1} = ln(x(t) + 1) - ln(x(0) + 1) = \int_0^t q\,ds + \int_0^t dc(s) = qt + c(t) - c(0).$$

Zamjena $x(t) = X_t$ i $c(t) = B_t$ daje

$$ln(X_t + 1) = qt + B_t.$$

Ostaje još izraziti X_t da bi se dobilo eksplicitno rješenje Stratonovicheve stohastičke diferencijalne jednadžbe, a time i rješenje ekvivalentne Itôve stohastičke diferencijalne jednadžbe. Rješenje je

$$X_t = e^{qt+B_t} - 1.$$

6 Stratonovich-Taylorov razvoj

Mnoge stohastičke diferencijalne jednadžbe nemaju eksplicitno rješenje, stoga su potrebne numeričke tehnike za aproksimaciju rješenja. U nastavku ćemo za rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe podrazumjevati jako rješenje. U ovom poglavlju izvest ćemo Stratonovich-Taylorov razvoj koji će nam trebati za numeričko rješavanje Stratonovicheve stohastičke diferencijalne jednadžbe, odnosno za Milsteinovu aproksimacijsku shemu.
Prvo ćemo pokazati kako dobiti Taylorov razvoj iz integralne reprezentacije determinističke diferencijalne jednadžbe. Promatramo rješenje X_t obične diferencijalne jednadžbe

$$\frac{d}{dt} X_t = a(X_t),$$

s početnom vrijednosti X_{t_0}, za $t \in [t_0, T]$ gdje je $0 \leq t_0 < T$. Funkcija a treba biti glatka i mora imati ograničeni linearni rast. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tri puta neprekidno diferencijabilna funkcija. Tada vrijedi

$$\frac{d}{dt} f(X_t) = a(X_t) \frac{\partial}{\partial x} f(X_t).$$

Ako definiramo operator $L = a\frac{\partial}{\partial x}$ onda vrijedi

$$f(X_t) = f(X_{t_0}) + \int_{t_0}^t Lf(X_{s_1}) ds_1, \quad t \in [t_0, T].$$

Iteracija jednadžbe daje:

$$
\begin{aligned}
f(X_t) &= f(X_{t_0}) + \int_{t_0}^{t} L\left[f(X_{t_0}) + \int_{t_0}^{s_1} Lf(X_{s_2})ds_2\right] ds_1 \\
&= f(X_{t_0}) + Lf(X_{t_0}) \int_{t_0}^{t} ds_1 + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s_1} L^2 f(X_{s_2})ds_2 ds_1 \\
&= f(X_{t_0}) + Lf(X_{t_0})(t-t_0) + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s_1} L^2 f(X_{s_2})ds_2 ds_1.
\end{aligned}
$$

Nadalje, zamjenom $f(X_{s_2})$ dobivamo

$$
\begin{aligned}
L^2 f(X_{s_2}) &= L^2\left[f(X_{t_0}) + \int_{t_0}^{s_2} Lf(X_{s_3})ds_3\right] \\
&= L^2 f(X_{t_0}) + L^2 \int_{t_0}^{s_2} Lf(X_{s_3})ds_3.
\end{aligned}
$$

Vrijedi

$$
\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s_1} L^2 f(X_{t_0})ds_2 ds_1 &= L^2 f(X_{t_0}) \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s_1} ds_2 ds_1 = L^2 f(X_{t_0}) \left[\int_{t_0}^{t} s_1 ds_1 - \int_{t_0}^{t} t_0 ds_1\right] \\
&= L^2 f(X_{t_0}) \left[\frac{s_1^2}{2}\Big|_{t_0}^{t} - t_0(t-t_0)\right] = L^2 f(X_{t_0})\left[\frac{t^2}{2} - \frac{t_0^2}{2} - t_0 t + t_0^2\right] \\
&= \frac{1}{2}L^2 f(X_{t_0})(t^2 - 2t_0 t + t_0^2) = \frac{1}{2}L^2 f(X_{t_0})(t-t_0)^2.
\end{aligned}
$$

Iskoristimo li prethodno slijedi

$$
f(X_t) = f(X_{t_0}) + Lf(X_{t_0})(t-t_0) + \frac{1}{2}L^2 f(X_{t_0})(t-t_0)^2 + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s_1}\int_{t_0}^{s_2} L^3 f(X_{s_3})ds_3 ds_2 ds_1.
$$

Za $r+1$ puta neprekidno diferencijabilnu funkciju klasična Taylorova formula (razvoj) je

$$
f(X_t) = f(X_{t_0}) + \sum_{l=1}^{r} \frac{(t-t_0)^l}{l!} L^l f(X_{t_0}) + \int_{t_0}^{t} \ldots \int_{t_0}^{s_r} L^{r+1} f(X_{r+1})ds_{r+1}\ldots ds_1,
$$

za $t \in [t_0, T]$ i $r = 1, 2, 3, \ldots$. Ova formula se pokazala korisnom u teorijskim istraživanjima, a posebno u numeričkoj analizi.
Sada promatramo Stratonovichevu stohastičku diferencijalnu jednadžbu

$$
dX_t = \tilde{a}(X_t)dt + b(X_t) \circ dB_t,
$$

gdje su $\tilde{a}$ i b glatke funkcije i zadovoljavaju svojstvo ograničenog linearnog rasta. Odnosno, u integralnom obliku

$$
X_t = X_0 + \int_0^t \tilde{a}(X_s)ds + \int_0^t b(X_s) \circ dB_s, \quad t \in [0, T].
$$

Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija. Iz relacije (7) za funkciju $f(x)$ slijedi

$$
f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t \tilde{a}(X_s)\frac{\partial}{\partial x}f(X_s)ds + \int_0^t b(X_s)\frac{\partial}{\partial x}f(X_s) \circ dB_s
$$

i

$$f(X_{t_0}) = f(X_0) + \int_0^{t_0} \tilde{a}(X_s)\frac{\partial}{\partial x}f(X_s)ds + \int_0^{t_0} b(X_s)\frac{\partial}{\partial x}f(X_s) \circ dB_s,$$

za $t \in [t_0, T]$ gdje je $0 \leq t_0 < T$. Oduzimanjem prethodnih jednakosti slijedi

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_{t_0}) = &\int_0^{t} \tilde{a}(X_s)\frac{\partial}{\partial x}f(X_s)ds - \int_0^{t_0} \tilde{a}(X_s)\frac{\partial}{\partial x}f(X_s)ds \\ &+ \int_0^{t} b(X_s)\frac{\partial}{\partial x}f(X_s) \circ dB_s - \int_0^{t_0} b(X_s)\frac{\partial}{\partial x}f(X_s) \circ dB_s. \end{aligned}$$

Koristeći aditivnost integrala dobivamo

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_{t_0}) + \int_{t_0}^{t} \tilde{a}(X_s)\frac{\partial}{\partial x}f(X_s)ds + \int_{t_0}^{t} b(X_s)\frac{\partial}{\partial x}f(X_s) \circ dB_s \\ &= f(X_{t_0}) + \int_{t_0}^{t} L^0 f(X_s)ds + \int_{t_0}^{t} L^1 f(X_s) \circ dB_s, \end{aligned} \tag{8}$$

za $t \in [t_0, T]$ i operatore

$$L^0 = \tilde{a}\frac{\partial}{\partial x}$$

i

$$L^1 = b\frac{\partial}{\partial x}.$$

Promotrimo jednadžbu (8) za različite $f(x)$.
Ako je $f(x) = x$ onda je $L^0 f = \tilde{a}$ i $L^1 f = b$ pa dobivamo Stratonovichevu jednadžbu

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^{t} \tilde{a}(X_s)ds + \int_{t_0}^{t} b(X_s) \circ dB_s. \tag{9}$$

Ako je $f(x) = \tilde{a}(x)$ dobivamo

$$\tilde{a}(X_t) = \tilde{a}(X_{t_0}) + \int_{t_0}^{t} L^0\tilde{a}(X_s)ds + \int_{t_0}^{t} L^1\tilde{a}(X_s) \circ dB_s. \tag{10}$$

Ako je $f(x) = b(x)$ jednadžba (8) postaje

$$b(X_t) = b(X_{t_0}) + \int_{t_0}^{t} L^0 b(X_s)ds + \int_{t_0}^{t} L^1 b(X_s) \circ dB_s. \tag{11}$$

Ako jednadžbe (10) i (11) uvrstimo u (9) dobivamo

$$\begin{aligned} X_t = X_{t_0} &+ \int_{t_0}^{t} \left(\tilde{a}(X_{t_0}) + \int_{t_0}^{s} L^0\tilde{a}(X_z)dz + \int_{t_0}^{s} L^1\tilde{a}(X_z) \circ dB_z \right) ds \\ &+ \int_{t_0}^{t} \left(b(X_{t_0}) + \int_{t_0}^{s} L^0 b(X_z)dz + \int_{t_0}^{s} L^1 b(X_z) \circ dB_z \right) \circ dB_s \\ &= X_{t_0} + \tilde{a}(X_{t_0}) \int_{t_0}^{t} ds + b(X_{t_0}) \int_{t_0}^{t} \circ dB_s + R, \end{aligned} \tag{12}$$

gdje je

$$
\begin{aligned}
R = &\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} L^0\tilde{a}(X_z)dzds + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} L^1\tilde{a}(X_z)\circ dB_z ds \\
&+ \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} L^0 b(X_z)dz\circ dB_s + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} L^1 b(X_z)\circ dB_z\circ dB_s.
\end{aligned}
$$

Možemo nastaviti razvoj. Za zadnji član ostatka R vrijedi

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} L^1 b(X_z)\circ dB_z\circ dB_s \\
&= \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\left(L^1 b(X_{t_0}) + \int_{t_0}^{z} L^0L^1 b(X_u)du + \int_{t_0}^{z} L^1L^1 b(X_u)\circ dB_u\right)\circ dB_z\circ dB_s,
\end{aligned}
\tag{13}
$$

pri čemu je korištena jednadžba (8) za $f = L^1 b$. Uočimo da vrijedi

$$
\begin{aligned}
L^0\tilde{a} &= \tilde{a}\frac{\partial}{\partial x}\tilde{a} = \tilde{a}\tilde{a}' \\
L^0 b &= \tilde{a}\frac{\partial}{\partial x}b = \tilde{a}b' \\
L^1\tilde{a} &= b\frac{\partial}{\partial x}\tilde{a} = b\tilde{a}' \\
L^1 b &= b\frac{\partial}{\partial x}b = bb'.
\end{aligned}
$$

Tada za prvi član na desnoj strani jednakosti u (13) vrijedi

$$
\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} L^1 b(X_{t_0})\circ dB_z\circ dB_s = b(X_{t_0})b'(X_{t_0})\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\circ dB_z\circ dB_s.
$$

Jednadžba (12) postaje

$$
X_t = X_{t_0} + \tilde{a}(X_{t_0})\int_{t_0}^{t} ds + b(X_{t_0})\int_{t_0}^{t}\circ dB_s + b(X_{t_0})b'(X_{t_0})\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\circ dB_z\circ dB_s + \widetilde{R}, \tag{14}
$$

gdje je

$$
\begin{aligned}
\widetilde{R} = &\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} L^0\tilde{a}(X_z)dzds + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} L^1\tilde{a}(X_z)\circ dB_z ds + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} L^0 b(X_z)dz\circ dB_s \\
&+ \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\int_{t_0}^{z} L^0L^1 b(X_u)du\circ dB_z\circ dB_s + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\int_{t_0}^{z} L^1L^1 b(X_u)\circ dB_u\circ dB_z\circ dB_s.
\end{aligned}
$$

Jednadžba (14) je Stratonovich-Taylorov razvoj.

7 Milsteinova aproksimacijska shema

Numeričko rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe je slučajni proces koji aproksimira difuziju (rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe). Neka je $X = (X_t, t \in [0,T])$ jako rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe

$$dX_t = \tilde{a}(X_t)dt + b(X_t) \circ dB_t, \quad t \in [0,T]. \tag{15}$$

Numeričko rješenje $X^{(n)} = (X_t^{(n)}, t \in [0,T])$ stohastičke diferencijalne jednadžbe (15) temelji se na subdiviziji τ_n segmenta $[0,T]$,

$$\tau_n : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = T.$$

Koristimo oznaku $\delta_n = \max\limits_{i=1,\ldots,n}(t_i - t_{i-1}) = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \Delta_i$ za maksimalni vremenski korak. Najčešće se razmatra ekvidistantna subdivizija, odnosno vrijedi $\delta_n = \frac{T}{n}$. Numeričko rješenje $X^{(n)}$ računa se samo u točkama subdivizije τ_n, a $X_t^{(n)}$ na intervalu $\langle t_{i-1}, t_i\rangle$ dobiven je linearnom interpolacijom točaka $(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}^{(n)})$ i $(t_i, X_{t_i}^{(n)})$, gdje su $(X_{t_i}^{(n)},\ t_i \in \tau_n)$ vrijednosti numeričkog rješenja u točkama subdivizije. Odnosno,

$$X_t^{(n)} = X_{t_{i-1}}^{(n)} + \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}(X_{t_i}^{(n)} - X_{t_{i-1}}^{(n)}), \quad t \in \langle t_{i-1}, t_i\rangle.$$

Promatramo stohastičku diferencijalnu jednadžbu (15) u integralnom obliku

$$X_t = X_0 + \int_0^t \tilde{a}(X_s)ds + \int_0^t b(X_s) \circ dB_s, \quad t \in [0,T].$$

Za točke particije $t_i \in \tau_n$, $i \in \{1,\ldots,n\}$, možemo promatrati priraste $(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})$, odnosno:

$$X_{t_i} = X_{t_{i-1}} + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \tilde{a}(X_s)ds + \int_{t_{i-1}}^{t_i} b(X_s) \circ dB_s, \quad i = 1,\ldots,n. \tag{16}$$

Milsteinova aproksimacijska shema temelji se na Stratonovich-Taylorovom razvoju jednadžbe (16). Prema jednadžbi (14) dobivamo:

$$\begin{aligned} X_{t_i} = X_{t_{i-1}} &+ \tilde{a}(X_{t_{i-1}}) \int_{t_{i-1}}^{t_i} ds + b(X_{t_{i-1}}) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \circ dB_s \\ &+ b(X_{t_{i-1}})b'(X_{t_{i-1}}) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \int_{t_{i-1}}^{s} \circ dB_z \circ dB_s + \widetilde{R}, \end{aligned} \tag{17}$$

gdje je $\widetilde{R}$ odgovarajući ostatak. Prva dva integrala u (17) možemo rješiti. Vrijedi

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} ds = t_i - t_{i-1} = \Delta_i.$$

Prema Korolaru 3. za $g(t) = t$ i aditivnosti integrala dobivamo

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \circ dB_s = \int_0^{t_i} \circ dB_s - \int_0^{t_{i-1}} \circ dB_s = B_{t_i} - B_0 - B_{t_{i-1}} + B_0 = B_{t_i} - B_{t_{i-1}} = \Delta_i B.$$

Preostaje još riješiti dvostruki integral u (17). Iz Korolara 3. i aditivnosti integrala slijedi

$$\begin{aligned}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\int_{t_{i-1}}^{s} \circ dB_z \circ dB_s &= \int_{t_{i-1}}^{t_i}\left(\int_{t_{i-1}}^{s} \circ dB_z\right)\circ dB_s = \int_{t_{i-1}}^{t_i}\left(B_s - B_{t_{i-1}}\right)\circ dB_s \\ &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} B_s \circ dB_s - B_{t_{i-1}}\int_{t_{i-1}}^{t_i} \circ dB_s = \frac{1}{2}B_{t_i}^2 - \frac{1}{2}B_{t_{i-1}}^2 - B_{t_{i-1}}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \\ &= \frac{1}{2}B_{t_i}^2 - \frac{1}{2}B_{t_{i-1}}^2 - B_{t_{i-1}}B_{t_i} + B_{t_{i-1}}^2 = \frac{1}{2}B_{t_i}^2 + \frac{1}{2}B_{t_{i-1}}^2 - B_{t_{i-1}}B_{t_i} \\ &= \frac{1}{2}(B_{t_i}^2 + B_{t_{i-1}}^2 - 2B_{t_{i-1}}B_{t_i}) = \frac{1}{2}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 = \frac{1}{2}(\Delta_i B)^2.\end{aligned}$$

Zamijena slučajnih varijabli X_{t_i} komponentama numeričkog rješenja $X_{t_i}^{(n)}$ daje motivaciju za definiranje Milsteinove aproksimacijske sheme. Milsteinova aproksimacijska shema:

$$X_0^{(n)} = X_0 \ \text{ i za } \ i = 1, \ldots, n,$$

$$X_{t_i}^{(n)} = X_{t_{i-1}}^{(n)} + \tilde{a}(X_{t_{i-1}}^{(n)})\Delta_i + b(X_{t_{i-1}}^{(n)})\Delta_i B + \frac{1}{2}b(X_{t_{i-1}}^{(n)})b'(X_{t_{i-1}}^{(n)})\,(\Delta_i B)^2\,.$$

U sljedećim primjerima iskoristit ćemo Milsteinovu aproksimacijsku shemu za simulaciju trajektorije jakog rješenja Stratonovicheve stohastičke diferencijalne jednadžbe.

Primjer 8. *Stratonovicheva stohastička diferencijalna jednadžba u Primjeru 5. je oblika*

$$X_t = X_0 + \int_0^t X_s^m \circ dB_s, \quad m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \tag{18}$$

Za simulaciju rješenja ove stohatičke diferencijalne jednadžbe neka je $X_0 = 0.2$ *i* $m = 2$. *Za sundiviziju* τ_n *neka vrijedi:*

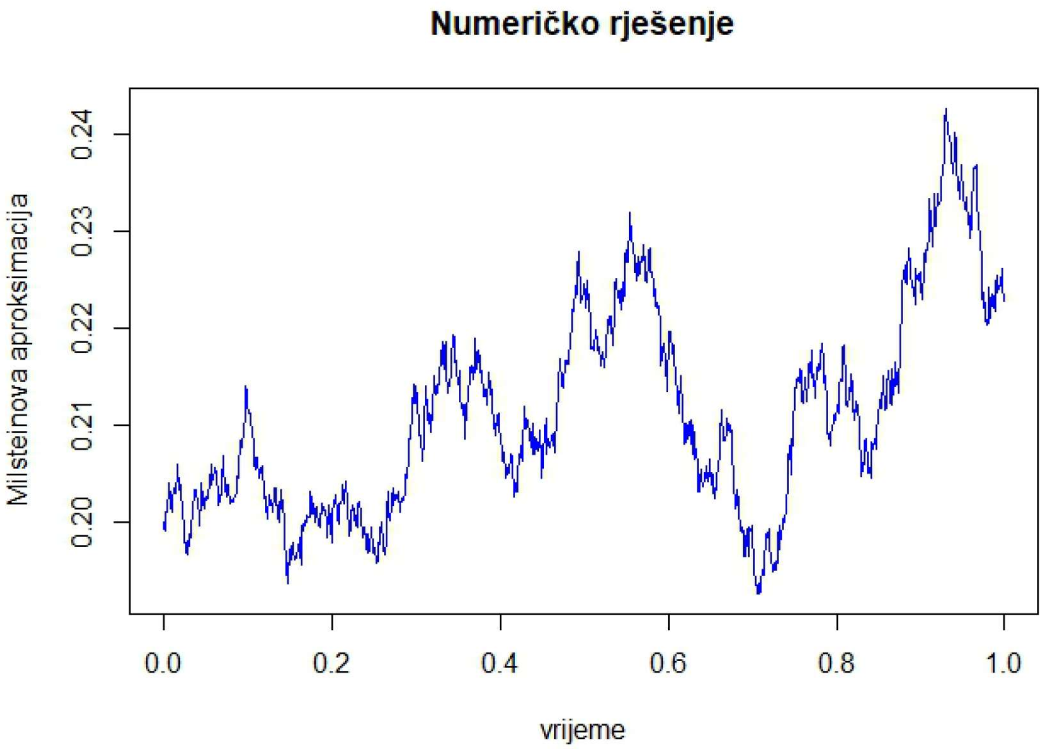
$$\delta_n = \frac{T - t_0}{n}, \ n = 1000, \ t_0 = 0 \ i\ T = 1,$$

odnosno imamo ekvidistantnu subdiviziju koju promatramo na segmentu $[0, 1]$ *s vremenskim korakom* $\delta_{1000} = \frac{1}{1000}$. *Na Slici 1. prikazana je simulirana trajektorija procesa koji je rješenje ove Stratonovicheve stohastičke diferencijalne jednadžbe.*

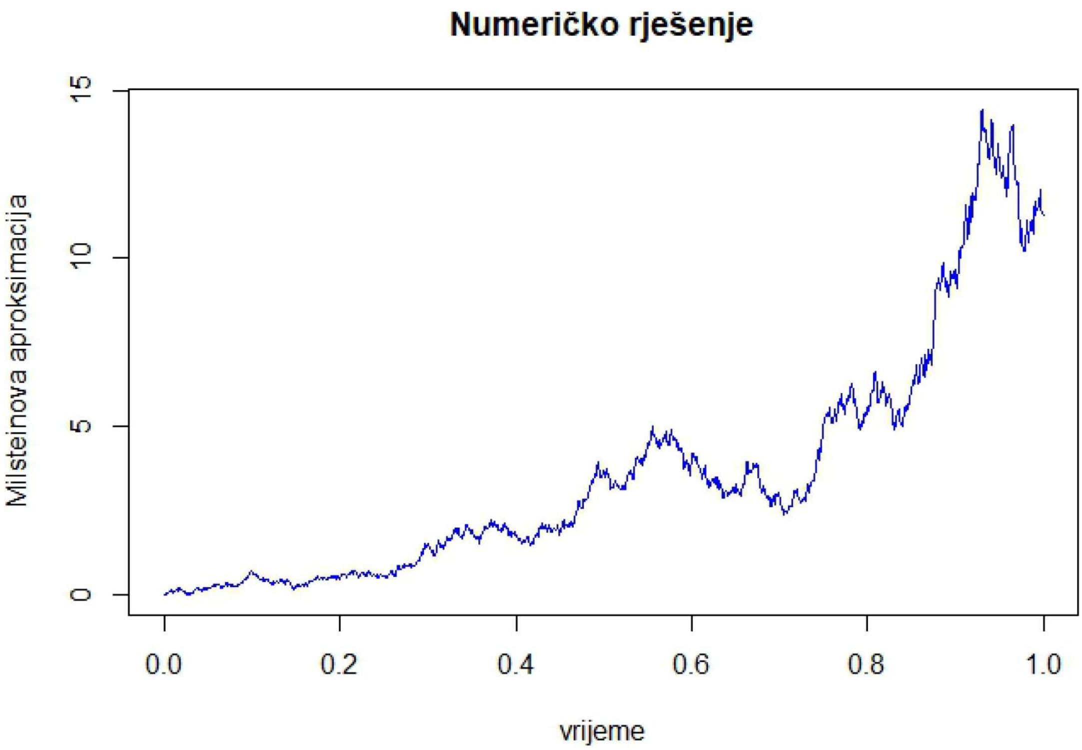
Primjer 9. *U Primjeru 7. Stratonovicheva stohastička diferencijalna jednadžba je*

$$X_t = \int_0^t \Big[q(X_s + 1)\Big]ds + \int_0^t (X_s + 1) \circ dB_s, \tag{19}$$

gdje je $X_0 = 0$ *i* q *konstanta. Na Slici 2. prikazana je simulirana trajektorija procesa koji je rješenje ove stohastičke diferencijalne jednadžbe. Uzeli smo* $q = 2$ *i ekvidistantnu subdiviziju* τ_n *za koju vrijedi* $\delta_n = \frac{T - t_0}{n}$, $n = 1000$, $t_0 = 0$ *i* $T = 1$.



Slika 1. Jedna trajektorija numeričkog rješenja stohastičke diferencijalne jednadžbe (18)



Slika 2. Jedna trajektorija numeričkog rješenja stohastičke diferencijalne jednadžbe (19)

Literatura

[1] T. Mikosch, Elementary Stochastic Calculus With Finance in View, World Scientific, 1998.

[2] R.L. Schilling, L. Partzsch, Brownian Motion, An Introduction to Stochastic Processes, De Gruyter, 2014.

[3] P.E. Kloeden, E. Platen, Numerical Solution of Stohastic Differential Equations, Springer, 1992.

[4] D. Cai, Stochastic volatility models, New York University, bilješke s predavanja

Sažetak

U ovom diplomskom radu proučavana je Stratonovicheva stohastička diferencijalna jednadžba. Najprije je definirano Brownovo gibanje koji je pogonski proces Stratonovicheve stohastičke diferencijalne jednadžbe i navedena su bitna svojstva tog procesa. Definirani su Itôv i Stratonovichev stohatički integral. Pokazano je da Stratonovichev stohastički integral formalno zadovoljava pravilo za derivaciju kompozicije funkcija. Navedena je formula koja povezuje Itôv i Stratonovichev stohastički integral i služi za prelazak s Itôve stohastičke diferencijalne jednadžbe na Stratonovichevu stohastičku diferencijalnu jednadžbu. Navedeni su primjeri u kojima je dan postupak rješavanja Itôve stohastičke diferencijalne jednadžbe pomoću ekvivalentne Stratonovicheve stohastičke diferencijalne jednadžbe. Izveden je Stratonovich-Taylorov razvoj koji je temelj za Milsteinovu aproksimacijsku shemu. Na kraju su navedeni primjeri u kojima se koristi Milsteinova aproksimacijska shema za simulaciju trajektorije jakog rješenja Stratonovicheve stohastičke diferencijalne jednadžbe.

Ključne riječi

Stratonovichev stohastički integral, Stratonovicheva stohastička diferencijalna jednadžba, Stratonovich-Taylorov razvoj, Milsteinova aproksimacijska shema

Stratonovich stochastic differential equations

Abstract

This paper studies Stratonovich stochastic differential equation. First, Brownian motion is defined, which is the driving process of Stratonovich's stochastic differential equation, and the essential properties of that process are listed. Itô's and Stratonovich's stochastic integrals are defined. It is shown that the Stratonovich stochastic integral formally satisfies the chain rule. A formula that connects Itô's and Stratonovich's stochastic integral is given and is used to transition from Itô's stochastic differential equation to Stratonovich's stochastic differential equation. Examples in which the procedure for solving Itô's stochastic differential equation using the equivalent Stratonovich stochastic differential equation are given. The Stratonovich-Taylor expansion is derived, which is the basis for the Milstein approximation scheme. Finally, examples in which the Milstein approximation scheme is used to simulate the trajectory of a strong solution of the Stratonovich stochastic differential equation are given.

Keywords

Stratonovich stochastic integral, Stratonovich stochastic differential equation, Stratonovich-Taylor expansion, Milstein approximation scheme

Životopis

Rođena sam 27. ožujka 1999. u Osijeku. Osnovnu školu "August Harambašić" u Donjem Miholjcu pohađala sam u razdoblju od 2006. do 2014. godine. Iste godine upisujem opću gimnaziju u srednjoj školi u Donjem Miholjcu koju zavšavam 2018. godine. Tijekom srednjoškolskog obrazovanja dva puta sam sudjelovala na županijskom natjecanju iz matematike. Po završetku srednje škole, 2018. godine upisujem preddiplomski studij Matematika na Odjelu za matematiku Sveučilišta J.J. Strossmayera u Osijeku. Preddiplomski studij završavam 2021. godine s temom završnog rada "Nizovi funkcija" pod mentorstvom prof. dr. sc. Dragana Jukića. Iste godine upisujem diplomski studij Financijska matematika i statistika na Odjelu za matematiku u Osijeku.