Matematičko modeliranje jednostavnim funkcijama više varijabli

Petrović, Marijeta

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Diplomski studij matematike
Financijska matematika i statistika

Marijeta Petrović

Matematičko modeliranje jednostavnim funkcijama više varijabli

Diplomski rad

Osijek, 2023.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Diplomski studij matematike
Financijska matematika i statistika

Marijeta Petrović

Matematičko modeliranje jednostavnim funkcijama više varijabli

Diplomski rad

Mentorica: prof. dr. sc. Mihaela Ribičić Penava

Osijek, 2023.

Sadržaj

1. Uvod

U suvremenom svijetu, matematika predstavlja temelj za razumijevanje složenih pojava i procesa koji nas okružuju. Kroz matematičko modeliranje, sposobni smo interpretirati stvarnost i analizirati je na strukturiran način. Jedno od ključnih područja unutar matematičkog modeliranja jest istraživanje funkcija više varijabli. Ovaj diplomski rad posvećen je istraživanju i analizi jednostavnih funkcija više varijabli s ciljem boljeg razumijevanja njihovih svojstava i primjena. Kroz proučavanje ovih funkcija, dolazimo do rješanja brojnih problema iz područja fizike, ekonomije, biologije te mnogih drugih znanstvenih i tehničkih disciplina.

U svijetu konstantnih promjena i sve veće složenosti, matematika je postala ključan alat za razumijevanje mnogih fenomena oko nas. Njena sposobnost da precizno opisuje i predviđa ponašanje nekih prirodnih i društvenih sustava čini ju nezamjenjivom u mnogim disciplinama. Jedna od najvažnijih grana matematike koja se koristi u ovom kontekstu je matematičko modeliranje pomoću funkcija više varijabli, posebno funkcija dviju varijabli.

U nastavku rada, detaljnije ćemo istražiti konkretna svojstva odabranih funkcija više varijabli te primijeniti stečeno znanje na rješavanje različitih problema. Također, razmotrit ćemo numeričke metode za aproksimaciju rješenja i analizirati njihovu primjenjivost u različitim kontekstima.

Kroz ovaj diplomski rad, cilj nam je produbiti razumijevanje matematičkog modeliranja funkcijama više varijabli te istaknuti važnost ovog područja u znanstvenom istraživanju i praktičnim primjenama. Kroz analizu konkretnih primjera i njihovih rješenja, bit ćemo u mogućnosti bolje shvatiti kompleksne veze između varijabli te njihov utjecaj na stvarne situacije.

2. Funkcije dviju i više varijabli - općenito

Razlog zašto funkciju jedne varijable proširujemo dodavajući joj još jednu ili više varijabli je da bolje modeliramo i razumijemo stvarne situacije i fenomene koji ovise o više međusobno povezanih čimbenika. U ovom poglavlju definirat ćemo funkcije više varijabli te objasniti kako su povezane s funkcijama jedne varijable.

Definicija 2.1. *Skup* $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ *(n-terostruki Kartezijev produkt skupa realnih brojeva sa samim sobom), odnosno*

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

zovemo n-dimenzionalni Euklidski prostor, a uređene n-torke $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *su točke tog prostora. Pravilo* $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *koje svakoj točki područja definicije D pridružuje realan broj zovemo realna funkcija od n realnih varijabli. Koristimo oznaku* $T \mapsto f(T)$, $T \in D$ *ili*

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \cdots, x_n),\ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D.$$

U slučaju kad je $n = 1$ radi se o realnoj funkciji jedne varijable. Dakle, kad god imamo funkcije s n varijabli gdje je $n > 1$ govorimo o funkcijama više varijabli.

Definicija 2.2. *Neka je* $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *realna funkcija n realnih varijabli. Graf funkcije* f*, u oznaci* Γ_f*, je skup*

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n,\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D\} = \{f(T) : T \in D\}.$$

Primijetimo da je Γ_f *podskup od* $\mathbb{R}^{n+1}$.

Sjetimo se kako se graf realne funkcije (jedne) realne varijable prikazivao u koordinatnoj ravnini $\mathbb{R}^2$. Analogno se graf realne funkcije dvije realne varijable (gdje je $n = 2$) prikazuje u prostoru, u $\mathbb{R}^3$.

3. Funkcije dviju varijabli

Funkcije mogu biti zadane na konačnim skupovima, tako da su definirane za svaku pojedinačnu vrijednost ili na skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ i njegovim podskupovima. Funkacija dviju varijabli definirana za sve parove brojeva $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ obično se zapisuje

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ z = f(x, y).$$

Skup svih parova realnih brojeva (x, y) označavamo s $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ili $\mathbb{R}^2$.

Funkcija dvije varijable je pravilo koje svakom uređenom paru realnih brojeva (x, y) pridružuje jedan realan broj označen s $f(x, y)$. Formalno, to se može definirati kao preslikavanje:

$$f : D \to \mathbb{R},$$

gdje je $D \subseteq \mathbb{R}^2$ domena funkcije, a to je skup svih uređenih parova (x, y) za koje je funkcija definirana. Funkcija f pridružuje svakom paru $(x, y) \in D$ točno jedan realan broj. O domeni funkcija dviju varijabli više ćemo reći u slijedećem podnaslovu.
Vrijedno je spomenuti da postoje različite vrste funkcija dviju varijabli. Evo nekoliko vrsta s primjerima:

- Linearna funkcija je funkcija oblika $f(x, y) = ax + by + c$, gdje su $a \neq 0$, $b \neq 0$ i c konstante, a x i y varijable.
- Kvadratna funkcija je funkcija koja uključuje kvadrate varijabli. Primjerice to može biti funkcija oblika $f(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + d$, gdje su $a \neq 0$, $b \neq 0$, c i d konstante, a x i y varijable.
- Racionalna funkcija dvije varijable je funkcija koja se može predstaviti kao omjer dvaju polinoma dvije varijable. Ako su $g(x, y)$ i $h(x, y)$ polinomi, racionalna funkcija $f(x, y)$ može se definirati kao: $f(x, y) = \frac{g(x,y)}{h(x,y)}$ pod uvjetom da $h(x, y) \neq 0$ jer dijeljenje s nulom nije definirano.
- Eksponencijalna funkcija je funkcija koja uključuje eksponencijalne izraze. Jedan od najčešćih oblika eksponencijalne funkcije dvije varijable je $f(x, y) = a^{\alpha x + \beta y}$, gdje su a, α, i β konstante.
- Funkcije dviju varijabli koje uključuju apsolutne vrijednosti. Primjer ovakve funkcije $f(x, y) = |x + y|$.

Ovo su samo neke vrste funkcija dviju varijabli. Osim navedenih funkcije dviju varijabli mogu biti polinomne, trigonometrijske, logaritamske i mnoge druge. Naravno postoje i funkcije dviju varijabli koje su kombinacija nekih od navedenih funkcija.

3.1. Domena funkcije dviju varijabli

Jedno od osnovnih pitanja koje se može postaviti za realnu funkciju dvije varijable jest pitanje domene, tj. utvrđivanje područja u ravnini $\mathbb{R}^2$ na kojem je funkcija definirana. Često se pritom i skicira skup svih točaka domene u koordinatnom sustavu, jer sam eksplicitni zapis za domenu ne govori previše.

Domena funkcije dviju varijabli leži u $\mathbb{R}^2$, te za nju poštujemo ista pravila kao za računanje domene funkcije jedne varijable. Ključno je prepoznati uvjet koji mora biti ispunjen za argumente funkcije, bez obzira na to jesu li funkcije jedne ili više varijabli. Rješavanjem svih uvjeta dolazimo do domene zadane funkcije. Pogledajmo što su domene nekih osnovnih funkcija dviju varijabli.

(1) Linearna funkcija

Linearna funkcija dviju varijabli oblika $f(x, y) = ax + by + c$, gdje su $a \neq 0$, $b \neq 0$ i c konstante, ima domenu $D = \mathbb{R}^2$. To znači da x i y mogu uzeti bilo koje stvarne vrijednosti, i funkcija će biti definirana za te vrijednosti.

(2) Kvadratna funkcija

Kvadratna funkcija dviju varijabli oblika $f(x, y) = ax^2 + by^2 + cx + dy + e$, gdje su $a \neq 0$, $b \neq 0$, c, d i e konstante, također ima domenu $D = \mathbb{R}^2$.

(3) Racionalna funkcija

Racionalna funkcija dviju varijabli oblika $f(x, y) = \frac{g(x,y)}{h(x,y)}$, gdje su $g(x, y)$ i $h(x, y)$ polinomi, ima domenu $D = \{(x, y) \mid h(x, y) \neq 0\}$. Ovdje je bitno osigurati da nazivnik funkcije $(h(x, y))$ ne bude jednak nuli kako bi funkcija bila definirana.

(4) Funkcija s korijenom

Funkcija dviju varijabli s korijenom oblika $f(x, y) = \sqrt{g(x, y)}$, gdje je $g(x, y)$ izraz pod korijenom, ima domenu $D = \{(x, y) \mid g(x, y) \geq 0\}$. Ovdje je važno da izraz pod korijenom bude veći ili jednak nuli kako bi se mogao izračunati korijen.

(5) Eksponencijalna funkcija

Funkcija dviju varijabli s eksponentom oblika $f(x, y) = a^{g(x,y)}$, gdje je $g(x, y)$ izraz u eksponentu, ima domenu koja ovisi o definiciji izraza $g(x, y)$ za sve vrijednosti x i y.

(6) Logaritamska funkcija dviju varijabli

Logaritamska funkcija dviju varijabli ima oblik $f(x, y) = \log_a x + \log_b y$, gdje su a i b baze logaritama. Domena ovisi o tome koje vrijednosti x i y ulaze u logaritamske funkcije, pri čemu moraju biti strogo pozitivne.

(7) Trigonometrijska funkcija dviju varijabli

Trigonometrijska funkcija dviju varijabli može imati oblik $f(x, y) = \sin x + \cos y$ ili neki drugi kombinirani trigonometrijski izraz. Domena ovisi o svim mogućim vrijednostima x i y koje čine izraze unutar trigonometrijskih funkcija.

3.2. Graf funkcije dviju varijabli

U ovom poglavlju osvrnut ćemo se na osnovne grafove funkcija dviju varijabli, uvest ćemo pojam plohe i upoznati se s nekoliko osnovnih ploha. Graf funkcije dviju varijabli je ključan za vizualizaciju i razumijevanje različitih problema. Pogledajmo kako je definiran graf funkcije više varijabli.

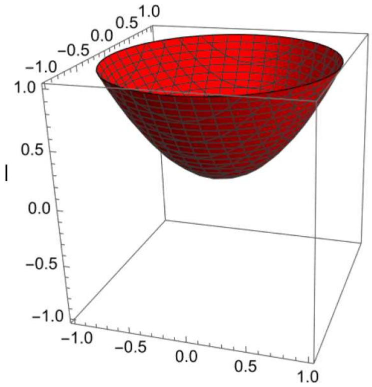
Dobro je poznato da je graf linearne funkcije jedne varijable pravac koji leži u ravnini. Graf linearne funkcije dviju varijabli $f(x, y) = ax+by+c$ je ravnina u prostoru. Koordinatni sustav u prostoru ima tri koordinatne osi, os x je apscisa, os y je ordinata, os z je aplikata. Dio prostora za koji je $x, y, z > 0$ zovemo prvim oktantom. Analogno kao što u ravnini imamo četiri kvadranta, tako u prostoru imamo osam oktanata. Osim kartezijevog pravokutnog sustava možemo imati i neki drugi koordinatni sustav primjerice polarni ili cilindrični sustav. Izabiremo raditi u onom koordinatnom sustavu u kojemu je jednadžba našeg objekta najjednostavnija.
Predočiti neki objekt u prostoru ne koristeći neke matematičke alate težak je posao. Kako bi si zornije predočili grafove funkcija dviju varijabli u prostoru možemo se poslužiti alatom kao što je Wolfram Mathematica.

Bitan pojam kada govorimo o grafu funkcije dviju varijabli je pojam plohe. To je pojam koji se često javlja u svakodnevnom govoru. Kao jedan od mnogih primjera možemo uzeti radnu plohu u kuhinji. Radna ploha u kuhinji je ravnina, ali plohe općenito ne moraju biti ravnine. Također, zidovi u kućama su uglavnom ravne plohe, ravnine, ali to ne mora uvijek biti tako. Ukoliko su zidovi ravnine tada ćemo lako pomoću izračuna površine odrediti koliko boje trebamo kupiti da obojimo te zidove. Ipak, ako su zidovi zakrivljenji tada izračunati površinu nije lagan zadatak. Ideja kako doći do izračuna zakrivljene plohe je ta da plohu apriksimiramo nekom ravninom. Ako ploha nije jako zakrivljena izračun će biti prilično točan. Ako je ploha jako zakrivljena onda je možemo podijeliti na manje dijelove (jer su oni onda ravniji) pa pozbrajati površine tih manjih dijelova kao da su dijelovi ravnine.
Graf funkcije $z = f(x, y)$ je ploha. Iznad svake točke (x, y) koja se nalazi u xy - ravnini, nalazi se samo jedna točka $(x, y, f(x, y))$ koja se nalazi na grafu funkcije koji je ploha. Postoje i plohe koje nisu grafovi funkcija. Sada ćemo nešto reći o osnovnim grafovima funkcija dviju varijabli a to su: paraboloid, stožac, sfera i sedlasta ploha.

3.2.1. Paraboloid

Plohu $z = x^2 + y^2$ nastalu vrtnjom oko osi z nazivamo rotacijskim paraboloidom. U ravnini možemo označiti $r^2 = x^2 + y^2$ te nacrtati sustav u kojem je os r i os z, pa u tom sustavu imamo jednadžbu $z = r^2$ tj. jednadžbu parabole. Zaključujemo da je rotacijski paraboloid $z = x^2 + y^2$ nastao rotacijom parabole $z = r^2$ oko osi z. Paraboloid je ploha koja je simetrična s obzirom na os rotacije.

```
In[ ]:= ContourPlot3D[x^2 + y^2 == z, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, {z, -1, 1}, ColorFunction → "RedGreenSplit"]
```



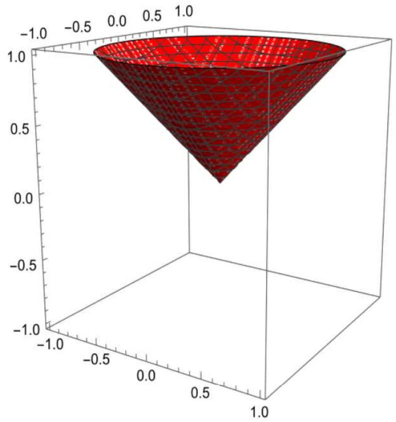
Slika 1: Paraboloid oko osi z

Na prvi pogled paraboloid ne možemo zamisliti u nekom modeliranju ali upravo se rotacijski paraboloid koristi kao pomoć geodezima da modeliraju i predviđaju oblike i rast geoloških formacija kao što su vulkani.

3.2.2. Stožac

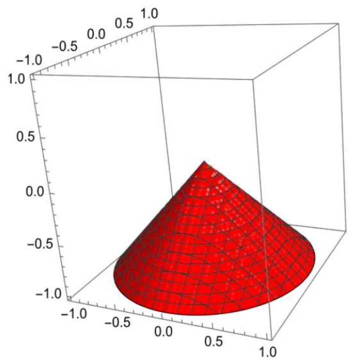
Plohu $z^2 = x^2 + y^2$ nazivamo stošcem nastalim vrtnjom pravca oko osi z. Stožac nije graf funkcije. Razlog tome je što za neke vrijednosti x i y postoji više od jedne moguće vrijednosti za z, što naravno nije u skladu s definicijom funkcije. Stožac možemo promatrati kao dvije zasebne funkcije $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ i $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$. Funkcija $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ima minimum u ishodištu, a funkcija $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ ima maksimum u ishodištu. Stožac ima važnu ulogu u modeliranju pogotovo kada se govori o vulkanima.

```
ContourPlot3D[Sqrt[x^2 + y^2] == z, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, {z, -1, 1}, ColorFunction → "RedGreenSplit"]
```



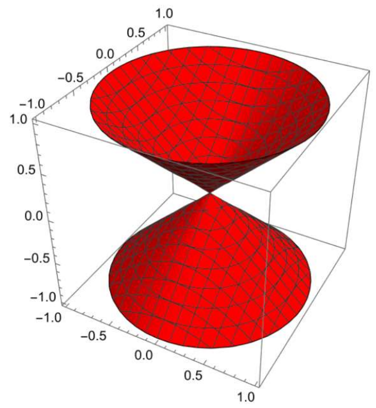
Slika 2: Gornji stožac

```
ContourPlot3D[-Sqrt[x^2 + y^2] == z, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, {z, -1, 1}, ColorFunction → "RedGreenSplit"]
```



Slika 3: Donji stožac

```
In[ ]:= ContourPlot3D[x^2 + y^2 == z^2, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, {z, -1, 1}, ColorFunction → "RedGreenSplit"]
```

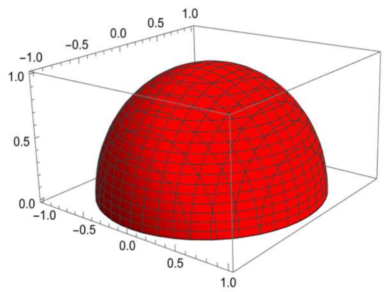


Slika 4: Stožac

3.2.3. Sfera

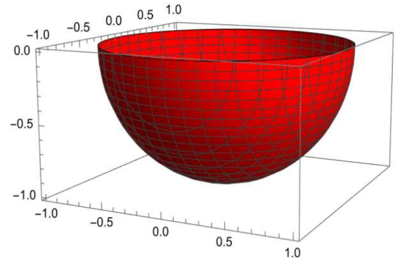
Sfera je skup svih točaka prostora koje su udaljene od jedne čvrste točke za udaljenost r. Tu čvrstu točku nazivamo središte kugle ili središte sfere, C. U matematici, fizici i drugim disciplinama, sfere se često koriste zbog svoje jednostavne simetričnosti, a u računalnoj grafici i dizajnu primjenjuju se za stvaranje 3D modela i animacija. Sfera sa središtem u ishodištu i radijusom R ima jednadžbu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Sfera nije graf funkcije, razlog tomu je isti kao i kod stošca. Sferu također možemo podijeliti na grafove dviju funkcija. Gornja polusfera je $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, a donja $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

```
ContourPlot3D[x^2 + y^2 + z^2 == 1^2, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, {z, 0, 1}, ColorFunction → "RedGreenSplit"]
```



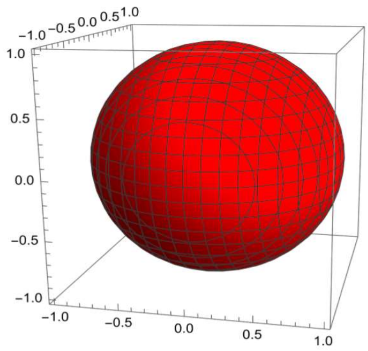
Slika 5: Gornja sfera

```
ContourPlot3D[x^2 + y^2 + z^2 == 1^2, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, {z, -1, 0}, ColorFunction → "RedGreenSplit"]
```



Slika 6: Donja sfera

```
In[ ]:= ContourPlot3D[x² + y² + z² == 1, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, {z, -1, 1}, ColorFunction → "RedGreenSplit"]
```

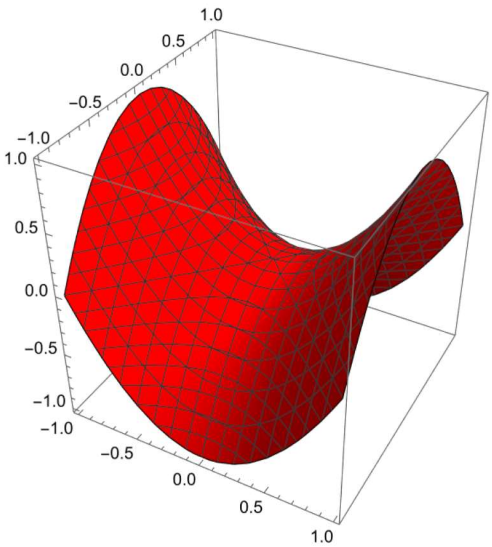


Slika 7: Sfera

3.2.4. Sedlasta ploha

Sedlasta ploha u kontekstu višedimenzionalne matematike i analize često se odnosi na plohu poznatu kao hiperbolički paraboloid. Ova ploha je zanimljiva jer ima oblik sličan sedlu konja, gdje je ploha savijena prema gore u jednom smjeru i prema dolje u drugom smjeru. Hiperbolički paraboloid se može opisati funkcijom $z = x^2 - y^2$.

```
In[ ]:= ContourPlot3D[z == x^2 - y^2, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, {z, -1, 1}, ColorFunction → "RedGreenSplit"]
```



Slika 8: Sedlasta ploha

Svi ovi navedeni grafovi funkcija dviju varijabli uvelike koriste za matematičko modeliranje. Konkretno, za modeliranje se često korisite funkcije dvije varijable koje se mogu svesti na funkcije jedne varijable, tako da se jedna varijabla fiksira. Ako imamo plohu $z = f(x, y)$ i fiksiramo $x = c$, onda proučavamo funkciju jedne varijable $z = f(c, y)$.
Graf funkcije $z = f(c, y)$ je krivulja u ravnini $x = c$ pa je možemo proučavati kao funkcije jedne varijable (vidjeti [4]).
To nije jedini način na koji se pomoću grafova može vizualizirati neki model. Pomoću Wolfram Mathematice možemo crtati grafove u više dimenzija kao što je pokazano te će nam oni biti dovoljni za vizualizaciju problema.

3.3. Modeliranje pomoću funkcija dviju varijabli

Kada govorimo o funkcijama jedne varijable, često mislimo na jednostavne modele koji opisuju kako se jedna varijabla mijenja s obzirom na drugu. Na primjer, kako se mijenja gustoća prometa ovisno o dobu dana. Međutim, u stvarnom svijetu, mnoge situacije nisu tako jednostavne. Često se susrećemo sa situacijama gdje jedna veličina ovisi o dvjema ili više nezavisnih varijabli. U tom slučaju neophodno je koristiti funkcije dviju ili više varijabli. Jedan od primjera može biti ekonomija, gdje cijena proizvoda može ovisiti o brojnim faktorima kao što su troškovi proizvodnje i potražnja. Da bismo modelirali takve složene situacije, koristimo funkcije dviju varijabli. One nam omogućavaju da razumijemo kako promjene u dvjema nezavisnim varijablama utječu na zavisnu varijablu. Osim što nam omogućavaju predviđanje ponašanja sustava pod različitim uvjetima, funkcije dviju varijabli nam pomažu razumjeti odnos među varijablama, te iz njih vidjeti koja varijabla ima veći utjecaj na ishod. Pomoću funkcija dviju varijabli matematički se modeliraju složenije situacije što zahtijeva dublju analizu.

Funkcije dviju ili više varijabli primjenjive su u različitim disciplinama kao što su ekonomija, biologija, inženjerstvo, fizika, računalna grafika i brojne druge.
U ovom potpoglavlju navest ćemo primjere modeliranja pomoću funkcija dviju varijabli koje se često koriste u nekim od ovih disciplina.
Modeliranje ponude i potražnje s dvije varijable omogućava nam da razmotrimo kako druga varijabla, osim cijene, može utjecati na količinu ponuđenih i traženih proizvoda.

Primjer 3.1. *Zadane su funkcija potražnje* $Q_d(P,X) = 200 - 3P + \frac{1}{2}X$ *i funkcija ponude* $Q_s(P,X) = 2P - 14$ *gdje je* P *cijena, a* X *predstavlja količinu novca potrošenog na oglašavanje.*

Slika 9: Šoping centar

U ovom primjeru promotrit ćemo kako funkcija potražnje i funkcija ponude reagiraju na različite cijene P *i promocije* X. *Radi lakšeg razumijevanja tablično ćemo prikazati vrijednosti ponude i potražnje s obzirom na cijenu i količinu novca potrošenog na promocije. Pretpostavimo da se cijene nekog proizvoda kreću u rasponu od* 20 *eura do* 40 *eura (s razmakom od* 5 *eura) i da je za promociju proizvoda potrošeno od* 0 *do* 500 *eura (s razmakom od* 250 *eura).*

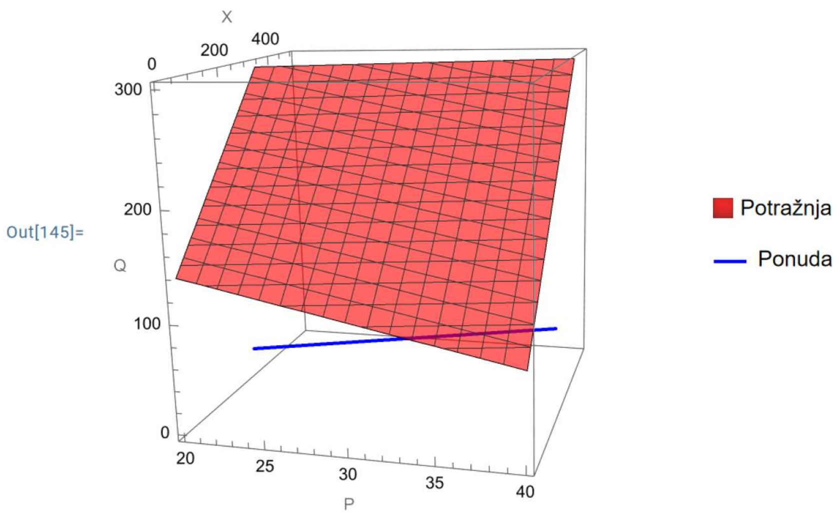
P(€)	X	Q_d(potražnja)	Q_s(ponuda)
20	0	$200 - 3 \cdot 20 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 140$	$2 \cdot 20 - 14 = 26$
25	0	$200 - 3 \cdot 25 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 125$	$2 \cdot 25 - 14 = 36$
30	0	$200 - 3 \cdot 30 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 110$	$2 \cdot 30 - 14 = 46$
35	0	$200 - 3 \cdot 35 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 95$	$2 \cdot 35 - 14 = 56$
40	0	$200 - 3 \cdot 40 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 80$	$2 \cdot 40 - 14 = 66$
20	250	$200 - 3 \cdot 20 + \frac{1}{2} \cdot 250 = 265$	$2 \cdot 20 - 14 = 26$
25	250	$200 - 3 \cdot 25 + \frac{1}{2} \cdot 250 = 250$	$2 \cdot 25 - 14 = 36$
30	250	$200 - 3 \cdot 30 + \frac{1}{2} \cdot 250 = 235$	$2 \cdot 30 - 14 = 46$
35	250	$200 - 3 \cdot 35 + \frac{1}{2} \cdot 250 = 220$	$2 \cdot 35 - 14 = 56$
40	250	$200 - 3 \cdot 40 + \frac{1}{2} \cdot 250 = 205$	$2 \cdot 40 - 14 = 66$
20	500	$200 - 3 \cdot 20 + \frac{1}{2} \cdot 500 = 390$	$2 \cdot 20 - 14 = 26$
25	500	$200 - 3 \cdot 25 + \frac{1}{2} \cdot 500 = 375$	$2 \cdot 25 - 14 = 36$
30	500	$200 - 3 \cdot 30 + \frac{1}{2} \cdot 500 = 360$	$2 \cdot 30 - 14 = 46$
35	500	$200 - 3 \cdot 35 + \frac{1}{2} \cdot 500 = 345$	$2 \cdot 35 - 14 = 56$
40	500	$200 - 3 \cdot 40 + \frac{1}{2} \cdot 500 = 330$	$2 \cdot 40 - 14 = 66$

Tablica 1: Ponuda i potražnja obzirom na cijene i promocije

Iz tablice možemo vidjeti kako cijena i iznos potrošen na promociju utječu na potražnju i ponudu. Potražnja se smanjuje s povećanjem cijene, ali raste s povećanjem iznosa potrošenog na promociju. Ponuda, s druge strane, raste s povećanjem cijene, ali nije pogođena promocijom u ovom modelu.
Nadalje, u ekonomiji bitan pojam je pojam uvjeta čišćenja tržišta koji zahtijeva da je potražnja jednaka ponudi. Iz uvjeta čišćenja tržišta imamo: $Q_d = Q_s$. Iz ove jednakosti slijedi da je

$$200 - 3P + \frac{1}{2}X = 2P - 14$$
$$-3P - 2P = -\frac{1}{2}X - 14 - 200$$
$$-5P = -\frac{1}{2}X - 214$$
$$P = \frac{1}{10}X + \frac{214}{5}$$

Iz ove jednadžbe pravca zaključujemo da je cijena rastuća funkcija obzirom na količinu novca potrošenog na promociju jer je koeficijent smjera pravca pozitivan. To znači da za jedinično povećanje oglašavanja nekog proizvoda cijena raste za desetinu novčanih jedinica. Uzimajući sve ovo u obzir, možemo zaključiti da je promocija ključna komponenta za određivanje cijena određenog proizvoda ili usluge, s linearnim utjecajem na konačnu cijenu koju kupac plaća. Za vizualizaciju zaključka kojeg smo napisali pomoći će nam graf nacrtan u Wolfram Mathematici.



Slika 10: Utjecaj cijene P i promocije X na potražnju i ponudu

Primjer 3.2. *Neka količina proizvodnje ovisi o dva resursa i modelirana je funkcijom* $Q(x, y) = log x + \sqrt{y}$ *gdje je Q količina proizvodnje, x broj radnika, a y broj strojeva u nekom poduzeću.*

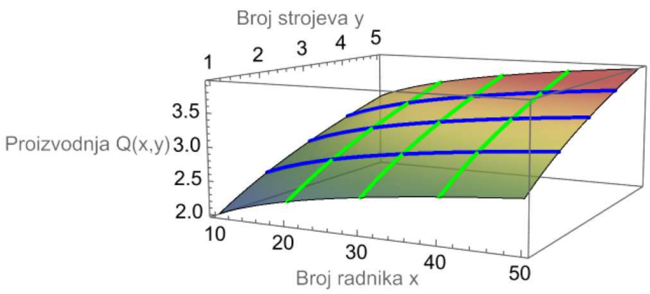
Slika 11: Strojevi

Prije negoli započnemo diskusiju o tome kako broj radnika ili količina strojeva utječu na količinu proizvodnje. Primjetimo kako je funkcija količine proizvodnje dana kao kombinacija dviju funkcija, logaritamske i korijenske pa ima smisla promatrati njezinu domenu.
Domenu ćemo promatrati kao dvije odvojene funkcije.
Domena za logaritamsku funkciju:
Kao što je već spomenuto ranije logaritamska funkcija definirana je za sve pozitivne brojeve tj. $x > 0$. *U kontekstu našeg primjera to znači da moramo imati jednog ili više radnika.*
Domena za korijensku funkciju:
Domenu za ovu funkciju također smo naveli prije u radu. Korijenska funkcija definirana je za sve nenegativne brojeve tj. $y \geq 0$. *Za naš primjer to znači da broj strojeva može biti 0 ili bilo koji pozitavan broj.*
Zbog lakšeg shvaćanja kako količina proizvodnje ovisi o broju radnika i strojeva napravit ćemo tablicu. Bez smanjenja općenitosti neka 10 radnika obavlja posao na 1 stroju, odnosno 20 radnika na 2 stroja itd. Iz tablice ćemo pokušati zaključiti količinu utjecajnosti spomenutih varijabli na količinu proizvodnje.

x (Broj radnika)	y (Broj strojeva)	$\log x$	$\sqrt{y}$	$Q(x,y)$
10	1	1	1	2
20	2	1.3	1.4	2.7
30	3	1.5	1.7	3.2
40	4	1.6	2	3.6
50	5	1.7	2.2	3.9

Tablica 2: Količina proizvodnje ovisno o broju radnika i strojeva.

Iz tablice možemo vidjeti kako broj radnika raste, logaritamska vrijednost se povećava, ali ne brzo. Primjerice, prelazak s 10 *na* 20 *radnika povećao je logaritamsku vrijednost za* 0.3, *dok je prelazak s* 40 *na* 50 *radnika povećao vrijednost samo za* 0.1. *Gledajući drugu varijablu povećanje broja strojeva s* 1 *na* 2, *povećava korijensku vrijednost za* 0.4, *dok povećanje s* 4 *na* 5 *povećava za samo* 0.2.
Zaključujemo kako količina proizvodnje, koja ovisi o ova dva faktora, raste s njihovim porastom, ali ne linearno. Vizualizaciju ovog zaključka napravili smo grafički u Wolfram Mathematici.



Slika 12: Utjecaj radnika X i broja strojeva Y na proizvodnju

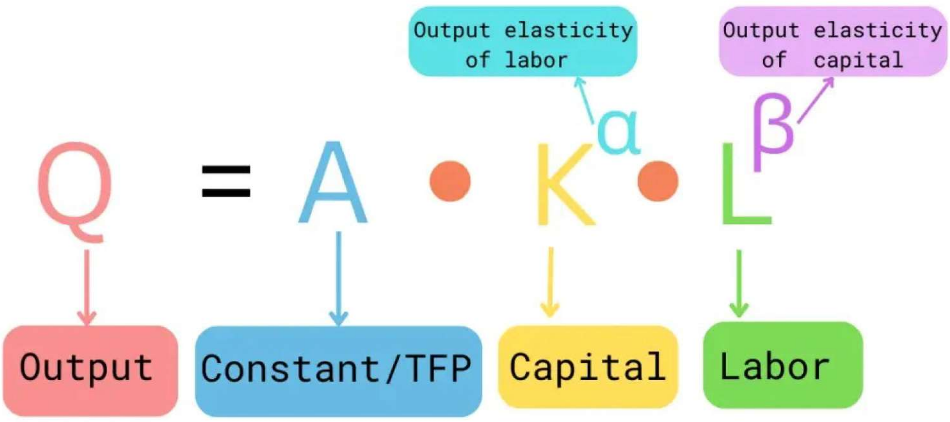
Zelene linije na grafu prikazuju broj radnika, dok plave linije prikazuju broj strojeva. Obojena ploha je količina proizvodnje koja vidljivo raste s porastom broja radnika i broja strojeva što smo i očekivali. Ovakvi grafovi mogu biti korisni u raznim poduzećima za vizualizaciju kompleksnijih problema. Važno je napomenuti da u stvarnom životu količina proizvodnje ovisi o mnogo više varijabli.

U ovom potpoglavlju navest ćemo još jedan primjer koji je vezan za ekonomiju, naime u ekonomiji se za modeliranje koristi funkcija proizvodnje tzv. Cobb-Douglasova funkcija koja je postala popularna zbog svoje jednostavnosti i interpretacije. Općeniti oblik Cobb-Douglasova funkcije dan je formulom $Q(L,K) = A \cdot L^{\alpha} K^{\beta}$, gdje je Q proizvodna funkcija, L je količina rada, K je količina kapitala, A je konstanta koja može predstavljati ukupnu produktivnost faktora ili tehnološku efikasnost dok su α i β su parametri koji predstavljaju elastičnosti proizvodnje u odnosu na rad i kapital. U primjeru ćemo promatrati jedan od mogućih oblika Cobb-Douglasove funkcije za dane parametre α i β.

Primjer 3.3. *Količina proizvodnje nekoga poduzeća ovisi o dva faktora na sljedeći način:*

$$Q(L,K) = 100\sqrt{LK}.$$

Funkcija $Q(L,K)$ dana u primjeru je specijalni slučaj Cobb-Douglasove funkcije. Q predstavlja količinu proizvodnje, L količinu uloženog rada i K količinu kapitala.



Slika 13: Cobb-Douglasova funkcija

Ako postavimo da je $\alpha = 0.5$ i $\beta = 0.5$ te $A = 100$ dobivamo

$$Q(L,K) = 100 \cdot L^{0.5} \cdot K^{0.5} = 100\sqrt{LK}.$$

Uvrstimo li neke konkretne brojke za L i K, primjerice
$L = 4$ *(radnici)*
$K = 9$ *(strojevi)*
u funkciju količine proizvodnje dobivamo:
$Q(L,K) = 100\sqrt{4 \cdot 9} = 100 \cdot \sqrt{36} = 600.$
Sada ćemo udvostručiti L i K, odnosno:
$L = 8$*(radnici)*
$K = 18$*(strojevi)*

Uvrštavanjem novih podataka dobivamo:
$Q(L, K) = 100\sqrt{8 \cdot 18} = 100 \cdot \sqrt{144} = 1200.$

Primjećujemo, kad udvostručimo varijable L i K onda se i količina proizvodnje također udvostruči. To vrijedi jer su oba eksponenta jednaka 0.5. Ovo svojstvo je bitno kod poslovanja jer daje pouzdanu predikciju o tome kako će se proizvodnja promijeniti s povećanjem ulaznih varijabli (u našem slučaju radnika i strojeva).

Izokvanta je krivulja na kojoj se nalaze uređeni parovi rada i kapitala za koje je količina proizvodnje konstantna. Za ovaj primjer izvest ćemo izokvantu na razini proizvodnje $Q = 2000$, grafički je prikazati i ekonomski interpretirati.

Zadali smo:

$$Q(L, K) = 100\sqrt{LK} = 2000$$

Dijeleći obje strane s 100, dobivamo:

$$\sqrt{LK} = 20$$

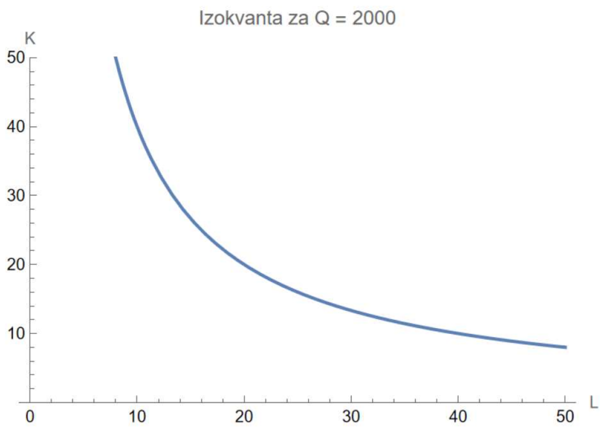
Zatim kvadriramo obje strane te dobivamo:

$$LK = 400$$

Tada je K kao funkcija od L:

$$K = \frac{400}{L}$$

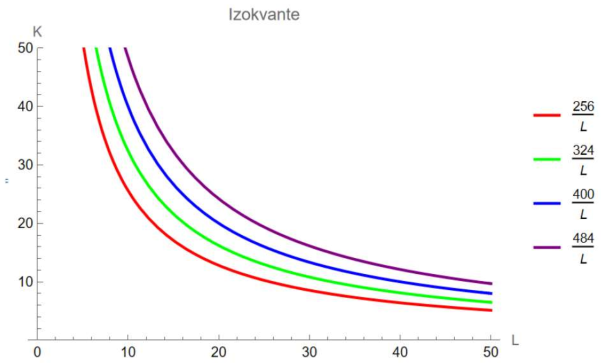
Ova jednadžba predstavlja izokvantu na razini proizvodnje $Q = 2000$. To znači da za svaku vrijednost L, K je $\frac{400}{L}$ kako bi proizvodnja bila konstantna i jednaka 2000.



Slika 14: Izokvanta

Dok se količina rada povećava, potrebno je smanjiti količinu kapitala kako bi proizvodnja ostala nepromijenjena. Drugim riječima, kapital se zamjenjuje radom.

Na istoj slici grafički ćemo prikazati izokvante za različite vrijednosti funkcije Q. Uzmimo da su vrijednosti 1600, 1800, 2000 *i* 2200. *Pomoću Wolfram Mathematice dobijemo slijedeći graf:*



Slika 15: Izokvante za različite razine proizvodnje

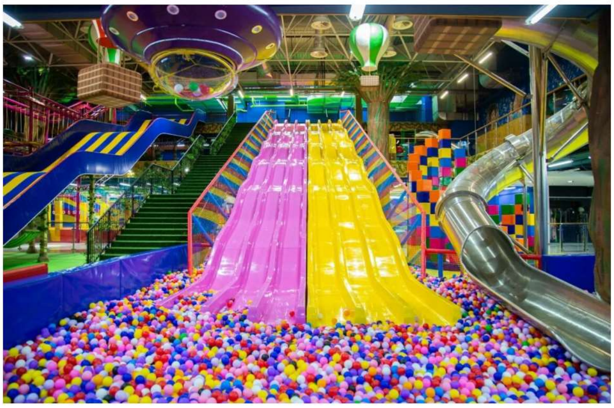
Iz grafa zaključujemo da što je količina proizvodnje veća, izokvanta je udaljenija od ishodišta.

Navedimo još jedan primjer iz svakodnevnog života.

Primjer 3.4. *Marina planira organizirati rođendansku proslavu za svoju kćer. Da bi proslava bila uspješna, želi iznajmiti određeni broj igračaka (npr. skakaonica, tobogan) i angažirati zabavljača za djecu (npr. klauna ili mađioničara). Označimo s x broj iznajmljenih igračaka i s y trajanje nastupa zabavljača u satima. Marinino zadovoljstvo s organizacijom rođendana opisuje funkcija korisnosti*

$$u(x, y) = xy.$$

Iznos koji Marina ima na raspolaganju je 500 *eura. Svaka igračka koju planira iznajmiti košta* 100 *eura, dok nastup zabavljača košta* 50 *eura po satu.*



Slika 16: Tobogan

1. *Ako Marina odluči iznajmiti* 3 *igračke, koliko sati može angažirati zabavljača da ne premaši svoj raspoloživi iznos?*

2. *Krivulja indiferencije je skup uređenih parova za koje je korisnost (razina zadovoljstva) konstantna. Izvedimo krivulju indiferencije za Marinu na razini zadovoljstva $u = 10$, te je grafički prikažimo i ekonomski interpretirajmo.*

3. *Na istoj slici grafički prikažimo krivulje indiferencije za razine korisnosti* $u = 6$, $u = 8$, $u = 12$ *i* $u = 14$. *Ekonomski interpretirajmo.*

Odgovorimo na postavljena pitanja u primjeru.

1. *Ako Marina iznajmi* 3 *igračke, to će je koštati:*

$$3 \cdot 100 \ eura = 300 \ eura$$

S raspoloživih 500 *eura, nakon iznajmljivanja igračaka ostaje joj:*

$$500 \ eura - 300 \ eura = 200 \ eura$$

Kako sat zabavljača košta 50 *eura, s preostalih* 200 *eura može angažirati zabavljača za:*

$$\frac{200 \ eura}{50 \ eura/sat} = 4 \ sata$$

2. *Uzmimo Marininu funkciju korisnosti:*

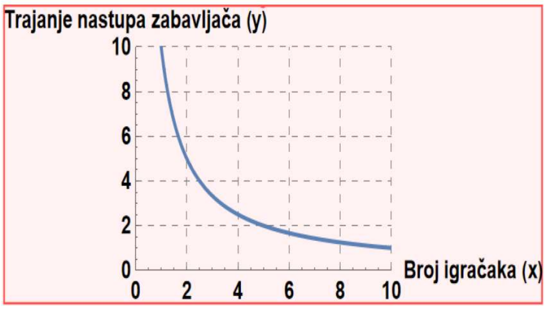
$$u(x, y) = xy.$$

Kada je $u = 10$, *imamo:*

$$xy = 10$$

$$y = \frac{10}{x}.$$

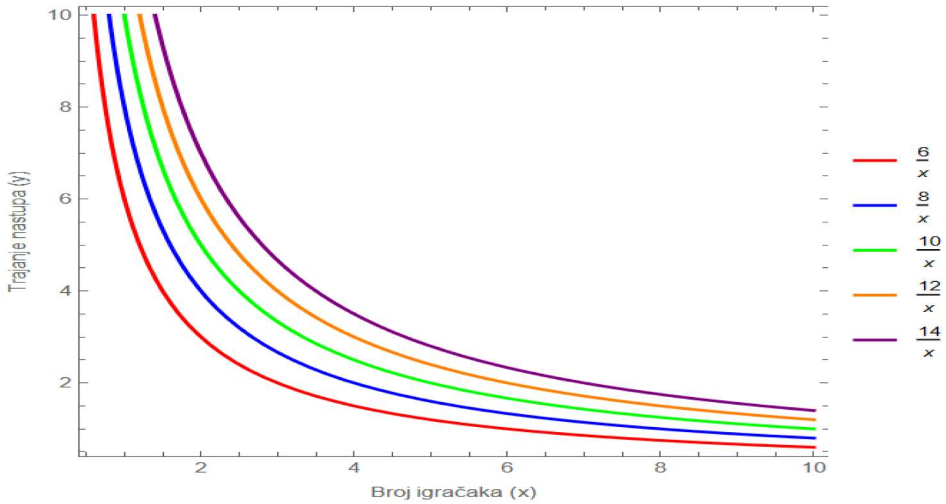
```
Plot[10/x, {x, 0.1, 10}, PlotRange → {{0, 10}, {0, 10}},
 AxesLabel → {"Broj igračaka (x)", "Trajanje nastupa zabavljača (y)"}, LabelStyle → Directive[Bold, Black, Medium],
 PlotLabel → "Krivulja indiferencije za u=100", GridLines → Automatic, GridLinesStyle → Directive[Gray, Dashed],
 PlotStyle → Thick]
```



Slika 17: Krivulja indiferencije

Krivulja indiferencije opisuje kombinacije broja iznajmljenih igračaka i trajanja nastupa zabavljača koje joj pružaju istu razinu zadovoljstva. U ovom slučaju, razina zadovoljstva je konstantna i iznosi 10. *Hiperbolni oblik krivulje s padajućim nagibom ilustrira zamjenski odnos između dvije varijable: broja igračaka i trajanja nastupa. To* *znači da više iznajmljenih igračaka može nadoknaditi kraće trajanje nastupa i obrnuto, dok ukupno zadovoljstvo ostaje nepromijenjeno. Konkretno, ako Marina želi više igračaka, mora biti spremna smanjiti trajanje nastupa zabavljača kako bi zadržala svoju razinu zadovoljstva. Ovaj princip se može primijeniti i u obrnutom smjeru. U suštini, krivulja indiferencije daje uvid u Marinine preferencije i kompromise koje je spremna napraviti kako bi postigla željenu razinu zadovoljstva prilikom organizacije rođendana.*

3. *Najprije prikažimo graf kako bismo vidjeli međusobni odnos među krivuljama obzirom na vrijednosti funkcije korisnosti.*



Slika 18: Krivulja indiferencije

Na grafu je prikazano pet krivulja indiferencije koje odgovaraju različitim razinama zadovoljstva: $u = 6, 8, 10, 12$ *i* 14. *Svaka krivulja predstavlja sve kombinacije* x *i* y *koje proizvode istu razinu korisnosti za Marinu. Na primjer, na krivulji za* $u = 10$, *sve točke (kombinacije igračaka i sati zabavljača) daju Marini isto zadovoljstvo od 10. Kako se krećemo od krivulje za* $u = 6$ *prema krivulji za* $u = 14$, *razina Marininog zadovoljstva raste. Ako Marina, na primjer, želi razinu zadovoljstva od* $u = 12$, *mora odabrati kombinaciju igračaka i sati nastupa zabavljača koja leži na odgovarajućoj krivulji. To može biti mnogo igračaka s malo sati zabavljača ili malo igračaka s mnogo sati zabavljača. Ovaj graf pomaže Marini razumjeti kako može uravnotežiti broj igračaka i trajanje nastupa zabavljača kako bi postigla željenu razinu zadovoljstva unutar svog raspoloživog iznosa.*

4. Funkcije više varijabli

Matematičko modeliranje pomoću funkcija više varijabli složen je proces. Složenost modeliranja odnosi se ponajprije na njihovo računanje, interpretaciju i vizualizaciju.
Funkcija triju varijabli definirana za sve trojke brojeva $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se obično zapisuje kao

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad u = f(x, y, z).$$

Skup svih trojki realnih brojeva (x, y, z) označavamo s $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ili $\mathbb{R}^3$.

4.1. Modeliranje pomoću funkcija više varijabli

Kada govorimo o modeliranju pomoću funkcija više varijabli ono je daleko složenije nego modeliranje pomoću funkcija dvije varijable. Iako modeliranje funkcijama više varijabli zahtjeva dublju analizu ono je neophodno. Promotrit ćemo jedan primjer iz ekonomije, formula dana u primjeru je proširena Cobb-Douglas funkcija koja se koristi za modeliranje količine proizvodnje. Formula je često korištena u ekonomiji jer pruža dobar prvi uvid kako ekonomski sustavi rade.

Primjer 4.1. *Da bi poduzeće proizvodilo, treba koristiti sirovine, rad (zaposlenike) i kapital (strojeve). Količina proizvodnje onda ovisi o 3 faktora na sljedeći način:*

$$Q(M, L, K) = 100M^{0.5}L^{0.4}K^{0.5}.$$

gdje je Q količina proizvodnje, M količina sirovina, L je količina uloženog rada i K je količina kapitala.

Slika 19: Resursi u poduzeću

Izračunajmo količinu proizvodnje na razini sirovina 25*, rada* 1 *i kapitala* 9*.*
U zadanu funkciju proizvodnje uvrstimo dane podatke:

$$Q(25, 1, 9) = 100 \cdot 25^{0.5} \cdot 1^{0.4} \cdot 9^{0.5} = 1500.$$

Kad poduzeće koristi 25 *jedinica sirovina* M*,* 1 *jedinicu rada* L *i* 9 *jedinica kapitala* K*, količina proizvodnje* Q *je* 1500 *jedinica. Faktori* M *i* K *imaju potenciju* 0.5*, dok faktor* L *ima potenciju* 0.4*. U ovom konkretnom izračunu rad je fiksiran na* 1 *stoga ne utječe na krajnji rezultat. Nadalje pogledajmo što će se dogoditi ako dvije varijable fiksiramo.*

Dana nam je funkcija proizvodnje:

$$Q(M, L, K) = 100M^{0.5}L^{0.4}K^{0.5}.$$

Ako L fiksiramo na 1 i K fiksiramo na 4*, možemo te vrijednosti ubaciti u gornju funkciju kako bismo dobili funkciju proizvodnje samo u pogledu* M*, količine sirovina.*

$$Q(M) = 100M^{0.5} \times 1^{0.4} \times 4^{0.5}.$$

Kako je $1^{0.4} = 1$*, izraz se svede na:*

$$Q(M) = 100M^{0.5} \times 4^{0.5}$$

Odnosno:

$$Q(M) = 100 \times 2M^{0.5}$$

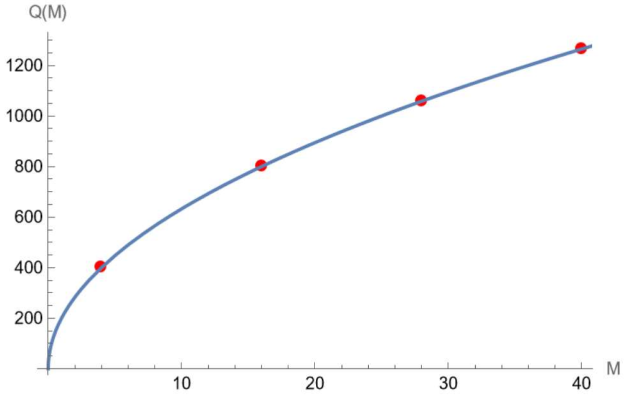
$$Q(M) = 200M^{0.5}$$

Ova funkcija, $Q(M) = 200M^{0.5}$*, predstavlja kratkoročnu proizvodnju poduzeća kada se količina rada i kapitala fiksiraju na dane vrijednosti, a proizvodnja ovisi samo o količini sirovina* M*.*
Uzmimo da je količina sirovina dana u jednakim razmacima, primjerice 4*,* 16*,* 28*,* 40*. Primjetimo da je* M *svaki puta u porastu za* 12 *jedinca, zanima nas ponašanje kratkoročne funkcije proizvodnje. Pogledajmo tablicu sa izračunatim vrijednostima funkcije* $Q(M)$ *za te navedene vrijednosti* M*.*

M	$Q(M)$
4	$200 \times 4^{0.5} = 400$
16	$200 \times 16^{0.5} = 800$
28	$200 \times 28^{0.5} = 1058.30$
40	$200 \times 40^{0.5} = 1264.91$

Tablica 3: Vrijednosti funkcije $Q(M)$ za različite vrijednosti M

Nezavisna varijabla M je svaki puta porasla za 12 jedinica. Zavisna varijabla Q je prvi put porasla za 400*, drugi put za* 258.30 *jedinica, a treći put za* 206.61*. Dakle, porastom nezavisne varijable za uvijek isti broj jedinica, zavisna varijabla raste, ali sve sporije. Ta se pojava zove opadajući prinosi. Pogledajmo graf napravljen u Wolfram Mathematici s našim zadanim vrijednostima za* M*.*



Slika 20: Funkcija Q(M) obzirom na različiti M

U suvremenom, brzom svijetu, mladi ljudi često moraju donositi važne životne odluke nakon završetka svog formalnog obrazovanja. Jedna od najvažnijih odluka je izbor mjesta života, pogotovo ako novi posao zahtijeva preseljenje u drugi grad ili čak državu. Osim same promjene lokacije, odluka o preseljenju donosi i brojne financijske izazove i prilagodbe. Mlada osoba mora uzeti u obzir troškove najma stana, režija, internetskog priključka te brojne druge troškove koji mogu bitno utjecati na kvalitetu života. U ovom kontekstu, pravilna procjena i optimizacija troškova postaje od ključne važnosti. Pogledajmo Markovu situaciju kao primjer ove složene odluke.

Primjer 4.2. *Marko je nedavno završio studij i odlučuje se preseliti u novi grad radi posla. Trenutačno traži stan za najam te istražuje moguće dodatne troškove poput režija i internetskog priključka. Označimo s x mjesečni najam stana, s y ukupne režije i s z cijenu internetskog priključka. Markovo zadovoljstvo odabirom određene kombinacije predstavljeno je funkcijom korisnosti:*

$$u(x, y, z) = 0.4 \ln x + 0.2 \ln y + 0.4 \ln z.$$

Marko ima na raspolaganju 500 *eura mjesečno za pokrivanje tih troškova. Prema informacijama koje je prikupio, prosječna cijena najma stana je* 300 *eura, režije iznose oko* 150 *eura, a internetski priključak stoji* 50 *eura.*

Slika 21: Novac

1. *Ispitajmo ima li Marko dovoljno novaca za pokrivanje troškova stanarine, režija i internetskog priključka. Ukoliko je količina novaca dovoljna, provjerimo Markovo zadovoljstvo pomoću zadane funkcije korisnosti.*

2. *Kako će se Markovo zadovoljstvo promijeniti ako odluči smanjiti troškove režija na* 120 *eura, ali povećati internetski priključak na* 70 *eura, uz istu cijenu najma?*

3. *Ako Marko odluči smanjiti svoj budžet za najam na* 250 *eura kako bi više uložio u režije i brži internetski priključak, kako bi to utjecalo na njegovo ukupno zadovoljstvo prema modelu korisnosti?*

4. *Pretpostavimo da Marko ima mogućnost dijeljenja internetskog priključka s susjedom, čime bi trošak bio podijeljen na pola. Koliko bi to moglo povećati njegovo zadovoljstvo, prema navedenom modelu korisnosti?*

Odgovorimo na postavljena pitanja u primjeru.

1.
   - *Markov raspoloživ iznos:* 500 *eura.*
   - *Trošak najma stana:* 300 *eura.*
   - *Trošak režija:* 150 *eura.*
   - *Trošak internetskog priključka:* 50 *eura.*

   Ukupni trošak za stan, režije i internetski priključak:

   $$300 \ eura + 150 \ eura + 50 \ eura = 500 \ eura.$$

   Dakle, Markov raspoloživi iznos točno pokriva trošak stana, režija i internetskog priključka.

   Markovo zadovoljstvo s obzirom na troškove je opisano funkcijom:

   $$u(x, y, z) = 0.4 \ln x + 0.2 \ln y + 0.4 \ln z.$$

   Uvrstimo zadane vrijednosti:

   $$u(300, 150, 50) = 0.4 \ln 300 + 0.2 \ln 150 + 0.4 \ln 50.$$

   Koristeći logaritamske tablice ili kalkulator, možemo izračunati:

   $$\begin{aligned} u(300, 150, 50) &\approx 0.4(5.70378) + 0.2(5.01064) + 0.4(3.91202) \\ &\approx 2.28151 + 1.00213 + 1.56481 \\ &\approx 4.84845 \end{aligned}$$

   Marko ima točno dovoljno novaca da pokrije sve troškove. Njegovo zadovoljstvo, prema zadanoj funkciji korisnosti, je približno $u \approx 4.84845$.

2. *Kada Marko promijeni troškove režija na* 120 *eura i poveća trošak internetskog priključka na* 70 *eura, korisnost postaje:*

$$\begin{aligned} u(300,120,70) &= 0.4\ln(300) + 0.2\ln(120) + 0.4\ln(70) \\ &\approx 0.4(5.70378) + 0.2(4.78749) + 0.4(4.2485) \\ &\approx 2.28151 + 0.95750 + 1.6994 \\ &\approx 4.93841 \end{aligned}$$

Razlika u korisnosti između ove dvije situacije je:

$$\begin{aligned} \Delta u &= u(300,120,70) - u(300,150,50) \\ \Delta u &\approx 4.93841 - 4.84845 \\ \Delta u &\approx 0.08996 \end{aligned}$$

Dakle, Markovo zadovoljstvo će se povećati za približno 0.08996 *jedinica korisnosti ako odluči smanjiti troškove režija na* 120 *eura, ali povećati internetski priključak na* 70 *eura, uz istu cijenu najma.*

3. *Ako Marko odluči smanjiti svoj budžet za najam na* 250 *eura i podijeliti taj iznos za režije i brži internetski priključak, prvo moramo razmotriti kako će on podijeliti dodatnih 50 eura (razlika između* 300 *eura i* 250 *eura) između režija i internetskog priključka. Kako bismo mogli bolje odgovoriti na pitanje provjerit ćemo dva različita slučaja raspodjele.*

Prvi slučaj *- cijela ušteda uložena u internetski priključak.*

Ovdje je $x = 250$, $y = 150$ *(nepromijenjeno) i* $z = 100$ *(50 eura više).*

Markovo zadovoljstvo (funkcija korisnosti) u ovom slučaju je:

$$\begin{aligned} u(250,150,100) &\approx 0.4\cdot\ln(250) + 0.2\cdot\ln(150) + 0.4\cdot\ln(100) \\ &\approx 0.4(5.52146) + 0.2(5.01064) + 0.4(4.60517) \\ &\approx 2.20858 + 1.00213 + 1.84207 \\ &\approx 5.05278 \end{aligned}$$

Drugi slučaj *- cijela ušteda uložena u režije.*

Ovdje je $x = 250$, $y = 200$ *(50 eura više) i* $z = 50$ *(nepromijenjeno).*

Markova korisnost u ovom slučaju je:

$$\begin{aligned} u(250,200,50) &\approx 0.4\cdot\ln(250) + 0.2\cdot\ln(200) + 0.4\cdot\ln(50) \\ &\approx 0.4(5.52146) + 0.2(5.29832) + 0.4(3.91202) \\ &\approx 2.20858 + 1.05966 + 1.56481 \\ &\approx 4.83305 \end{aligned}$$

S obzirom na to da je

$$u(250,150,100) > u(250,200,50)$$

Markovo zadovoljstvo je veće u prvom slučaju (brži internet) nego u drugom slučaju (više novca za režije). Dakle, prema ovom modelu korisnosti, Marko bi bio zadovoljniji kada bi uložio dodatnih 50 *eura u bolji internetski priključak nego u režije.*

4. *Ako Marko podijeli trošak internetskog priključka sa susjedom, trošak će biti* 25 *eura (upola od* 50 *eura). Dakle, korisnost za Marka kada plaća samo polovicu troška za internet iznosi:*

$$u(300,150,25) = 0.4\ln(300) + 0.2\ln(150) + 0.4\ln(25).$$

$$\begin{aligned} u(300,150,25) &\approx 0.4(5.70378) + 0.2(5.01064) + 0.4(3.21888) \\ &\approx 2.28151 + 1.00213 + 1.28755 \\ &\approx 4.57119 \end{aligned}$$

Razlika u korisnosti između početnog stanja i ovog slučaja podjele troška za internetski priključak je:

$$\Delta u = u(300,150,25) - u(300,150,50).$$

$$\begin{aligned} \Delta u &\approx 4.57119 - 4.84845 \\ &\approx -0.27726 \end{aligned}$$

Dakle, Markovo zadovoljstvo bi se smanjilo za približno 0.27726 *jedinica korisnosti ako bi odlučio podijeliti trošak internetskog priključka sa susjedom. To je suprotno od očekivanog jer smanjenje troška obično povećava zadovoljstvo, ali ovaj rezultat sugerira da Marko cijeni brzinu i pouzdanost internetskog priključka više nego što cijeni uštedu od* 25 *eura.*

Literatura

[1] P. Javor, Matematička analiza 2, Element, Zagreb, 2000.

[2] S. Kurepa, Matematička analiza 3: Funkcije više varijabli, Tehnička knjiga, Zagreb, 1984.

[3] Š. Ungar, Matematička analiza u Rn, Golden marketing-Tehnička knjiga, Zagreb, 2005.

[4] V. Županović, K. Šorić, Primjenjena matematika podržana računalom, Diozit, Slavonski Brod, 2016.

[5] https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/cobb-douglas-production-function

[6] https://www.mathos.unios.hr/images/homepages/imatic/MatematikaIIpredavanja.pdf

Sažetak

Da bismo bolje razumjeli i predvidjeli stvarni svijet, koristimo se matematičkim modelima. Matematički modeli koriste matematiku kako bi opisali određeni sustav ili pojavu. Proces kreiranja takvog modela nazivamo matematičko modeliranje. Budući da je stvarnost kompleksna, prilikom izrade modela često moramo birati koja ćemo svojstva u modelu proučavati a koja jednostavno izostaviti. U ovom diplomskom radu proučavali smo funkcije dviju i više varijabli. Fokusirali smo se na karakteristike, grafičke prikaze i primjene ovih funkcija u modeliranju. U poglavlju posvećenom funkcijama dviju varijabli, detaljno smo analizirali domene tih funkcija te njihove grafičke reprezentacije. U tom kontekstu, istražili smo četiri ključne grafičke strukture: paraboloid, stožac, sferu i sedlastu plohu, pružajući pripadajuće matematičke objašnjenja i ilustracije. Zatim smo se posvetili modeliranju pomoću funkcija dviju varijabli, demonstrirajući kroz konkretne primjere kako se te funkcije mogu primijeniti u praksi. Zadnji dio rada odnosio se na funkcije više varijabli i matematičko modeliranje pomoću funkcija triju varijabli.

Ključne riječi: funkcije više varijabli,domena funkcije, graf funkcije, modeliranje

Mathematical modeling with simple functions of multiple variables

Summary

To better understand and predict the real world, we use mathematical models. Mathematical models employ mathematics to describe a particular system or phenomenon. The process of creating such a model is called mathematical modeling. Since reality is complex, when creating a model, we often have to choose which properties to study in the model and which to simply omit. In this thesis, we studied functions of two or more variables. We focused on the characteristics, graphical representations, and applications of these functions in modeling. In the chapter dedicated to functions of two variables, we thoroughly analyzed the domains of these functions and their graphical representations. In this context, we explored four key graphical structures: the paraboloid, cone, sphere, and saddle surface, providing corresponding mathematical explanations and illustrations. We then turned to modeling using functions of two variables, demonstrating through specific examples how these functions can be applied in practice. The last part of the work pertained to functions of multiple variables and mathematical modeling using functions of three variables.

Keywords: functions of multiple variables, function domain, function graph, modeling.

Životopis

Zovem se Marijeta Petrović, rođena sam u Slavonskom Brodu, 21.travnja 1996. godine. Odrasla sam u Brodskim Zdencima, mjestu pokraj Slavonskog Broda, gdje sam od 2003. do 2007. godine pohađala Područnu školu Blaž Tadijanović u Podcrkavlju. Nakon prva četiri razreda u područnoj školi nastavila sam svoje osnovnoškolsko obrazovanje u Osnovnoj školi Blaž Tadijanović u Podvinju. Nakon završetka osnovne škole 2011. godine, upisala sam gimnaziju Matija Mesić u Slavonskom Brodu. Iako sam upisala opći smjer u gimnaziji u drugom razredu odlučujem ići na izbornu nastavu matematike i tada shvaćam da je matematika ono čime se želim u budućnosti baviti. Gimnaziju sam završila 2015. godine te sam iste godine upisala Integrirani sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku u Osijeku. Godine 2017. prebacujem se na preddiplomski studij matematike i završavam ga 2020. godine. Tada stječem naziv sveučilišna prvostupnica matemetike. Iste godine upisujem diplomski studij na Odjelu za matematiku, smjer Financijska matematika i statistika. Nakon nekog perioda provedenog na diplomskom studiju dolazim do zaključka kako se želim baviti podučavanjem djece. U veljači 2023. godine završavam Pedagoško - psihološko - didaktičko - metodičku izobrazbu na Filozovskom fakultetu u Osijeku. Tijekom školske godine 2022./2023. bila sam zaposlena kao učiteljica matematike u Osnovnoj školi Boloslav Šulek u Slavonskim Brodu.