Martingalne procjeniteljske funkcije

Ujić, Nataša

Master's thesis / Diplomski rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, School of Applied Mathematics and Informatics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Fakultet primijenjene matematike i informatike**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:245857

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni diplomski studij matematike; smjer: Financijska matematika i statistika

Nataša Ujić

Martingalne procjeniteljske funkcije

Diplomski rad

Osijek, 2023.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni diplomski studij matematike; smjer: Financijska matematika i statistika

Nataša Ujić

Martingalne procjeniteljske funkcije

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Nenad Šuvak

Osijek, 2023.

Sadržaj

1 Uvod **2**

2 Osnovni pojmovi i rezultati **3**
- 2.1 Stohastički integral i stohastičke diferencijalne jednadžbe . . . 7
- 2.2 Difuzije . . . 11

3 Osnovno o procjeniteljskim funkcijama **14**
- 3.1 Asimptotska razmatranja . . . 16

4 Martingalne procjeniteljske funkcije **20**
- 4.1 Funkcija vjerodostojnosti i njene aproksimacije . . . 20
- 4.2 Asimptotska razmatranja . . . 21
- 4.3 Optimalnost . . . 23
- 4.4 Eksplicitne martingalne procjeniteljske funkcije . . . 29
- 4.5 Analiza simuliranih vrijednosti . . . 31

Literatura **37**

Sažetak **38**

Abstract **39**

Životopis **40**

1 Uvod

Procjeniteljske funkcije koristan su matematički alat je njihovom uporabom moguće dobiti kvalitetne procjenitelje za nepoznate parametre čak i u situacijama kada ostale metode procjene parametara nisu uspješne, primjerice ako funkcija vjerodostojnosti nije eksplicitno poznata. Iako se smatra da ove funkcije datiraju još iz 19. stoljeća, moderna teorija optimalnih procjeniteljskih funkcija svoj puni zamah dobila je upravo u 20. stoljeću. Kako bismo se upoznali s pojmom procjeniteljskih funkcija, na samom početku rada navest ćemo nekoliko osnovnih pojmova iz statistike koji opisuju neka od najvažnijih svojstava procjenitelja. Nakon toga, definirat ćemo slučajni proces te reći nešto o važnosti stohastičkih diferencijalnih jednadžbi te difuzijskim procesima kao pripadnim rješenjima istih.

U trećem poglavlju navest ćemo općenite informacije o procjeniteljskim funkcijama te formalno definirati procjenitelja dobivenog rješavanjem procjeniteljske jednadžbe. Osim toga, komentirat ćemo optimalnost koju je definirao indijski statističar Godambe, jedan od začetnika moderne teorije optimalnih procjeniteljskih funkcija. Također ćemo spomenuti rezultate koji govore o asimptotskoj distribuciji procjenitelja.

Četvrto poglavlje posvećeno je procjeniteljskim funkcijama koje zadovoljavaju svojstva martingala, odnosno martingalnim procjeniteljskim funkcijama. Komentirat ćemo na koje se načine može aproksimirati funkcija vjerodostojnosti iz koje se mogu dobiti martingalne procjeniteljske funkcije. Nadalje, proučit ćemo asimptotsku distribuiranost te reći nešto o optimalnosti. Na samom kraju rada, spomenut ćemo martingalne procjeniteljske funkcije koje se mogu eksplicitno izraziti korištenjem svojstvenih funkcija te ćemo na primjerima analizirati razlike u procjenama dobivenima na temelju simulacija.

Osnovna literatura korištena prilikom pisanja ovog rada je [11], stoga će i korištene oznake biti prilagođene istoj.

2 Osnovni pojmovi i rezultati

Prije nego što započnemo s proučavanjem procjeniteljskih funkcija, navedimo neke osnovne pojmove koji će nam koristiti u nastavku rada. Za početak ćemo navesti nekoliko pojmova iz statistike koji su neophodni za razumijevanje i analiziranje svojstava procjenitelja. Nakon toga, usredotočit ćemo se na procjenjivanje parametara slučajnih procesa.

Neka je $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ slučajni uzorak iz parametarskog statističkog modela $\{F_{\boldsymbol{\theta}} \colon \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}\}$, a $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ njegova realizacija. Za funkciju parametra $\tau(\boldsymbol{\theta})$, $\tau \colon \boldsymbol{\Theta} \mapsto \tau(\boldsymbol{\Theta}) \subseteq \mathbb{R}^k$, definiramo procjenitelja koji će procijeniti vrijednost te funkcije.

Definicija 2.1. Neka je $t \colon \mathbb{R}^n \to \tau(\boldsymbol{\Theta})$ izmjeriva funkcija. Statistiku $T = t(X_1, X_2, \dots, X_n)$ koju koristimo za procjenu $\tau(\boldsymbol{\theta})$ zovemo procjenitelj za $\tau(\boldsymbol{\theta})$, a vrijednost $\hat{T} = t(x_1, x_2, \dots, x_n)$ zovemo procjena.

Definicija 2.2. Procjenitelj T je nepristran procjenitelj za skalarni parametar θ ukoliko je $\mathrm{E}_\theta(T) = \theta$.

Napomena 2.1. Definicija 2.2 analogna je i u slučaju kada je parametar θ višedimenzionalan.

Definicija 2.3. Neka je skupom $\{f(\boldsymbol{x}; \theta) \colon \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}\}$ dan statistički model slučajnog uzorka $\boldsymbol{X}$, a θ skalarni parametar. Kažemo da je statistički model regularan ako vrijede sljedeće pretpostavke:

1) skup $\{\boldsymbol{x} \colon f(\boldsymbol{x}; \theta) > 0\}$ ne ovisi o parametru θ,

2) Θ je otvoren interval,

3) funkcija $\theta \mapsto f(\boldsymbol{x}; \theta)$ je diferencijabilna na Θ za svaki $\boldsymbol{x}$,

4) $I(\theta) = E_\theta \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(\boldsymbol{X}; \theta) \right)^2 \right] < \infty$,

5) $\frac{\partial}{\partial \theta} \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x}; \theta) \, d\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial \theta} f(\boldsymbol{x}; \theta) \, d\boldsymbol{x}$.

Funkcija definirana izrazom
$$u(\theta; \boldsymbol{x}) = \frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(\boldsymbol{x}; \theta)$$
naziva se skor funkcija, a njena kompozicija sa slučajnim uzorkom daje slučajnu varijablu $U_\theta = u(\theta; \boldsymbol{X})$ koju nazivamo skor. Uočimo kako je zbog petog uvjeta iz prethodne definicije očekivanje skora jednako nuli, tj. vrijedi:

$$E_\theta U_\theta = E_\theta(u(\theta; \boldsymbol{X})) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(\boldsymbol{x}; \theta) \right) f(\boldsymbol{x}; \theta) \, d\boldsymbol{x}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{f(\boldsymbol{x};\theta)} \left[\frac{\partial}{\partial\theta} f(\boldsymbol{x};\theta)\right] f(\boldsymbol{x};\theta)\, d\boldsymbol{x}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial\theta} f(\boldsymbol{x};\theta)\, d\boldsymbol{x}$$

$$= \frac{\partial}{\partial\theta} \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x};\theta)\, d\boldsymbol{x} = \frac{\partial}{\partial\theta}\, 1 = 0.$$

Više detalja o skor funkciji, kao i njenu povezanost s funkcijom vjerodostojnosti i martingalnim procjeniteljskim funkcijama, navest ćemo u poglavljima koja slijede.

Napomena 2.2. Četvrtim uvjetom iz Definicije 2.3 definirana je informacija Fishera koja predstavlja očekivanje kvadrata skora. S obzirom da je očekivanje skora jednako nuli, slijedi da je informacija Fishera jednaka varijanci skora, odnosno

$$I(\theta) = E_\theta(U_\theta^2) = Var_\theta(U_\theta).$$

Osim toga, važno je spomenuti efikasnosti i konzistentnost procjenitelja. Pojednostavljeno rečeno, efikasnost procjenitelja T računa se kao omjer recipročne vrijednosti informacije Fishera i varijance od T. Za dva nepristrana procjenitelja parametra θ, T_1 i T_2, kažemo da je procjenitelj T_1 efikasniji od procjenitelja T_2 ako je $\mathrm{Var}_\theta(T_1) < \mathrm{Var}_\theta(T_2)$, $\forall\theta \in \Theta$.

Definicija 2.4. Niz procjenitelja $(T_n,\ n \in \mathbb{N})$ je konzistentan za parametar $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$ ako je

$$\lim_{n\to\infty} P_{\boldsymbol{\theta}}(\|T_n - \boldsymbol{\theta}\| > \varepsilon) = 0,$$

za svaki $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$ i $\varepsilon > 0$.

Dakle, intuitivno konzistentnost možemo interpretirati na način da kažemo da se s povećanjem veličine n vjerojatnost da se statistika T_n realizira vrijednošću bliskoj stvarnoj vrijednosti parametra približava jedinici.

Napomena 2.3. U nastavku rada promatrat ćemo višedimenzionalni parametar $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$, osim u posebnim slučajevima kada će biti navedeno da je parametar skalaran. Kako bi oznake u radu bile usklađene s korištenom literaturom, u oba ćemo slučaja koristiti oznaku θ.

Prethodnim definicijama opisali smo neke od važnijih pojmova prilikom procjenjivanja parametara promatranih funkcija. Ipak, u nastavku rada bavit ćemo se procjenom parametara slučajnih procesa koji imaju širok spektar primjena u matematici, ali i drugim znanostima poput fizike, biologije, medicine i sl. Budući da slučajni procesi zauzimaju značajno mjesto u matematičkim financijama, primjerice u modelima koji opisuju kretanje cijena dionica ili kretanje kamatnih stopa, vrlo je važno upoznati načine procjenjivanja i svojstva njihovih parametara. Iako niti jedan model ne može u potpunosti replicirati stvarne pojave, poznavanje teorije slučajnih procesa znatno olakšava razumijevanje matematičkih modela koji se koriste za njihovu aproksimaciju.

Definicija 2.5. Slučajni proces je familija slučajnih varijabli $(X_t,\ t \in T)$ definiranih na istom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, pri čemu je t element parametarskog skupa ili skupa indeksa $T \subseteq \mathbb{R}$.

Slučajni proces možemo promatrati kao funkciju dviju varijabli. Fiksiranjem $t \in T$ promatramo funkciju definiranu na Ω koja opisuje realizaciju slučajnog procesa u fiksiranom trenutku t, dok fiksiranjem $\omega \in \Omega$ promatramo funkciju na skupu indeksa T koja opisuje evoluciju procesa tijekom vremena za fiksirani $\omega \in \Omega$. Dakle, trajektorijom (*eng. sample path*) slučajnog procesa $(X_t,\ t \in T)$ nazivamo funkciju koja svakom elementu $t \in T$ za fiksirani $\omega \in \Omega$ pridružuje realizaciju $X_t(\omega)$.

Jedna od zanimljivijih klasa slučajnih procesa zasigurno su martingali koji se u mnogim literaturama motiviraju principom poštene igre na sreću. Budući da je jedan od načina procjene parametara uporaba procjeniteljskih funkcija, posebnu pozornost posvetit ćemo analizi tzv. martingalnih procjeniteljskih funkcija, odnosno procjeniteljskih funkcija koje zadovoljavaju svojstva martingala. Kako bismo mogli definirati martingale, prvo ćemo reći nešto o filtraciji na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ u diskretnom vremenu. Analogne definicije vrijede i u neprekidnom vremenu, odnosno u slučaju kada $T \subseteq \mathbb{R}$ nije diskretan skup.

Definicija 2.6. Familija σ-podalgebri $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n,\ n \in \mathbb{N}_0)$ σ-algebre $\mathcal{F}$ sa svojstvom

$$\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

naziva se filtracija na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ opskrbljen filtracijom $\mathbb{F}$ naziva se filtrirani vjerojatnosni prostor i označava s $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{F})$.

Definicija 2.7. Za slučajni proces $(X_n,\ n \in \mathbb{N}_0)$ na filtriranom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{F})$ kažemo da je adaptiran na filtraciju $\mathbb{F}$ (ili $\mathbb{F}$-adaptiran) ako je za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ slučajna varijabla X_n $\mathcal{F}_n$-izmjeriva, tj. $\sigma(X_n) \subset \mathcal{F}_n$.

Prirodnu filtraciju procesa $(X_n,\ n \in \mathbb{N}_0)$ definiramo familijom σ-alebri $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n,\ n \in \mathbb{N}_0)$ takvih da je $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$. Dakle, $\mathcal{F}_n$ sadrži sve informacije o slučajnom procesu zaključno s trenutkom $n \in \mathbb{N}_0$ i svaki slučajni proces adaptiran je na svoju prirodnu filtraciju. Sada imamo osnovne uvjete za razumijevanje definicije martingala.

Definicija 2.8. Slučajni proces $X = (X_n,\ n \in \mathbb{N}_0)$ na filtriranom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{F})$ je martingal u diskretnom vremenu ako ispunjava sljedeće zahtjeve:

1) $E(|X_n|) < \infty$, za sve $n \in \mathbb{N}_0$,

2) X je $\mathbb{F}$-adaptiran slučajni proces,

3) $E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = X_n$, za sve $n \in \mathbb{N}_0$.

Neophodno je spomenuti i koncept stacionarnosti procesa, jer upravo on osigurava nepromijenjenost očekivanja i varijance procesa tijekom vremena. Ovo svojstvo od posebnog je značaja prilikom kreiranja matematičkih modela jer pruža informacije o kretanju trajektorija procesa.

Definicija 2.9. Slučajni proces $X = (X_t,\ t \in T)$ je strogo stacionaran ili stacionaran u užem smislu ako su za svaki $n \in \mathbb{N}$, za svaki izbor $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$ i za svaki $h > 0$ takav da su $t_1 + h, t_2 + h, \ldots, t_n + h \in T$ slučajni vektori $(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \ldots, X_{t_n+h})$ i $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ jednako distribuirani, tj.

$$(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \ldots, X_{t_n+h}) \stackrel{d}{=} (X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}).$$

Definicija 2.10. Slučajni proces $X = (X_t,\ t \in T)$ je slabo stacionaran ili stacionaran u širem smislu ako vrijedi:

1) $E(X_t^2) < \infty$, za sve $t \in T$,

2) $E(X_t) = c$, $c \in \mathbb{R}$, za sve $t \in T$,

3) $\mathrm{Cov}(X_{t_1}, X_{t_2}) = \mathrm{Cov}(X_{t_1+h}, X_{t_2+h})$, za svaki $h > 0$ i sve $t_1, t_2 \in T$ takve da su $t_1 + h, t_2 + h \in T$.

Definicija 2.11. Kažemo da je slučajni proces $X = (X_t,\ t \in T)$ na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ proces sa stacionarnim i nezavisnim prirastima ako vrijedi sljedeće:

1) za svaki izbor $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$ takvih da je $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ slučajne varijable

$$X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

su nezavisne; ako postoji $t_0 = \min T$, tada su slučajne varijable

$$X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

nezavisne,

2) za sve $s, t \in T$ takve da je $s < t$ i sve h takve da je $t + h, s + h \in T$ je

$$X_t - X_s \stackrel{d}{=} X_{t+h} - X_{s+h},$$

tj. prirasti procesa na jednako dugim vremenskim intervalima su jednako distribuirani.

Napomena 2.4. Prvo svojstvo iz prethodne definicije govori o nezavisnosti prirasta, dok drugo svojstvo govori o njihovoj stacionarnosti.

Definicija 2.12. Slučajni proces $(B_t,\ t \geq 0)$ na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je standardno Brownovo gibanje ukoliko vrijedi:

1) trajektorije $t \mapsto B_t(\omega)$ su g.s. neprekidne funkcije s $[0, \infty\rangle$ u $\mathbb{R}$,

2) $B_0 = 0$,

3) za sve $0 = t_0 < t_1 < \cdots t_m$ prirasti

$$B_{t_1} = B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_m} - B_{t_{m-1}}$$

su nezavisne slučajne varijable,

4) za sve $0 \leq s < t$ je prirast $B_t - B_s$ normalno distribuiran s očekivanjem 0 i varijancom $t - s$.

Brownovo gibanje jedan je od najpoznatijih i najproučavanijih slučajnih procesa, a u nekim se literaturama upotrebljava termin Wienerov proces. Više o Brownovom gibanju i njegovim svojstvima dostupno je u [10]. Definicijom 2.12 opisano je jednodimenzionalno Brownovo gibanje. Ako su $B_1, B_2, \ldots, B_d$ međusobno nezavisna Brownova gibanja, tada je slučajnim procesom $(B_1(t), B_2(t), \ldots, B_d(t))^T$ definirano d-dimenzionalno Brownovo gibanje. Među mnogima za praktične modele poželjnim svojstvima, Brownovo gibanje ima i Markovljevo svojstvo.

Definicija 2.13. Markovljev proces u neprekidnom vremenu je slučajni proces $X = (X_t,\ t \geq 0)$ na vjerojatnosnom prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P)$ koji zadovoljava Markovljevo svojstvo

$$P(X_{t_{n+1}} \in B \mid X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, \ldots, X_{t_n} = x_n) = P(X_{t_{n+1}} \in B \mid X_{t_n} = x_n),$$

za svaki skup B iz Borelove σ-algebre $\mathcal{B}$ na $\mathbb{R}$ te sve vremenske trenutke $0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1}$ i sva stanja $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

2.1 Stohastički integral i stohastičke diferencijalne jednadžbe

U ovom ćemo potpoglavlju dati osnovne informacije o stohastičkom integralu i stohastičkim diferencijalnim jednadžbama (SDJ) koje čine klasu diferencijalnih jednadžbi čije je rješenje slučajni proces kojeg nazivamo difuzija. Modeliranje cijena dionica, modeli slučajnog rasta, epidemiološki modeli te sustavi podvrgnuti toplinskim fluktuacijama samo su neki od brojnih primjera uporabe stohastičkih diferencijalnih jednadžbi u matematici, fizici, biologiji, medicini i ekonomiji. Promotrimo stohastičku diferencijalnu jednadžbu

$$dX_t = b(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dB_t, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{1}$$

gdje je $B = (B_t,\ 0 \leq t \leq T)$ Brownovo gibanje koje nazivamo pogonskim ili vodećim procesom. S obzirom da trajektorije Brownovog gibanja nisu diferencijabilne, jednadžbu (1) promatramo kao diferencijalni zapis stohastičke integralne jednadžbe

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{2}$$

pri čemu je X_0 početni uvjet. Napomenimo kako je prvi integral u izrazu (2) Riemannov, dok je drugi Itôv stohastički integral, pa se jednadžba (2) u nekim literaturama naziva i Itôva stohastička diferencijalna jednadžba. Prije nego što navedemo neke karakteristike rješenja SDJ (2), definirat ćemo Itôv stohastički integral te navesti važna svojstva koja on zadovoljava. U nastavku prvo navodimo definiciju Itôvog integrala za jednostavne integrande, koju ćemo potom proširiti i za opće integrande. Kako bismo definirali Itôv integral za jednostavne integrande, najprije navodimo definiciju jednostavnog slučajnog procesa.

Definicija 2.14. Za slučajni proces $C = (C_t,\ t \in [0,T])$ na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ kažemo da je jednostavan ako vrijedi:

1) postoji subdivizija $\tau = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T$ segmenta $[0,T]$ i konačan niz $Z = (Z_i,\ i = 1,2,\ldots,n)$ kvadratno integrabilnih slučajnih varijabli na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ takvih da je

$$C_t = \begin{cases} Z_n & ,\ t = T \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{I}_{[t_{i-1},t_i\rangle}(t) Z_i\ , & t \in [t_{i-1}, t_i\rangle \end{cases} = \begin{cases} Z_n\ , & t = T \\ Z_i\ , & t \in [t_{i-1}, t_i\rangle \end{cases},$$

2) Z je adaptiran na filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_{t_{i-1}},\ i = 1,2,\ldots,n)$, gdje je $\mathcal{F}_{t_{i-1}} = \sigma(B_s,\ 0 \le s \le t_{i-1})$ za Brownovo gibanje $(B_t,\ t \ge 0)$ na istom vjerojatnosnom prostoru.

Dakle, trajektorije jednostavnog slučajnog procesa su jednostavne, tj. konstantne funkcije na intervalima $[t_{i-1}, t_i\rangle$, $i = 1,2,\ldots,n$, pa možemo definirati Itôv stohastički integral za takve procese.

Definicija 2.15. Itôv stohastički integral jednostavnog slučajnog procesa $C = (C_t,\ t \in [0,T])$ na segmentu $[0,T]$ definiran je izrazom

$$I_T = \int_0^t C_s\, dB_s = \sum_{i=1}^{n} Z_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}),$$

dok je na segmentu $[0,t]$ za $t \in [t_{k-1}, t_k\rangle$ definiran izrazom

$$I_t = \int_0^t C_s\, dB_s = \sum_{i=1}^{k-1} Z_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + Z_k (B_t - B_{t_{k-1}}),$$

uz konvenciju $\displaystyle\sum_{i=1}^{0} Z_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) = 0$.

Sljedeća napomena sadrži važna svojstva prethodno definiranih integrala. Više informacija dostupno je u [4], [7] i [9], gdje se mogu pronaći i dokazi tvrdnji.

Napomena 2.5. Za Itôv stohastički integral iz Definicije 2.15 vrijede sljedeće tvrdnje:

1) Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ te $C^{(1)} = (C_t^{(1)},\ t \in [0,T])$ i $C^{(2)} = (C_t^{(2)},\ t \in [0,T])$ dva jednostavna slučajna procesa. Tada vrijedi svojstvo linearnosti:

$$\int_0^t (aC_s^{(1)} + bC_s^{(2)})\, dB_s = a \int_0^t C_s^{(1)}\, dB_s + b \int_0^t C_s^{(2)}\, dB_s.$$

2) Očekivanje Itôvog integrala je 0, tj. za svaki $t \in [0, T]$ vrijedi $E(I_t) = 0$.

3) Itôv stohastički integral zadovoljava svojstvo izometrije, tj. vrijedi[1]

$$E\left[\left(\int_0^t C_s\, dB_s\right)^2\right] = \int_0^t E(C_s^2)\, ds, \quad t \in [0, T].$$

Budući da je očekivanje Itôvog integrala jednako nuli, ovim je izrazom definirana varijanca promatranog integrala.

4) Slučajni proces $(I_t,\ 0 \le t \le T)$ je martingal s obzirom na prirodnu filtraciju Brownovog gibanja na segmentu $[0, T]$, tj. filtraciju $\mathbb{F}^B = (\mathcal{F}_t^B,\ 0 \le t \le T)$, gdje je $\mathcal{F}_t^B = \sigma(B_s,\ 0 \le s \le t)$.

Do definicije Itôvog integrala za opće integrande dolazimo proširenjem prethodno navedenih rezultata. Naime, na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ opskrbljenom prirodnom filtracijom $\mathbb{F}_t^B = (\mathcal{F}_t^B,\ t \ge 0)$, gdje je $\mathcal{F}_t^B = \sigma(B_s,\ 0 \le s \le t)$, aproksimiramo opće integrande nizom jednostavnih slučajnih procesa koji će (u određenom smislu) konvergirati prema slučajnom procesu čiju trajektoriju želimo integrirati u odnosu na trajektoriju Brownovog gibanja $(B_t,\ t \ge 0)$. Ukoliko s $C = (C_t,\ 0 \le t \le T)$ označimo slučajni proces koji je $\mathbb{F}^B$-adaptiran i za koji vrijedi

$$\int_0^T E(C_t^2)\, dt < \infty, \tag{3}$$

tada postoji niz jednostavnih slučajnih procesa $C^{(n)} = (C_t^{(n)},\ n \in \mathbb{N})$, pri čemu je $C^{(n)} = (C_t^{(n)},\ 0 \le t \le T)$, takvih da niz jednostavnih slučajnih procesa $C^{(n)}$ u srednje-kvadratnom smislu konvergira prema procesu C, odnosno vrijedi

$$\int_0^T E\left[\left(C_t - C_t^{(n)}\right)^2\right] dt \to 0, \quad n \to \infty.$$

S obzirom da je $C^{(n)}$ jednostavan proces za svaki prirodan broj n, uz pretpostavke analognima iz Definicije 2.14 dobivamo Itôv integral oblika

$$\begin{aligned} I_t(C^{(n)}) &= \int_0^t C_s^{(n)}\, dB_s \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} Z_i^{(n)}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + Z_k^{(n)}(B_t - B_{t_{k-1}}), \end{aligned}$$

za $t \in [t_{k-1}, t_k\rangle$. Iz prethodnih razmatranja lako se može zaključiti da, ukoliko promatramo niz Itôvih integrala $\left(I_t\left(C^{(n)}\right),\ n \in \mathbb{N}\right)$, vrijedi

$$\int_0^T E\left[\left(C_t^{(n)} - C_t^{(m)}\right)^2\right] dt \to 0, \quad n, m \to \infty,$$

[1]Navedeno svojstvo u literaturi je poznato kao Itôva izometrija.

pa, prema svojstvima iz Napomene 2.5, imamo:

$$\int_0^t E\left[\left(C_s^{(n)} - C_s^{(m)}\right)^2\right] ds = E\left[\left(\int_0^t (C_s^{(n)} - C_s^{(m)})\, dB_s\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left(\int_0^t C_s^{(n)}\, dB_s - \int_0^t C_s^{(m)}\, dB_s\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left(I_t\left(C^{(n)}\right) - I_t\left(C^{(m)}\right)\right)^2\right],$$

što za $0 \leq t \leq T$ teži u nulu kada n i m teže u beskonačnost. Dakle, niz Itôvih integrala jednostavnih procesa $C^{(n)}$ konvergira prema procesu C, pa je izrazom

$$I_t = \lim_{n\to\infty} \int_0^t C_s^{(n)}\, dB_s = \int_0^t C_s\, dB_s, \quad 0 \leq t \leq T,$$

definiran Itôv stohastički integral slučajnog procesa C koji nasljeđuje svojstva Itôvog integrala za jednostavne procese.

Napomena 2.6. Primijetimo kako je postojanje limesa posljedica je činjenice da je niz Itôvih integrala jednostavnih procesa Cauchyjev niz u prostoru kvadratno-integrabilnih slučajnih varijabli $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Teorem 2.1. *Neka je $T > 0$ i $C = (C_t\ 0 \leq t \leq T)$ $\mathbb{F}^B$-adaptiran slučajni proces koji zadovoljava (3). Tada za Itôv stohastički integral slučajnog procesa C vrijede sljedeća svojstva:*

1) *funkcija $t \mapsto I_t(\omega)$, za svaki $\omega \in \Omega$, je gotovo sigurno neprekidna na segmentu $[0, T]$,*

2) *I_t je $\mathcal{F}_t^B$-izmjeriva slučajna varijabla, za svaki $t \in [0, T]$,*

3) *za proizvoljne $a, b \in \mathbb{R}$ i Itôve integrale $I_t^{(1)} = \int_0^t C_s^{(1)}\, dB_s$, $I_t^{(2)} = \int_0^t C_s^{(2)}\, dB_s$ $\mathbb{F}^B$-adaptiranih procesa $C^{(1)} = \left(C_t^{(1)},\ 0 \leq t \leq T\right)$ i $C^{(2)} = \left(C_t^{(2)},\ 0 \leq t \leq T\right)$ za koje vrijedi (3) vrijedi svojstvo linearnosti, tj.*

$$aI_t^{(1)} + bI_t^{(2)} = \int_0^t \left(aC_s^{(1)} + bC_s^{(2)}\right) dB_s \quad 0 \leq t \leq T,$$

4) *slučajni proces $(I_t,\ 0 \leq t \leq T)$ je $\mathbb{F}^B$-martingal s očekivanjem nula, za svaki $t \in [0, T]$,*

5) *vrijedi svojstvo izometrije, tj.*

$$E\left(I_t^2\right) = \int_0^t E\left(C_s^2\right) ds.$$

Itôvi integrali pojavljuju se i u različitim verzijama tzv. Itôvih formula koje su nastale kao stohastički analagon klasične formule za derivaciju kompozicije dviju funkcija. Najjednostavnija verzija Itôve formule jest ona za Brownovo gibanje, a dana je sljedećom tvrdnjom:

Teorem 2.2. *Neka je f dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija. Tada vrijedi:*

$$f(B_t) - f(B_s) = \int_s^t = f'(B_x)\, dB_x + \frac{1}{2}\int_s^t f''(B_x)\, dx, \quad s < t,$$

pri čemu je prvi integral Itôv stohastički integral, a drugi Riemannov integral.

Budući da u određenim slučajevima jednostavna verzija Itôve formule pokazuje određene nedostatke, odnosno nije dovoljno općenita, ponekad se koristi i nešto složenija verzija:

Teorem 2.3. *Neka je $f(t,x)$ funkcija dviju varijabli koja ima neprekidne derivacije drugog reda po varijablama t i x. Tada vrijedi:*

$$f(t, B_t) - f(s, B_s) = \int_s^t \left(f_t(x, B_x) + \frac{1}{2} f_{xx}(x, B_x) \right) dx + \int_s^t f_x(x, B_x)\, dB_x, \quad s < t,$$

gdje su f_t i f_x oznake za prvu derivaciju funkcije f po varijabli t, odnosno x, a f_{xx} oznaka za drugu derivaciju funkcije f po varijabli x.

Navedimo još i oblik Itôve formule za Itôv proces.

Definicija 2.16. Slučajan proces $(X_t,\ t \geq 0)$ naziva se Itôv proces ako vrijedi

$$X_t = X_0 + \int_0^t A_s^{(1)}\, ds + \int_0^t A_s^{(2)}\, dB_s,$$

pri čemu su procesi $(A_t^{(1)},\ t \geq 0)$ i $(A_t^{(2)},\ t \geq 0)$ $\mathbb{F}^B$-adaptirani te su integrali u gornjem zapisu dobro definirani.

Teorem 2.4. *Neka je $(X_t,\ t \geq 0)$ Itôv proces i neka je $f(t,x)$ funkcija dviju varijabli s neprekidnim derivacijama drugog reda. Tada vrijedi:*

$$f(t, X_t) - f(s, X_s) = \int_s^t \left(f_t(y, X_y) + A_y^{(1)} f_x(y, X_y) + \frac{1}{2} \left(A_y^{(2)}\right)^2 f_{xx}(y, X_y) \right) dy$$

$$+ \int_s^t A_y^{(2)} f_x(y, X_y)\, dB_y, \quad s < t,$$

pri čemu su oznake za derivacije iste kao u Teoremu 2.3.

2.2 Difuzije

Difuzijski proces ili difuzija na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je Markovljev proces $X = (X_t,\ t \geq 0)$ u neprekidnom vremenu s neprebrojivim skupom stanja S i gotovo sigurno neprekidnim trajektorijama. Skup stanja jednodimenzionalne difuzije je interval $\langle l, r \rangle$, pri čemu je $l \geq -\infty$, a $r \leq \infty$. Za difuziju ćemo reći da je regularna ukoliko je, startavši iz bilo koje točke interiora skupa S, bilo koja druga točka iz interiora toga skupa dostižna s pozitivnom vjerojatnošću. Prirasti svake difuzije X koji premašuju dovoljno mali $\varepsilon > 0$ malo su vjerojatni na dovoljno kratkim vremenskim intervalima, tj. vrijedi

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} P(|X_{t+h} - X_t| > \varepsilon \mid X_t = x) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0, \, \forall x \in S, \tag{4}$$

što osigurava g.s. neprekidnost trajektorija difuzije. Osim (4), za difuzije vrijedi i sljedeće:

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} E(X_{t+h} - X_t \mid X_t = x) = b(t, x), \tag{5}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} E((X_{t+h} - X_t)^2 \mid X_t = x) = \sigma^2(t, x), \tag{6}$$

za $x \in S$ i $t \geq 0$. Funkcija definirana izrazom (5) zove se infinitezimalno očekivanje ili drift parametar, dok je funkcija definirana s (6) infinitezimalna varijanca ili parametar difuzije. Prema tome, za priraste difuzije X stohastičke diferencijalne jednadžbe (1) možemo reći da je prirast $dX_t = X_{t+dt} - X_t$ na intervalu duljine dt uzrokovan vremenskim prirastom s koeficijentom $b(t, X_t)$ i prirastom Brownovog gibanja $dB_t = B_{t+dt} - B_t$ s koeficijentom $\sigma(t, X_t)$.

Sada možemo dati karakteristike rješenja Itôvih stohastičkih diferencijalnih jednadžbi oblika (2).

Definicija 2.17. Jako rješenje SDJ (2) je slučajni proces $X = (X_t, \ 0 \leq t \leq T)$ za koji vrijedi:

1) Riemannov i Itôv stohastički integral u (2) su dobro definirani,

2) X je adaptiran na prirodnu filtraciju Brownovog gibanja B, tj. u trenutku t ovisi o slučajnim varijablama B_s, za $0 \leq s \leq t$,

3) X je transformacija infinitezimalnih parametara koji su neprekidne funkcije prostorne varijable x.

Teorem 2.5. *Neka je X_0 nezavisno od Brownovog gibanja $B = (B_t, \ t \geq 0)$, $E(X_0)^2 < \infty$ te neka su za sve $t \in [0, T]$ i $x, y \in \mathbb{R}$ funkcije $b(t, x)$ i $\sigma(t, x)$ neprekidne i zadovoljavaju Lipschitzov uvjet po prostornoj varijabli*

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K_1 |x - y|, \quad K_1 > 0,$$

i uvjet linearnog rasta

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq K_2(1 + |x|), \quad K_2 > 0.$$

Tada SDJ (2) ima jedinstveno jako rješenje.

Teorem 2.5 daje dovoljne uvjete za egzistenciju i jedinstvenost jakog rješenja SDJ (2) i možemo zaključiti kako se ono temelji na trajektorijama pogonskog procesa. Za razliku od jakog, postoji i slabo rješenje SDJ koje je bazirano je na distribucijskim svojstvima difuzije.

Više informacija o jakom i slabom rješenju difuzije može se pronaći primjerice u [7, str. 33].

Difuzije mogu zadovoljavati i svojstvo ergodičnosti. Naime, za sve omeđene izmjerive funkcije $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, difuzija X s funkcijom gustoće stacionarne distribucije $p(x)$ je ergodična ukoliko je

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(X_t)\, dt = \int_l^r g(x)p(x)\, dx = E\left(g(X_t)\right) \quad g.s.$$

3 Osnovno o procjeniteljskim funkcijama

Procjena parametara u statistici može biti izuzetno problematična, posebice kada funkcija vjerodostojnosti nije eksplicitno poznata. U nekim je situacijama parametar gotovo nemoguće procijeniti klasičnom metodom momenata, metodom najmanjih kvadrata ili metodom maksimalne vjerodostojnosti pa se u određenim slučajevima do traženog rješenja može doći na vrlo elegantan način uporabom procjeniteljskih funkcija koje su primjenjive na brojne statističke modele. Začetkom moderne teorije optimalnih procjeniteljskih funkcija smatraju se radovi statističara Godambea[2], Durbina[3] i Fishera[4], iako pojava prvih procjeniteljskih funkcija datira još od Pearsonove[5] metode momenata iz 1894. godine. Procjeniteljske funkcije pokazale su se izrazito korisnima za diskretizirane parametarske difuzijske modele, a konstruiraju se kombiniranjem odnosa između određenog opažanja te jednog ili više prethodnih opažanja koja sadrže informacije o parametru. Prema tome, u nastavku ćemo procjeniteljsku funkciju definirati kao p-dimenzionalnu funkciju p-dimenzionalnog parametra θ i opažanja $X_0, X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}$ u diskretnom vremenu te ćemo ju označavati s $G_n(\theta; X_0, X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ ili, kraće, $G_n(\theta)$. Procjena parametara uporabom procjeniteljskih funkcija svodi se na rješavanje (procjeniteljske) jednadžbe oblika

$$G_n(\theta) = 0. \tag{7}$$

Dakle, procjeniteljska funkcija poprima vrijednosti u $\mathbb{R}^p$, a rješavanjem jednadžbe (7) dobivamo G_n-procjenitelja. U nastavku ćemo razmatrati samo one procjeniteljske funkcije koje zadovoljavaju svojstvo nepristranosti, odnosno za koje je

$$E\left(G_n(\theta)\right) = 0. \tag{8}$$

Drugim riječima, umjesto nepristranog procjenitelja za parametar θ promatrat ćemo nepristrane procjeniteljske funkcije za koje je pokazano je da pod određenim pretpostavkama impliciraju konzistentnost samog procjenitelja, no ne nužno i njegovu nepristranost.

Označimo s $\mathcal{G}_n$ klasu svih nepristranih procjeniteljskih funkcija. Prirodno je zapitati se koji uvjeti moraju biti zadovoljeni da bi se za neku procjeniteljsku funkciju iz $\mathcal{G}_n$ moglo reći da je "bolja" od ostalih funkcija iz iste klase. Kako bismo došli do odgovora na to pitanje, prvo ćemo izvesti odgovarajuće rezultate za jednodimenzionalan slučaj ($p = 1$), a zatim ćemo ih poopćiti za slučaj višedimenzionalnog parametra θ.

Prema [1], za procjeniteljsku funkciju $G_n(\theta)$ kažemo da je regularna ako vrijede sljedeći uvjeti:

1) $E(G_n(\theta)) = \displaystyle\int G_n(\theta) f(\boldsymbol{x}; \theta)\, d\boldsymbol{x} = 0,$

[2]Vidyadhar Prabhakar Godambe (1926. - 2016.) - indijski statističar
[3]James Durbin (1923. - 2012.) - britanski statističar
[4]Ronald Aylmer Fisher (1890. - 1962.) - britanski matematičar
[5]Karl Pearson (1857. - 1936.) - engleski matematičar

2) $\dfrac{dG_n(\theta)}{d\theta}$ postoji za sve $\theta \in \Theta$,

3) $\displaystyle\int G_n(\theta) f(\boldsymbol{x};\theta)\, d\boldsymbol{x}$ je diferencijabilno pod znakom integrala, tj. dozvoljena je zamjena redoslijeda integriranja i diferenciranja,

4) $E\left(\dfrac{dG_n(\theta)}{d\theta}\right)^2 > 0$, za sve $\theta \in \Theta$,

5) $Var(G_n(\theta)) = E(G_n(\theta)^2) < \infty$.

Nadalje, neka je $G_n(\theta)$ diferencijabilna s obzirom na parametar θ. Općenito, izrazom

$$S_{G_n}(\theta) = E_\theta(\partial_{\theta^T} G_n(\theta)) \tag{9}$$

definirana je funkcija osjetljivosti (*eng. sensitivity function*) funkcije G_n. Dobrom procjeniteljskom funkcijom smatra se ona koja postiže velike apsolutne vrijednosti osjetljivosti jer je tada, pod pretpostavkom (8), rješenje jednadžbe (7) vrlo blisko stvarnoj vrijednosti parametra. Ukoliko su varijance procjeniteljske funkcije $G_n(\theta)$ i skor funkcije $U_n(\theta)$ konačne i vrijede uvjeti regularnosti, deriviranjem izraza (8) po parametru θ dobivamo

$$\int \frac{dG_n(\theta)}{d\theta} f(\boldsymbol{x};\theta)\, d\boldsymbol{x} + \int G_n(\theta) \frac{d\ln f(\boldsymbol{x};\theta)}{d\theta} f(\boldsymbol{x};\theta)\, d\boldsymbol{x} = 0,$$

odnosno

$$E\left(\frac{dG_n(\theta)}{d\theta}\right) = -Cov\left(G_n(\theta), U_n(\theta)\right), \tag{10}$$

pa tražimo onu procjeniteljsku funkciju koja maksimizira

$$K_{G_n}(\theta) = \frac{S_{G_n}(\theta)^2}{Var_\theta(G_n(\theta))} = \frac{S_{G_n}(\theta)^2}{E_\theta(G_n(\theta)^2)}. \tag{11}$$

Na ovaj je način definirana Godambeova informacija za koju se lako vidi da je prirodna generalizacija Fisherove informacije. Sada možemo definirati procjeniteljsku funkciju optimalnu u Godambeovom smislu.

Definicija 3.1. Procjeniteljska funkcija $G_n^* \in \mathcal{G}_n$ je optimalna u Godambeovom smislu (ili Godambe-optimalna) ukoliko je

$$K_{G_n^*}(\theta) \geq K_{G_n}(\theta),$$

za sve $\theta \in \Theta$ i sve $G_n \in \mathcal{G}_n$.

Uočimo kako se velike vrijednosti Godambeove informacije postižu za što veće vrijednosti funkcije osjetljivosti i što manje vrijednosti varijance funkcije G_n. Sljedećim rezultatom dana je gornja granica za (11).

Teorem 3.1. *Za sve $G_n \in \mathcal{G}_n$ vrijedi*

$$Var_\theta(U_n(\theta)) \geq K_{G_n}(\theta),$$

pri čemu se jednakost postiže za procjeniteljsku funkciju $G_n^*(\theta) = U_n(\theta)$.

Dokaz. Tvrdnja direktno slijedi uvrštavanjem (10) u

$$(Cov\left(G_n(\theta), U_n(\theta)\right))^2 \leq Var(G_n(\theta)) \cdot Var_\theta\left(U_n(\theta)\right).$$

■

U slučaju višedimenzionalnog parametra θ, funkcija osjetljivost je $p \times p$ matrica definirana kao u (9), dok je Godambeova informacija $p \times p$ matrica

$$K_{G_n}(\theta) = S_{G_n}(\theta)^T E_\theta\left(G_n(\theta)G_n(\theta)^T\right)^{-1} S_{G_n}(\theta). \tag{12}$$

Jedan od alternativnih načina odabira optimalne procjeniteljske funkcije predložio je Heyde[6] 1988. godine koristeći standardiziranu verziju $G_n(\theta)$:

$$G_n^{(s)}(\theta) = -S_{G_n}(\theta)^T E_\theta\left(G_n(\theta)G_n(\theta)^T\right)^{-1} G_n(\theta).$$

Teorem 3.2. *Ako $G_n^* \in \mathcal{G}_n$ zadovoljava jednadžbu*

$$S_{G_n}(\theta)^{-1} E_\theta\left(G_n(\theta)G_n^*(\theta)^T\right) = S_{G_n^*}(\theta)^{-1} E_\theta\left(G_n^*(\theta)G_n^*(\theta)^T\right), \tag{13}$$

za sve $\theta \in \Theta$ i sve $G_n \in \mathcal{G}_n$, tada je G_n^* Godambe-optimalna u $\mathcal{G}_n$. Ako je dodatno $\mathcal{G}_n$ zatvorena s obzirom na zbrajanje, onda svaka Godambe-optimalna procjeniteljska funkcija G_n^* zadovoljava (13).

Standardizirani oblik procjeniteljske funkcije ponekad je primjenjiviji od osnovnog zapisa jer funkcija $G_n^{(s)}$ pokazuje svojstva sličnija skor funkciji. Više informacija o procjeniteljskim funkcijama može se pronaći u [1] i [11], gdje su navedeni brojni teorijski rezultati kao i neke primjene u ekonometriji. S obzirom da je skor funkcija primjer procjeniteljske funkcije koja zadovoljava (7), a ujedno je i martingal, u idućem ćemo poglavlju reći nešto više o specijalnoj klasi procjeniteljskih funkcija - tzv. martingalnim procjeniteljskim funkcijama, no, prije same definicije, navedimo nekoliko rezultata vezanih za asimptotsko ponašanje procjeniteljskih funkcija.

3.1 Asimptotska razmatranja

U ovom ćemo potpoglavlju navesti nekoliko rezultata vezanih za asimptotsko ponašanje procjeniteljskih funkcija u slučaju kada n teži u beskonačnost. S P_θ označavat ćemo vjerojatnosnu mjeru s obzirom na parametar $\theta \in \Theta$, dok će oznaka P biti za stvarnu vjerojatnosnu mjeru. Ukoliko statistički model sadrži stvarni model, odnosno prava vrijednost parametra (označimo ju s θ_0) je unutar skupa parametra Θ, tada su te dvije mjere ekvivalentne. Sljedećom definicijom formalno je opisan G_n-procjenitelj.

Definicija 3.2. Neka je $\delta \notin \Theta$ vrijednost za koju je $\Theta_\delta = \Theta \cup \{\delta\}$.

1) Za dani $n \in \mathbb{N}$ domena G_n-procjenitelja je skup A_n svih opažanja $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ takvih da postoji barem jedan $\theta \in \Theta$ za koji je $G_n(\theta) = 0$.

[6] Cristopher Charles Heyde (1939. - 2008.) - australski statističar

2) G_n-procjenitelj, u oznaci $\hat{\theta}_n(x)$, je bilo koja funkcija podataka s vrijednostima u Θ_δ takva da za gotovo sva opažanja vrijedi jedan od sljedećih uvjeta:

   (i) $\hat{\theta}_n(x) \in \Theta$ i $G_n(\hat{\theta}_n(x), x) = 0$, za $x \in A_n$,

   (ii) $\hat{\theta}_n(x) = \delta$, za $x \notin A_n$.

Teorem 3.3. *Neka postoji parametar $\bar{\theta}$ iz interiora skupa parametara Θ, povezana okolina M od $\bar{\theta}$ te (proizvoljna) funkcija W u M koja poprima vrijednosti u skupu matrica dimenzije $p \times p$. Nadalje, neka su zadovoljeni sljedeći uvjeti:*

1) $G_n(\bar{\theta}) \xrightarrow{P} 0$, za $n \to \infty$,

2) $G_n(\theta)$ je neprekidno diferencijabilna na M za svaki n i vrijedi

$$\sup_{\theta \in M} \| \partial_{\theta^T} G_n(\theta) - W(\theta) \| \xrightarrow{P} 0, \tag{14}$$

3) s vjerojatnošću jedan u odnosu na vjerojatnosnu mjeru P, matrica $W(\bar{\theta})$ nije singularna.

Tada postoji niz $(\hat{\theta}_n)$ G_n-procjenitelja koji je $\bar{\theta}$-konzistentan (tj. konvergira prema $\bar{\theta}$ po vjerojatnosti). Osim toga, za svaki drugi $\bar{\theta}$-konzistentan niz $(\hat{\theta}'_n)$ G_n-procjenitelja, $P(\hat{\theta}_n \neq \hat{\theta}'_n) \to 0$ kada $n \to \infty$.

Prethodnim teoremom osigurano je da za dovoljno veliki $n \in \mathbb{N}$ postoji rješenje jednadžbe (7) koje konvergira prema parametru $\bar{\theta}$. Također, uvjet (14) implicira postojanje podniza $(n_k,\ k \in \mathbb{N})$ takvog da s vjerojatnošću jedan $\partial_{\theta^T} G_{n_k}(\theta)$ uniformno konvergira prema $W(\theta)$. Prema tome, W je neprekidna (do na skup mjere nula s obzirom na P) te slijedi da postoji neprekidno diferencijabilna funkcija G za koju je $\partial_{\theta^T} G(\theta) = W(\theta)$ za sve $\theta \in M$ i $G(\bar{\theta}) = 0$. Ako je M omeđen skup, tada iz (14) slijedi

$$\sup_{\theta \in M} |G_n(\theta) - G(\theta)| \xrightarrow{P} 0.$$

Prema tome, za dovoljno veliki n možemo pronaći funkciju $G_n(\theta)$ blisku $G(\theta)$ čija će nultočka biti bliska $\bar{\theta}$. Dodatne informacije dostupne su u [11].

Promotrimo sada situaciju kada su udaljenosti među opažanjima ekvidistantne pa ih jednostavno možemo indeksirati s $X_1, X_2, \dots, X_n$. Neka je G_n procjeniteljska funkcija u općenitom zapisu, tj.

$$G_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=r}^{n} g(X_{i-r+1}, \dots, X_i; \theta), \quad r < n, \tag{15}$$

gdje je g funkcija koja poprima vrijednosti u $\mathbb{R}^p$ i vrijedi $(x_1, x_2, \dots, x_r) \mapsto g(x_1, x_2, \dots, x_r; \theta)$. Uz pretpostavku da je slučajni proces $(X_i,\ i = 1, 2, \dots, n)$ stacionaran sa skupom stanja $D \subseteq \mathbb{R}^d$, označimo s Q zajedničku distribuciju konačnog niza slučajnih varijabli $(X_1, X_2, \dots, X_r)$ te s $Q(f)$ pripadno očekivanje s obzirom na funkciju $f\colon D^r \to \mathbb{R}$. Rješavanjem jednadžbe (7) dobit ćemo, ukoliko takav postoji, G_n-procjenitelja $\hat{\theta}_n$ iz Definicije 3.2. Kako bismo pobliže razmotrili asimptotska svojstva dobivenog procjenitelja, pretpostavljamo da vrijede zakon velikih brojeva i centralni granični teorem, odnosno

$$\frac{1}{n}\sum_{i=r}^{n} f(X_{i-r+1},\ldots,X_i) \xrightarrow{P} Q(f), \quad n\to\infty, \tag{16}$$

za svaku funkciju f za koju je $Q(|f|)<\infty$, te

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=r}^{n} g(X_{i-r+1},\ldots,X_i;\theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,V(\theta)), \tag{17}$$

za svaki θ za koji je $Q(g(\theta))=0$. Varijanca $V(\theta)$ iz (17) je pozitivno definitna matrica reda $p\times p$.

Prilikom procjene parametara, važno je obratiti pozornost na njihovu egzistenciju i jedinstvenost. Naime, može se dogoditi da rješenje procjeniteljske jednadžbe ne postoji. Osim toga, ukoliko ono postoji, nije nužno i jedinstveno. Sljedećom napomenom osigurana je egzistencija G_n- procjenitelja.

Napomena 3.1. Neka je $\bar{\theta}$ parametar iz interiora parametarskog skupa Θ i N okolina od $\bar{\theta}$ u Θ tako da vrijedi:

1) funkcija $g(\theta)\colon (x_1,x_2,\ldots,x_r)\mapsto g(x_1,x_2,\ldots,x_r;\theta)$ je integrabilna s obzirom na Q, za svaki $\theta\in N$, i vrijedi
$$Q\left(g(\bar{\theta})\right)=0,$$
2) funkcija $\theta\mapsto g(x_1,x_2,\ldots,x_r;\theta)$ je neprekidno diferencijabilna na N, za sve $(x_1,x_2,\ldots,x_r)\in D^r$,
3) funkcija $(x_1,x_2,\ldots,x_r)\mapsto \|\partial_{\theta^T} g(x_1,x_2,\ldots,x_r;\theta)\|$ je omeđena funkcijom koja je integrabilna s obzirom na Q, za svaki $\theta\in N$,
4) $p\times p$ matrica
$$W=Q\left(\partial_{\theta^T} g(\bar{\theta})\right) \tag{18}$$
je invertibilna.

Kako bismo mogli navesti tvrdnju koja će osigurati jedinstvenost G_n-procjenitelja, prvo ćemo definirati pojam lokalno omeđene integrabilnosti (*eng. locally dominated integrability*).

Definicija 3.3. Funkcija $f\colon D^r\times\Theta\to\mathbb{R}^q$ je lokalno omeđeno integrabilna s obzirom na Q ako za svaki $\theta'\in\Theta$ postoji okolina $U_{\theta'}$ od θ' i nenegativna Q-integrabilna funkcija $h_{\theta'}\colon D^r\to\mathbb{R}$ takva da je
$$|f(x_1,x_2,\ldots,x_r;\theta)|\le h_{\theta'}(x_1,x_2,\ldots,x_r),$$
za sve $(x_1,x_2,\ldots,x_r;\theta)\in D^r\times U_{\theta'}$.

Sada pomoću sljedeće leme možemo iskazati jedinstvenost G_n-procjenitelja. Dokazi tvrdnji dostupni su u [11].

Lema 3.4. *Neka je K kompaktan podskup parametarskog skupa Θ te $f\colon D^r \times K \to \mathbb{R}^q$ koja je neprekidna za sve $(x_1, x_2, \dots, x_r) \in D^r$. Nadalje, neka postoji Q-integrabilna funkcija $h\colon D^r \to \mathbb{R}$ takva da je $\|f(x_1, x_2, \dots, x_r; \theta)\| \leq h(x_1, x_2, \dots, x_r)$, za svaki $\theta \in K$. Tada je preslikavanje $\theta \mapsto Q(f(\theta))$ neprekidno i*

$$\sup_{\theta \in K} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=r}^{n} f(X_{i-r+1}, \dots, X_i; \theta) - Q(f(\theta)) \right\| \xrightarrow{P} 0.$$

Teorem 3.5. *Neka su zadovoljeni uvjeti iz Napomene 3.1 i neka vrijedi (17). Tada postoji $\bar{\theta}$-konzistentan G_n-procjenitelj $\hat{\theta}_n$ takav da*

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}_p \left(0, W^{-1} V W^{T-1}\right),$$

u odnosu na stvarnu vjerojatnosnu mjeru P, gdje je θ_0 stvarna vrijednost parametra, a $V = V(\bar{\theta})$. Osim toga, ukoliko je funkcija $g(x_1, x_2, \dots, x_r; \theta)$ lokalno omeđeno integrabilna s obzirom na Q i

$$Q(g(\theta)) \neq 0, \tag{19}$$

za svaki $\theta \neq \bar{\theta}$, tada je $\hat{\theta}_n$ jedinstven G_n-procjenitelj na svakom omeđenom podskupu od Θ koji sadrži $\bar{\theta}$ s vjerojatnošću jedan kada $n \to \infty$.

Iduće poglavlje posvećeno je martingalnim procjeniteljskim funkcijama, za koje ćemo dati neke osnovne informacije, komentirati optimalnost i asimptotsku normalnost te napraviti analizu vrijednosti dobivenih simulacijama.

4 Martingalne procjeniteljske funkcije

Neka su $X_0, X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$ opažanja $d-$dimenzionalne difuzije koja je rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe

$$dX_t = b(X_t; \theta)\, dt + \sigma(X_t; \theta)\, dB_t, \tag{20}$$

gdje je B d-dimenzionalno Brownovo gibanje, b drift parametar, a σ $d \times d$-matrica parametra difuzije koja ovisi o $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^d$. Osim toga, označimo s D skup stanja te pretpostavimo da jednadžba (20) ima jedinstveno slabo rješenje. Nadalje, neka je gustoća prijelazne distribucije dana s $y \mapsto p(\Delta, x, y; \theta)$ s obzirom na Lebesgueovu mjeru na skupu D i vrijedi $p(\Delta, x, y; \theta) > 0$, za svaki $y \in D$. Oznaka Δ odnosi se na vrijeme promatranog opažanja. Prijelazna funkcija gustoće je zapravo uvjetna funkcija gustoće od $X_{t+\Delta}$ uz uvjet $X_t = x$. U nastavku rada promatrat ćemo procjeniteljske funkcije oblika

$$G_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n} g(\Delta_i, X_{t_{i-1}}, X_{t_i}; \theta), \tag{21}$$

za sve $\Delta > 0$, $x \in D$ i $\theta \in \Theta$, pri čemu je g p-dimenzionalna funkcija za koju vrijedi

$$\int_D g(\Delta, x, y; \theta) p(\Delta, x, y; \theta)\, dy = 0.$$

Slučajni proces $(G_n(\theta),\ n \in \mathbb{N})$ je martingal u odnosu na prirodnu filtraciju $(\mathcal{F}_n,\ n \in \mathbb{N})$, tj. vrijedi

$$E_\theta \left(G_n(\theta) \mid \mathcal{F}_{n-1} \right) = G_{n-1}(\theta), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Svaka procjeniteljska funkcija koja zadovoljava ove pretpostavke naziva se martingalna procjeniteljska funkcija.

4.1 Funkcija vjerodostojnosti i njene aproksimacije

Funkcija vjerodostojnosti (*eng. likelihood function*) za difuziju X temeljena na opažanjima $X_0,\ X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$ uvjetno na X_0 dana je s

$$L_n(\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(t_i - t_{i-1}, X_{t_{i-1}}, X_{t_i}; \theta), \tag{22}$$

gdje je $t_0 = 0$, a preslikavanje $y \mapsto p(s, x, y; \theta)$ označava prijelaznu funkciju gustoće. Tada je skor funkcija vektor parcijalnih derivacija logaritmirane funkcije (22), tj.

$$U_n(\theta) = \partial_\theta \ln L_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \partial_\theta \ln p(\Delta_i, X_{t_{i-1}}, X_{t_i}; \theta),$$

za $\Delta_i = t_i - t_{i-1}$. Ukoliko je funkcija vjerodostojnosti eksplicitno poznata, procjenitelj maksimalne vjerodostojnosti lako se dobije rješavanjem jednadžbe $U_n(\theta) = 0$. Međutim, s obzirom da to nije uvijek moguće, često se primjenjuju određene aproksimacije funkcije vjerodostojnosti. Najjednostavnija aproksimacija je ona temeljena na aproksimaciji prijelazne funkcije gustoće Gaussovom gustoćom. Bez smanjenja općenitosti, izvedimo aproksimaciju za jednodimenzionalni slučaj. Označimo s

$$F(\Delta, x; \theta) = E_\theta(X_\Delta \mid X_0 = x) = \int_l^r yp(\Delta, x, y; \theta)\, dy \tag{23}$$

uvjetno očekivanje s obzirom na $X_0 = x$ te s

$$\phi(\Delta, x; \theta) = Var_\theta(X_\Delta \mid X_0 = x) = \int_l^r [y - F(\Delta, x; \theta)]^2 p(\Delta, x, y; \theta)\, dy \tag{24}$$

uvjetnu varijancu s obzirom na $X_0 = x$. Tada je aproksimacija prijelazne funkcije gustoće jednodimenzionalne difuzije

$$p(\Delta, x, y; \theta) \approx q(\Delta, x, y; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\phi(\Delta, x; \theta)}} \exp\left\{-\frac{(y - F(\Delta, x; \theta))^2}{2\phi(\Delta, x; \theta)}\right\}.$$

Ovime smo dobili izraz analogan izrazu (22) kojeg nazivamo kvazi-funkcija vjerodostojnosti:

$$L_n(\theta) \approx QL_n(\theta) = \prod_{i=1}^n q(t_i - t_{i-1}, X_{t_{i-1}}, X_{t_i}; \theta).$$

Diferenciranjem po parametru θ slijedi

$$\begin{aligned}\partial_\theta \ln QL_n(\theta) = \sum_{i=1}^n \Bigg\{ & \frac{\partial_\theta F(\Delta_i, X_{t_{i-1}}; \theta)}{\phi(\Delta_i, X_{t_{i-1}}; \theta)} [X_{t_i} - F(\Delta_i, X_{t_{i-1}}; \theta)] \\ & + \frac{\partial_\theta \phi(\Delta_i, X_{t_{i-1}}; \theta)}{2\phi(\Delta_i, X_{t_{i-1}}; \theta)^2} \left[(X_{t_i} - F(\Delta_i, X_{t_{i-1}}; \theta))^2 - \phi(\Delta_i, X_{t_{i-1}}; \theta)\right] \Bigg\}. \end{aligned} \tag{25}$$

Dakle, $(\partial_\theta \ln QL_n(\theta),\ n \in \mathbb{N})$ je martingal na $(\Omega, \mathcal{F}, P_\theta)$. Kvazi-funkcija vjerodostojnosti definirana na ovaj način poseban je slučaj kvadratnih martingalnih procjeniteljskih funkcija o kojima se više može pronaći u [2]. U idućim ćemo potpoglavljima ponovno spomenuti ovu funkciju te ćemo reći nešto o njenoj optimalnosti u procjeni.

4.2 Asimptotska razmatranja

Kao i u općenitom slučaju procjeniteljskih funkcija, neka je subdivizija vremenskih opažanja ekvidistantna. Nadalje, neka imamo difuziju koja zadovoljava svojstvo ergodičnosti, njena invarijantna vjerojatnosna mjera ima funkciju gustoće μ_0, za svaki $\theta \in \Theta$, te neka je $X_0 \sim \mu_0$ uz vjerojatnosnu mjeru P_θ, tj. neka je difuzija stacionarna.

Za jednodimenzionalnu difuziju X gustoća mjere skaliranja dana je s

$$s(x; \theta) = \exp\left\{-2\int_{x^\#}^x \frac{b(y; \theta)}{\sigma^2(y; \theta)}\, dy\right\}, \quad x \in \langle l, r \rangle,$$

za proizvoljan $x^\#$ iz intervala $\langle l, r \rangle$.

Napomena 4.1. Za svaki $\theta \in \Theta$ vrijedi:

1) $\displaystyle\int_{x^\#}^{r} s(x;\theta)\,dx = \int_{l}^{x^\#} s(x;\theta)\,dx = \infty$,

2) $\displaystyle\int_{l}^{r} [s(x;\theta)\sigma^2(x;\theta)]^{-1}\,dx = A(\theta) < \infty$.

Ukoliko su ispunjeni uvjeti iz Napomene 4.1, slučajni proces X je ergodičan[7], a invarijantna vjerojatnosna mjera dana je s

$$\mu_\theta(x) = \frac{1}{A(\theta)s(x;\theta)\sigma^2(x;\theta)}, \quad x \in \langle l, r\rangle.$$

Označimo s Q_θ vjerojatnosnu mjeru na D^2 i definirajmo ju kao distribuciju dvaju uzastopnih opažanja $(X_{\Delta(i-1)}, X_{\Delta i})$:

$$Q_\theta(dx, dy) = \mu_\theta(x)p(\Delta, x, y; \theta)\,dxdy.$$

Uz pretpostavku o ergodičnosti, (16) vrijedi za svaku funkciju $f\colon D^2 \to \mathbb{R}$ za koju je $Q(|f|) < \infty$.

Izvedimo sada analogon Teorema 3.5. Za početak, uvjetujmo funkciju g iz (21) na sljedeći način:

$$Q_\theta\left(g(\theta)^T g(\theta)\right) = \int_{D^2} g(y,x;\theta)^T g(y,x;\theta)\mu_\theta(x)p(x,y;\theta)\,dydx < \infty, \quad \forall\theta \in \Theta.$$

Prema (16), imamo:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_{\Delta i}, X_{\Delta(i-1)}; \theta') \xrightarrow{P_\theta} Q_\theta\left(g(\theta')\right).$$

S obzirom da je procjeniteljska funkcija $G_n(\theta)$ martingal s obzirom na vjerojatnosnu mjeru P_θ, centralni granični teorem za martingale (više informacija dostupno je u [5]) implicira asimptotsku normalnost, a matrica kovarijanci u (17) definira se kao

$$V(\theta) = Q_{\theta_0}\left(g(\theta)g(\theta)^T\right). \tag{26}$$

Teorem 4.1. *Neka vrijede uvjeti iz Napomene 3.1 za* $r = 2$, $\bar{\theta} = \theta_0$ *i* $Q = Q_{\theta_0}$, *gdje je* θ_0 *stvarna vrijednost parametra. Nadalje, neka za* $\theta = \theta_0$ *vrijedi (17), pri čemu je* $V(\theta)$ *definirana s (26). Tada postoji* G_n*-procjenitelj* $\hat{\theta}_n$ *koji je* θ_0*-konzistentan i*

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}_p\left(0, W^{-1}VW^{T^{-1}}\right),$$

uz vjerojatnosnu mjeru P_{θ_0}, *pri čemu je* W *dano s (19),* $\bar{\theta} = \theta_0$ *i* $V = V(\theta_0)$. *Štoviše, ukoliko je funkcija* $g(x,y;\theta)$ *lokalno omeđeno integrabilna s obzirom na* Q_{θ_0} *i*

$$Q_{\theta_0}(g(\theta)) \neq 0, \quad \forall\theta \neq \theta_0,$$

tada je G_n*-procjenitelj* $\hat{\theta}_n$ *jedinstven na svakom omeđenom podskupu od* Θ *koji sadrži* θ_0 *s vjerojatnošću koja se približava jedinici kada* $n \to \infty$.

[7]Slučajni proces je ergodičan ako je vremensko usrednjenje jednako prostornom usrednjenju.

Napomena 4.2. Budući da u praksi najčešće ne znamo stvarnu vrijednost parametra θ_0, uvjete prethodnog teorema provjeravamo za okolinu neke vrijednosti θ_0 iz interiora skupa Θ.

Asimptotska matrica kovarijanci procjenitelja $\hat{\theta}_n$ može se procijeniti pomoću sljedećeg teorema:

Teorem 4.2. *Neka vrijede uvjeti (2)-(4) iz Napomene 3.1 za* $r = 2$, $\bar{\theta} = \theta_0$ *i* $Q = Q_{\theta_0}$, *gdje je* θ_0 *stvarna vrijednost parametra. Tada je*

$$W_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \partial_{\theta^T} g(X_{(i-1)\Delta}, X_{i\Delta}; \hat{\theta}_n)^T \xrightarrow{P_{\theta_0}} W,$$

za θ_0*-konzistentan procjenitelj* $\hat{\theta}_n$. *Vjerojatnost da je* W_n *invertibilna približava se jedinici kako* $n \to \infty$. *Osim toga, ako je funkcija* $(x, y) \mapsto \|g(x, y; \theta)\|$ *omeđena, za sve* $\theta \in N$, *funkcijom koja je kvadratno integrabilna s obzirom na* Q_{θ_0}, *tada je*

$$V_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_{(i-1)\Delta}, X_{i\Delta}; \hat{\theta}_n) g(X_{(i-1)\Delta}, X_{i\Delta}; \hat{\theta}_n)^T \xrightarrow{P_{\theta_0}} V.$$

4.3 Optimalnost

Neka procjeniteljska funkcija $G_n(\theta)$ zadovoljava centralni granični teorem za martingale te neka je procjenitelj $\hat{\theta}_n$ rješenje (7). Kvadratna karakteristika (*eng. quadratic characteristic*) funkcije $G_n(\theta)$, u oznaci $\langle G(\theta)\rangle_n$, definirana je na sljedeći način:

$$\langle G(\theta)\rangle_n = \sum_{i=1}^{n} E_\theta \left((G_i(\theta) - G_{i-1}(\theta))(G_i(\theta) - G_{i-1}(\theta))^T \mid \mathcal{F}_{i-1} \right).$$

Uz pretpostavku uvjeta regularnosti te zamjenu $\partial_{\theta^T} G_n(\theta)$ s

$$\bar{G}_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n} E_\theta \left(\partial_{\theta^T} G_i(\theta) - \partial_{\theta^T} G_{i-1}(\theta) \mid \mathcal{F}_{i-1} \right),$$

može se pokazati da $\langle G(\theta)\rangle_n^{-\frac{1}{2}} \bar{G}_n(\theta)(\hat{\theta}_n - \theta_0)$ konvergira po distribuciji prema normalnoj distribuciji s očekivanjem nula i matricom kovarijanci I_p, odnosno

$$\langle G(\theta)\rangle_n^{-\frac{1}{2}} \bar{G}_n(\theta)(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, I_p), \tag{27}$$

gdje je θ_0 stvarna vrijednost parametra. Napomenimo kako je izraz (27) dobiven uz dodatnu pretpostavku da $\bar{G}_n(\theta)^{-1} \partial_{\theta^T} G_n(\theta) \xrightarrow{P_\theta} I_p$.

Napomena 4.3. Kvadratna ko-karakteristika (*eng. quadratic co-characteristic*) martingala G i $\widetilde{G}$ s konačnim varijancama jednaka je

$$\langle G, \widetilde{G}\rangle_n = \sum_{i=1}^{n} E \left((G_i - G_{i-1})(\widetilde{G}_i - \widetilde{G}_{i-1})^T \mid \mathcal{F}_{i-1} \right). \tag{28}$$

Heyde je pokazao kako inverz matrice

$$I_{G_n}(\theta) = \bar{G}_n(\theta)^T \langle G(\theta) \rangle_n^{-1} \bar{G}_n(\theta) \tag{29}$$

procjenjuje matricu kovarijance asimptotske distribucije procjenitelja $\hat{\theta}_n$ pa se izraz (29) naziva Heydeova informacija. Heydeova informacija može se smatrati proširenom verzijom Godambove informacije (u smislu procjene), a interpretacija joj je vrlo slična Godambeovoj jer $\bar{G}_n(\theta)$ procjenjuje funkciju osjetljivosti S_{G_n}, dok kvadratna karakteristika $\langle G(\theta) \rangle_n$ procjenjuje varijancu asimptotske distribucije $G_n(\theta)$, odnosno vrijedi:

$$\begin{aligned} E_\theta \left(\bar{G}_n(\theta) \right) &= S_{G_n}(\theta), \\ E_\theta \left(\langle G(\theta) \rangle_n \right) &= E_\theta \left(G_n(\theta) G_n(\theta)^T \right). \end{aligned}$$

Prema tome, ukoliko s $\mathcal{G}_n$ označimo klasu martingalnih procjeniteljskih funkcija konačne varijance, analogno Definiciji 3.1, možemo definirati optimalnost u Heydeovom smislu.

Definicija 4.1. Martingalna procjeniteljska funkcija $G_n^* \in \mathcal{G}_n$ je optimalna u Heydeovom smislu (ili Heyde-optimalna) ukoliko je

$$I_{G_n^*}(\theta) \geq I_{G_n}(\theta)$$

gotovo sigurno u odnosu na vjerojatnosnu mjeru P_θ, za sve $\theta \in \Theta$ i sve $G_n \in \mathcal{G}_n$.

Sljedećim teoremom dan je nužan uvjet optimalnosti u Heydeovom smislu, kao i povezanost s optimalnošću u Godambeovom smislu.

Teorem 4.3. *Ako je martingalna procjeniteljska funkcija G_n^* iz klase svih martingalnih procjeniteljskih funkcija konačne varijance $\mathcal{G}_n$ takva da zadovoljava*

$$\bar{G}_n(\theta)^{-1} \langle G(\theta), G^*(\theta) \rangle_n = \bar{G}_n^*(\theta)^{-1} \langle G^*(\theta) \rangle_n, \tag{30}$$

za sve $\theta \in \Theta$ i sve $G_n \in \mathcal{G}_n$, tada je ona Heyde-optimalna u $\mathcal{G}_n$. Nadalje, ako je $\mathcal{G}_n$ zatvorena s obzirom na zbrajanje, tada svaka Heyde-optimalna procjeniteljska funkcija G_n^* zadovoljava (30). Štoviše, G_n^* je Godambe-optimalna u $\mathcal{G}_n$ ukoliko u $\bar{G}_n^*(\theta)^{-1} \langle G^*(\theta) \rangle_n$ ne postoji slučajnost u matematičkom smislu.

Nakon definiranja optimalnosti u Godambeovom i Heydeovom smislu, u nastavku ćemo reći nešto više o aproksimaciji skor funkcije prosjekom martingala. U tu svrhu, pretpostavimo da su $h_j(x, y; \theta),\ j = 1, 2, \dots, N$, funkcije realne varijable takve da je za svaki $x \in D$ i $\theta \in \Theta$

$$\int_D h_j(x, y; \theta) p(x, y; \theta)\, dy = 0. \tag{31}$$

Kombinacijom takvih funkcija može se kreirati procjenitelj koji će biti efikasniji od procjenitelja nastalih kreiranjem funkcija oblika (15) samo na temelju jedne procjeniteljske funkcije h_j, stoga promatramo procjeniteljske funkcije oblika

$$G_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n} a(X_{(i-1)\Delta}; \theta) h(X_{(i-1)\Delta}, X_{i\Delta}; \theta), \tag{32}$$

pri čemu je $h = (h_1, h_2, \dots, h_N)^T$. Težinskom $p \times N$ matricom $a(x, \theta)$ definirana je funkcija od x za koju je (32) integrabilna s obzirom na vjerojatnosnu mjeru P_θ te upravo ona određuje težinu pojedine funkcije h_j prilikom procjene. Odabir odgovarajućih funkcija h_j, kao i težinske matrice $a(x, \theta)$ nije jednostavan postupak. Najbolja aproksimacija skor funkcije u srednje kvadratnom smislu dobije se za optimalnu težinsku matricu a^*, što ilustrira sljedeći primjer.

Primjer 1. *Promotrimo Markovljev proces baziran na funkcijama $h_{ij}(y, x; \theta)$, $j = 1, 2, \dots, N$, $i = 1, 2, \dots, n$, za koji je*

$$E_\theta(h_{ij}(X_i, X_{i-1}; \theta) \mid \mathcal{F}_{i-1}) = 0. \tag{33}$$

Takvim je funkcijama definiran odnos između uzastopnih opažanja X_i i X_{i-1}, koji su u prosjeku jednaki nuli, pa se procjena parametra θ dobije rješavanjem jednadžbe

$$\sum_{i=1}^{n} h_{ij}(X_i, X_{i-1}; \theta) = 0,$$

pri čemu je nužno da je $N \geq p$. Međutim, ukoliko je $N > p$, broj jednadžbi je prevelik pa N funkcija treba iskombinirati na najbolji mogući način. Zbog toga se promatra klasa p-dimenzionalnih procjeniteljskih funkcija oblika

$$G_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n} a_i(X_{i-1}; \theta) h_i(X_i, X_{i-1}; \theta), \tag{34}$$

za N-dimenzionalni vektor $h_i = (h_{i1}, h_{i2}, \dots, h_{iN})^T$ i funkciju $a_i(x; \theta)$ koja ide s $\mathbb{R} \times \Theta$ u skup $p \times N$ matrica diferencijabilnih s obzirom na θ. Primijetimo kako (33) implicira da je $G_n(\theta)$ definirana s (34) p-dimenzionalna nepristrana martingalna procjeniteljska funkcija.

Neka je, slično kao u Teoremu 4.3, $\mathcal{G}_n$ klasa martingalnih procjeniteljskih funkcija oblika (34) konačne varijance. Tada imamo:

$$\bar{G}_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n} a_i(X_{i-1}; \theta) E_\theta(\partial_{\theta^T} h_i(X_i, X_{i-1}; \theta) \mid \mathcal{F}_{i-1}),$$

$$\langle G(\theta), G^*(\theta) \rangle_n = \sum_{i=1}^{n} a_i(X_{i-1}; \theta) V_{h_i}(X_{i-1}; \theta) a_i^*(X_{i-1}; \theta)^T,$$

gdje je

$$G_n^*(\theta) = \sum_{i=1}^{n} a_i^*(X_{i-1}; \theta) h_i(X_i, X_{i-1}; \theta),$$

a

$$V_{h_i}(X_{i-1}; \theta) = E_\theta\left(h_i(X_i, X_{i-1}; \theta) h_i(X_i, X_{i-1}; \theta)^T \mid \mathcal{F}_{i-1}\right)$$

uvjetna matrica kovarijanci slučajnog vektora $h_i(X_i, X_{i-1}; \theta)$ s obzirom na $\mathcal{F}_{i-1}$. Uz pretpostavku invertibilnosti matrice $V_{h_i}(X_{i-1}; \theta)$, definiramo optimalnu težinsku matricu a^* na sljedeći način:

$$a_i^*(X_{i-1}; \theta) = -E_\theta\left(\partial_{\theta^T} h_i(X_i, X_{i-1}; \theta) \mid \mathcal{F}_{i-1}\right)^T V_{h_i}(X_{i-1}; \theta)^{-1}. \tag{35}$$

Ovako definiran a_i^* zadovoljava uvjet (30) iz Teorema 4.3 pa je, uz pretpostavku konačne varijance, procjeniteljska funkcija $G_n^*(\theta)$ Heyde-optimalna. Budući da u izrazu $\bar{G}_n^*(\theta)^{-1}\langle G^*(\theta)\rangle_n = -I_p$ nema slučajnosti, slijedi da je funkcija $G_n^*(\theta)$ i Godambe-optimalna.

Spomenimo još kako će funkcija $G_n^*(\theta)$ biti optimalna ukoliko se u izrazu (35) ukloni minus ispred uvjetnog očekivanja. Štoviše, optimalna $g^*(x, y; \theta) = a^*(x; \theta)h(x, y; \theta)$ dobije se iz $\partial_\theta \ln p(x, y; \theta)$ projekcijom na odgovarajući potprostor kvadratno integrabilnih funkcija, o čemu se više može pročitati u [11].

U ekonometriji, procjena parametara uporabom funkcija $h_j(x, y; \theta)$, $j = 1, 2, \ldots, N$, često se provodi generaliziranom metodom momenata (pogledati [6]), no takvi procjenitelji sadržani su u teoriji martingalnih procjeniteljskih funkcija pa se u ovom radu njima nećemo detaljnije baviti. Vratimo se sada na problem pronalaska optimalne procjeniteljske funkcije $G_n^*(\theta)$ oblika (32) s optimalnom težinskom matricom.

Napomena 4.4. Kako bismo mogli provoditi daljnja zaključivanja, potrebni su nam sljedeći uvjeti:

1) Funkcije h_j, $j = 1, 2, \ldots, N$, su linearno nezavisne.

2) Preslikavanja $y \mapsto h_j(x, y\ \theta)$, $j = 1, 2, \ldots, N$, su kvadratno integrabilna s obzirom na $p(x, y; \theta)$, za svaki $x \in D$ i svaki $\theta \in \Theta$.

3) $h(x, y; \theta)$ je diferencijabilna s obzirom na θ.

4) Preslikavanja $y \mapsto \partial_{\theta_i} h_j(x, y; \theta)$ su integrabilna s obzirom na $p(x, y; \theta)$, za svaki $x \in D$ i svaki $\theta \in \Theta$.

Prema tome, promatramo klasu procjeniteljskih funkcija u kojima je, s obzirom na Primjer 1, optimalna težinska matrica a^* dana s

$$a^*(x; \theta) = B_h(x; \theta)V_h(x; \theta)^{-1},$$

gdje je

$$B_h(x; \theta) = \int_D \partial_\theta h(x, y; \theta)^T p(x, y; \theta)\ dy$$

i

$$V_h(x; \theta) = \int_D h(x, y; \theta)h(x, y; \theta)^T p(x, y; \theta)\ dy.$$

Zbog prvog uvjeta iz Napomene 4.4, matrica $V_h(x; \theta)$ je invertibilna.

Ukoliko je $a^*(x; \theta)$ diferencijabilna s obzirom na θ, zbog (31) slijedi da je

$$\int_D [\partial_{\theta_i} a^*(x; \theta)]h(x, y; \theta)p(x, y; \theta)\ dy = 0,$$

pa izraze (18) i (26) za matrice W i V možemo pojednostavniti, odnosno imamo:

$$W = \int_{D^2} \partial_{\theta^T}[a^*(x;\theta_0)h(x,y;\theta)]Q_{\theta_0}(dx,dy)$$

$$= \mu_{\theta_0}(a^*(\theta_0)B_h(\theta_0)^T)$$

$$= \mu_{\theta_0}\left(B_h(\theta_0)V_h(\theta_0)^{-1}B_h(\theta_0)^T\right),$$

što je jednako izrazu koji se dobije za V, tj.

$$V = \mu_{\theta_0}\left(B_h(\theta_0)V_h(\theta_0)^{-1}B_h(\theta_0)^T\right).$$

Prema tome, ako $g^*(x,y;\theta) = a^*(x;\theta)h(x,y;\theta)$ zadovoljava pretpostavke Teorema 3.5, niz G_n^*-procjenitelja $\hat{\theta}_n$ ima asimptotsku distribuciju, odnosno

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} \mathcal{N}_p\left(0, V^{-1}\right).$$

Promotrimo na primjeru procjeniteljske funkcije (25) kako su definirane funkcije h_j, $j = 1,2,\ldots,N$, i težinska matrica $a(x;\theta)$.

Primjer 2. *Bez smanjenja općenitosti, promotrimo slučaj jednodimenzionalne difuzije. Za $N = 2$, martingalna procjeniteljska funkcija (25) je oblika (32), pri čemu su funkcije h_j, $j = 1,2$, dane s*

$$h_1(x,y;\theta) = y - F(\Delta,x;\theta),$$
$$h_2(x,y;\theta) = (y - F(\Delta,x;\theta))^2 - \phi(\Delta,x;\theta) = h_1^2(x,y;\theta) - \phi(\Delta,x;\theta),$$

gdje su $F(\Delta,x;\theta)$ i $\phi(\Delta,x;\theta)$ definirani s (23) i (24), dok je težinska matrica dana s

$$\left(\frac{\partial_\theta F(\Delta,x;\theta)}{\phi(\Delta,x;\theta)}, \frac{\partial_\theta \phi(\Delta,x;\theta)}{2\phi^2(\Delta,x;\theta)\Delta}\right).$$

Stupci optimalne težinske matrice su

$$a_1^*(x;\theta) = \frac{\partial_\theta\phi(x;\theta)\eta(x;\theta) - \partial_\theta F(x;\theta)\psi(x;\theta)}{\phi(x;\theta)\psi(x;\theta) - \eta(x;\theta)^2},$$

$$a_2^*(x;\theta) = \frac{\partial_\theta F(x;\theta)\eta(x;\theta) - \partial_\theta\phi(x\theta)\phi(x;\theta)}{\phi(x;\theta)\psi(x;\theta) - \eta(x;\theta)^2}.$$

Pri tome su korištene sljedeće oznake:

$$\eta(x;\theta) = E_\theta\left([X_\Delta - F(x;\theta)]^3 \mid X_0 = x\right),$$
$$\psi(x,\theta) = E_\theta\left([X_\Delta - F(x;\theta)]^4 \mid X_0 = x\right) - \phi(x;\theta)^2.$$

Izrazi za a_1^* i a_2^* mogu se pojednostavniti aproksimacijama:

$$\eta(t,x;\theta) \approx 0 \tag{36}$$

$$\psi(t,x;\theta) \approx 2\phi(t,x;\theta)^2, \tag{37}$$

pri čemu jednakosti vrijede u slučaju normalne distribucije. Gaussovom aproksimacijom izraza a_1^* i a_2^* dobiju se težinske funkcije iz (25).

U raznim literaturama, najčešći oblik funkcija h_j jest

$$h_j(x,y;\theta) = f_j(y;\theta) - \pi_\Delta^\theta(f_j(\theta))(x). \tag{38}$$

π_Δ^θ označava prijelazni operator (*eng. transition operator*),

$$\pi_s^\theta(f)(x) = E_\theta(f(X_s) \mid X_0 = x) = \int_D f(y)p(s,x,y;\theta)\,dy,$$

koji se primjenjuje na svaku koordinatu funkcije $f = (f_1, f_2, \dots, f_N)^T$ s $D \times \Theta$ u $\mathbb{R}^N$. Prema tome, uvrštavanjem (38) u (32) dobivamo martingalne procjeniteljske funkcije oblika

$$G_n(\theta) = \sum_{i=1}^n a(X_{(i-1)\Delta};\theta)\left[f(X_{i\Delta};\theta) - \pi_\Delta^\theta(f(\theta))(X_{(i-1)\Delta})\right]. \tag{39}$$

U tom slučaju, izrazi pomoću kojih je definirana optimalna težinska matrica a^* poprimaju nešto jednostavniji oblik, odnosno

$$B_h(x;\theta)_{ij} = \pi_\Delta^\theta(\partial_{\theta_i} f_j(\theta)(x)) - \partial_{\theta_i}\pi_\Delta^\theta(f_j(\theta))(x), \tag{40}$$

za $i = 1, 2, \dots, p$ i $j = 1, 2, \dots, N$, te

$$V_h(x;\theta)_{ij} = \pi_\Delta^\theta(f_i(\theta)f_j(\theta))(x) - \pi_\Delta^\theta(f_i(\theta))(x)\pi_\Delta^\theta(f_j(\theta))(x), \tag{41}$$

za $j = 1, 2, \dots, N$. Ukoliko se odaberu funkcije f_j koje ne ovise o parametru θ, tada je (40) oblika

$$B_h(x;\theta)_{ij} = -\partial_{\theta_i}\pi_\Delta^\theta(f_j)(x). \tag{42}$$

Napomena 4.5. Ako za $C = \sigma\sigma^T$ s

$$A_\theta f(x) = \sum_{k=1}^d b_k(x;\theta)\partial_{x_k} f(x) + \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^d C_{kl}(x;\theta)\partial^2_{x_k x_l} f(x) \tag{43}$$

definiramo generatora difuzije, tada se korisna aproksimacija optimalne težinske matrice može dobiti jednostavnom primjenom formule koja vrijedi za $2(k+1)$ puta neprekidno diferencijabilne funkcije (više detalja dostupno je u [11]):

$$\pi_s^\theta(f)(x) = \sum_{i=0}^k \frac{s^i}{i!}A_\theta^i f(x) + O(s^{k+1}). \tag{44}$$

U većini slučajeva dovoljno je koristiti jednostavnu aproksimaciju

$$\pi_\Delta^\theta(f_j)(x) \approx f_j(x) + \Delta A_\theta f_j(x).$$

Ukoliko f ne ovisi o θ, tada je za $d = 1$ (42) oblika

$$B_h(x;\theta) \approx \Delta \left[\partial_\theta b(x;\theta) f'(x) + \frac{1}{2} \partial_\theta \sigma^2(x;\theta) f''(x) \right],$$

dok je za $d = 1$ i $N = 1$ (41) oblika

$$V_h(x;\theta) \approx \Delta \left[A_\theta(f^2)(x) - 2f(x) A_\theta f(x) \right] = \Delta \sigma^2(x;\theta) f'(x)^2.$$

Primjer 3. *U skladu s upravo navedenim razmatranjima, korištenjem (44), (36) i (37) možemo pojednostavniti optimalnu težinsku matricu iz Primjera 2 pa dobivamo martingalnu procjeniteljsku funkciju*

$$G_n^\circ(\theta) = \left\{ \frac{\partial_\theta b(X_{(i-1)\Delta};\theta)}{\sigma^2(X_{(i-1)\Delta};\theta)} \left[X_{i\Delta} - F(X_{i-1}\Delta;\theta) \right] \right.$$

$$\left. + \frac{\partial_\theta \sigma^2(X_{(i-1)\Delta};\theta)}{2\sigma^4(X_{(i-1)\Delta};\theta)\Delta} \left[(X_{i\Delta} - F(X_{(i-1)\Delta};\theta))^2 - \phi(X_{(i-1)\Delta};\theta) \right] \right\}.$$

4.4 Eksplicitne martingalne procjeniteljske funkcije

Uvjetni momenti sadržani u procjeniteljskim funkcijama često se ne mogu izravno izračunati, stoga se za većinu difuzijskih procesa procjenitelji mogu dobiti numeričkim metodama i simulacijama, koje ponekad mogu biti vremenski i računski zahtjevne. Svi difuzijski procesi imaju rješenje u klasi procjeniteljskih funkcija koje nisu martingalne, dok eksplicitni izrazi za martingalne procjeniteljske funkcije postoje samo za određene difuzijske procese, primjerice za one jednodimenzionalne. U ovom ćemo dijelu reći nešto o onim difuzijskim procesima za koje postoje eksplicitno definirane martingalne procjeniteljske funkcije.

U radu *Estimating equations based on eigenfunctions for a discretely observed diffusion process* iz 1999. godine (vidjeti [8]), M. Kessler i M. Sørensen predložili su procjeniteljske funkcije oblika (39), gdje su f_j, $j = 1, 2, \ldots, N$, svojstvene funkcije generatora difuzije (43), odnosno

$$A_\theta f_j(x;\theta) = -\lambda_j(\theta) f_j(x;\theta),$$

ali i svojstvene funkcije prijelaznog operatora π_t^θ, tj.

$$\pi_t^\theta(f_j(\theta))(x) = e^{-\lambda_j(\theta)t} f_j(x;\theta), \quad \forall t > 0.$$

Realni nenegativni brojevi $\lambda_j(\theta)$ su svojstvene vrijednosti pripadnih svojstvenih funkcija $f_j(x;\theta)$. Prema tome, moguće je pronaći eksplicitni izraz za funkcije h_j iz (38). Formalizirajmo navedene zaključke u obliku teorema.

Teorem 4.4. *Neka je $\phi(x;\theta)$ svojstvena funkcija generatora difuzije (43) sa svojstvenom vrijednošću $\lambda(\theta)$. Nadalje, neka je*

$$\int_l^r \left[\partial_x \phi(x;\theta)\sigma(x;\theta)\right]^2 \mu_\theta \, dx < \infty, \tag{45}$$

za svaki $t > 0$. Tada je

$$\pi_t^\theta(\phi(\theta))(x) = e^{-\lambda(\theta)t}\phi(x;\theta),$$

za svaki $t > 0$.

Dokaz. Radi jednostavnosti zapisa, zanemarimo parametar θ. Definiramo li s

$$Y_t = e^{\lambda t}\phi(X_t),$$

tada prema Itôvoj formuli direktno slijedi:

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t e^{\lambda s}\left[A\phi(X_s) + \lambda\phi(X_s)\right] \, ds + \int_0^t e^{\lambda s}\phi'(X_s)\sigma(X_s) \, dB_s$$

$$= Y_0 + \int_0^t e^{\lambda s}\phi'(X_s)\sigma(X_s) \, dB_s.$$

Zbog pretpostavke teorema (45), Y je martingal, što izravno dokazuje tvrdnju teorema. ■

Napomena 4.6. Uočimo kako (45) vrijedi kada su $\sigma(x;\theta)$ i $\partial_x\phi(x;\theta)$ omeđene funkcije za $x \in \langle l, r\rangle$.

Primjer 4. *Promotrimo Cox-Ingersoll-Rossov model (CIR model) koji se u matematičkim financijama koristi za opisivanje kretanja kamatnih stopa, a zadan je s*

$$dX_t = -\beta(X_t - \alpha) \, dt + \tau\sqrt{X_t} \, dB_t, \quad \alpha, \beta, \tau > 0.$$

Pripadne svojstvene funkcije su

$$\phi_i(x) = L_i^{(\nu)}(2\beta x \tau^{-2}),$$

za $\nu = 2\alpha\beta\tau^{-2} - 1$. $L_i^{(\nu)}$ je Laguerrov polinom

$$L_i^{(\nu)}(x) = \sum_{m=0}^{i} (-1)^m \binom{i+\nu}{i-m} \frac{x^m}{m!}.$$

Direktnim uvrštavanjem $L_i^{(\nu)}$ u diferencijalnu jednadžbu

$$\tau x f''(x) - \beta(x-\alpha)f'(x) + i\beta f(x) = 0,$$

dobivamo svojstvene vrijednosti $i\beta$, $i = 0, 1, \ldots$. Dakle, vrijede uvjeti Teorema 4.4 pa se sve polinomijalne martingalne procjeniteljske funkcije mogu eksplicitno izraziti, a prva četiri uvjetna momenta su:

$$F(x;\theta) = xe^{-\beta\Delta} + \alpha(1 - e^{-\beta\Delta}),$$

$$\phi(x;\theta) = \frac{\tau^2}{\beta}\left(\left(\frac{1}{2}\alpha - x\right)e^{-2\beta\Delta} - (\alpha - x)e^{-\beta\Delta} + \frac{1}{2}\alpha\right),$$

$$\eta(x;\theta) = \frac{\tau^4}{2\beta^2}\left(\alpha - 3(\alpha - x)e^{-\beta\Delta} + 3(\alpha - 2x)e^{-2\beta\Delta} - (\alpha - 3x)e^{-3\beta\Delta}\right),$$

$$\begin{aligned}\psi(x;\theta) = \frac{3\tau^6}{4\beta^3}&\big((\alpha - 4x)e^{-4\beta\Delta} - 4(\alpha - 3x)e^{-3\beta\Delta} + 6(\alpha - 2x)e^{-2\beta\Delta}\\ &-4(\alpha - x)e^{-\beta\Delta} + \alpha\big) + 2\phi(x;\theta)^2.\end{aligned}$$

Više primjera eksplicitnih martingalnih procjeniteljskih funkcija dostupno je u [11]. Martingalne procjeniteljske funkcije također imaju primjenu i u klasi Pearsonovih difuzija o kojima se više može pročitati u [3].

4.5 Analiza simuliranih vrijednosti

S obzirom na prethodna razmatranja i ranije uvedene oznake za uvjetno očekivanje i uvjetnu varijancu, tj. (23) i (24), te ekvidistantnu subdiviziju, B. M. Bibby i M. Sørensen u [2] predlažu tri oblika martingalnih procjeniteljskih funkcija s očekivanjem jednakim nuli. U ovom ćemo dijelu prvo navesti dva oblika martingalnih procjeniteljskih funkcija, a nakon toga ćemo analizirati procjenu parametara na dvama primjerima. Budući da su primjeri preuzeti iz [2], diferenciranje s obzirom na parametar θ označit ćemo u skladu s literaturom, odnosno s $\dot{}$ iznad oznake funkcije. Primjerice, diferenciranje drift parametra označit ćemo s $\dot{b}$.

U jednodimenzionalnom slučaju, martingalne procjeniteljske funkcije dane su s

$$\tilde{G}_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\dot{b}(X_{(i-1)\Delta};\theta)}{\sigma^2(X_{(i-1)\Delta};\theta)}(X_{i\Delta} - F(X_{(i-1)\Delta};\theta)) \tag{46}$$

i

$$G_n^*(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\dot{F}(X_{(i-1)\Delta};\theta)}{\phi(X_{(i-1)\Delta};\theta)}(X_{i\Delta} - F(X_{(i-1)\Delta};\theta)).$$

Treći oblik procjeniteljske funkcije nastaje aproksimacijom G_n^*, a više detalja može se pronaći u [2]. U višedimenzionalnom slučaju (za k-dimenzionalan parametar θ, d-dimenzionalnu difuziju X, d-dimenzionalan drift parametar b i pozitivno definitnu matricu parametara difuzije reda $d \times m$, pri čemu je m dimenzija Brownovog gibanja), $(k \times 1)$-dimenzionalne procjeniteljske funkcije dane su s

$$\tilde{G}_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \dot{b}(X_{(i-1)\Delta};\theta)^T \left[\sigma(X_{(i-1)\Delta};\theta)\sigma(X_{(i-1)\Delta};\theta)^T\right]^{-1}\left[X_{i\Delta} - F(X_{(i-1)\Delta};\theta)\right] \tag{47}$$

te

$$G_n^*(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \dot{F}(X_{(i-1)\Delta};\theta)^T \phi(X_{(i-1)\Delta};\theta)^{-1}\left[X_{i\Delta} - F(X_{(i-1)\Delta};\theta)\right], \tag{48}$$

pri čemu su $\dot{b}$ i $\dot{F}$ matrice parcijalnih derivacija (s obzirom na nepoznati parametar) reda $d \times k$. Osim toga, pretpostavka je da je ϕ pozitivno definitna.

U sljedeća dva primjera promotrit ćemo martingalne procjeniteljske funkcije te usporediti vrijednosti dobivene simulacijama. Budući da su eksplicitni izrazi za uvjetno očekivanje i uvjetnu varijancu rijetko poznati, prilikom provođenja simulacija uvjetno očekivanje zamjenjuje se uvjetnim uzoračkim očekivanjem, dok se uvjetna varijanca zamjenjuje uvjetnom uzoračkom varijancom (vidjeti [2]).

Primjer 5. *Ornstein-Uhlenbeckov proces (OU proces) rješenje je stohastičke diferencijalne jednadžbe*

$$dX_t = \theta X_t \, dt + \sigma dB_t, \quad X_0 = x_0.$$

Lako se pokaže da je uvjetno očekivanje ovog procesa $F(x;\theta) = xe^{\theta\Delta}$, *dok je uvjetna varijanca* $\phi(\theta) = \dfrac{\sigma^2}{2\theta}(e^{2\theta\Delta} - 1)$, *stoga je (46) oblika*

$$\tilde{G}_n(\theta) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} X_{(i-1)\Delta}\left(X_{i\Delta} - X_{(i-1)\Delta}e^{\theta\Delta}\right),$$

gdje je Δ, *kao i ranije,* $t_i = i\Delta$, $i = 0, 1, \dots, n$. *Rješavanjem procjeniteljske jednadžbe direktno slijedi kako je procjenitelj za parametar* θ *jednak*

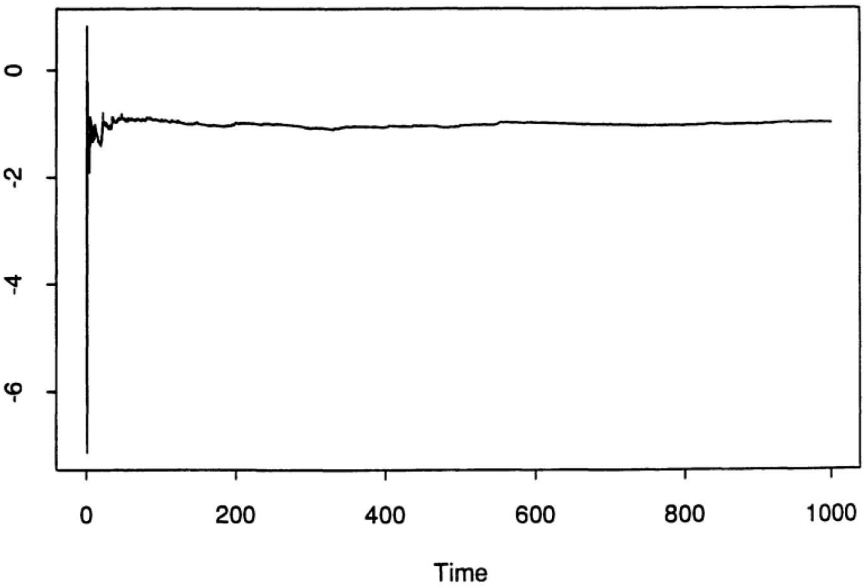
$$\tilde{\theta}_n = \frac{1}{\Delta}\ln\frac{\sum_{i=1}^{n} X_{(i-1)\Delta}X_{i\Delta}}{\sum_{i=1}^{n} X^2_{(i-1)\Delta}},$$

uz uvjet da je suma u brojniku pozitivna.

Neka je $\theta = -1$ *stvarna vrijednost parametra. Grafički prikaz trajektorije OU procesa s obzirom na procjenitelja* $\tilde{\theta}_n$ *prikazan je na Slici 1, iz koje uočavamo kako se vremenom vrijednosti stabiliziraju oko stvarne vrijednosti parametra. Simulacijom 500 opažanja OU procesa na vremenskom intervalu* $[0, 200]$ *i ponavljanjem istoga 500 puta dobivamo numeričke podatke sadržane u Tablici 1. Napomenimo kako je SE oznaka za standardnu grešku (eng. standard error).*

tmax	broj opažanja	broj simulacija	prosjek θ^d_n	SE θ^d_n	prosjek $\tilde{\theta}_n$	SE $\tilde{\theta}_n$	asimptotska SE
200	500	500	-0.8362	0.0836	-1.021	0.1259	0.1238

Tablica 1: Numeričke karakteristike procjenitelja θ^d_n baziranog na diskretiziranoj vremenski neprekidnoj funkciji vjerodostojnosti i procjenitelja $\tilde{\theta}_n$ OU procesa, za $\theta = -1$, $\sigma = 1$, $x_0 = 0$ i $\Delta = 0.4$ (izvor: [2])



Slika 1: Simulacija trajektorije OU procesa za $\tilde{\theta}_n$, gdje je $\theta = -1$, $\sigma = 1$, $x_0 = 0$ i $\Delta = 0.2$ (izvor: [2])

Iz podataka prikazanih u prethodnoj tablici uočavamo kako je prosjek simuliranih trajektorija s obzirom na procjenitelja $\tilde{\theta}_n$ vrlo blizak stvarnoj vrijednosti parametra.

Sljedeći primjer opisuje tzv. *mean-reverting* proces koji je izrazito popularan u financijskoj literaturi. Trajektorije takvih procesa, zbog prirode drifta, osciliraju oko očekivanja procesa.

Primjer 6. *Promotrimo stohastičku diferencijalnu jednadžbu*

$$dX_t = (\alpha + \theta X_t)\, dt + \psi(X_t)\, dB_t, \quad X_0 = x_0.$$

Pri tome je ψ pozitivna funkcija realne varijable, dok su nepoznati parametri α i θ. Rješenje obične diferencijalne jednadžbe $f'(t) = \alpha + \theta f(t)$ je uvjetno očekivanje $E(X_t \mid x_0)$ s obzirom na nepoznate parametre, stoga je

$$F(x; \alpha, \theta) = xe^{\theta\Delta} + \frac{\alpha}{\theta}(e^{\theta\Delta} - 1).$$

Dakle, diferenciranjem drift parametra b i uvjetnog očekivanja F te uvrštavanjem u (47) i (48) dobivamo procjeniteljske funkcije

$$\tilde{G}_n(\alpha, \theta) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\psi^2(X_{(i-1)\Delta})} \left(X_{i\Delta} - X_{(i-1)\Delta}e^{\theta\Delta} + \frac{\alpha}{\theta}(1 - e^{\theta\Delta}) \right), \right.$$

$$\left. \sum_{i=1}^{n} \frac{X_{(i-1)\Delta}}{\psi^2(X_{(i-1)\Delta})} \left(X_{i\Delta} - X_{(i-1)\Delta}e^{\theta\Delta} + \frac{\alpha}{\theta}(1 - e^{\theta\Delta}) \right) \right\}^T$$

i

$$G_n^*(\alpha,\theta) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{e^{\theta\Delta}-1}{\theta\phi(X_{(i-1)\Delta};\alpha,\theta)} \left(X_{i\Delta} - X_{(i-1)\Delta}e^{\theta\Delta} + \frac{\alpha}{\theta}(1-e^{\theta\Delta}) \right), \right.$$

$$\left. \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta e^{\theta\Delta}\left(X_{(i-1)\Delta}+\frac{\alpha}{\theta}\right)+\frac{\alpha}{\theta^2}(1-e^{\theta\Delta})}{\phi(X_{(i-1)\Delta};\alpha,\theta)} \left(X_{i\Delta} - X_{(i-1)\Delta}e^{\theta\Delta} + \frac{\alpha}{\theta}(1-e^{\theta\Delta}) \right) \right\}^T .$$

Procjenitelji za parametre α i θ mogu se pronaći u [2]. U ovom ćemo primjeru promotriti slučaj u kojemu je $\psi(x) = \sigma\sqrt{x}$, što je čest slučaj u financijskoj literaturi jer se radi upravo o CIR procesu. Numerički podaci dobiveni simulacijama prikazani su u tablicama koje slijede. Pri tome su $\alpha = 10$ i $\theta = -1$ stvarne vrijednosti parametara.

Δ	broj opažanja	broj simulacija	prosjek α_n^d	SE α_n^d	prosjek θ_n^d	SE θ_n^d
0.5	200	500	8.106	1.186	-0.8104	0.1189
0.5	500	500	8.021	0.7067	-0.8029	0.0714
0.5	1000	500	7.927	0.4984	-0.7923	0.0498
0.5	1500	500	7.912	0.4141	-0.7919	0.0412
1.0	200	500	6.458	0.6828	-0.6457	0.0689
1.0	500	500	6.404	0.4206	-0.6409	0.0420
1.0	1000	500	6.328	0.2958	-0.6328	0.0297
1.0	1500	500	6.352	0.2516	-0.6352	0.0252
1.5	200	496	5.209	0.4559	-0.5209	0.0451
1.5	500	500	5.204	0.2999	-0.5201	0.0299
1.5	1000	500	5.176	0.2141	-0.5177	0.0213
1.5	1500	500	5.180	0.1786	-0.5179	0.0179
2.0	200	466	4.297	0.2990	-0.4297	0.0298
2.0	500	495	4.337	0.2228	-0.4338	0.0223
2.0	1000	500	4.330	0.1606	-0.4331	0.0160
2.0	1500	500	4.325	0.1381	-0.4325	0.0138

Tablica 2: Numeričke karakteristike procjenitelja baziranih na diskretiziranoj vremenski neprekidnoj funkciji vjerodostojnosti *mean-reverting* procesa, za $x_0 = 10$, $\sigma = 1$, $\alpha = 10$ i $\theta = -1$ (izvor: [2])

Δ	broj opažanja	broj simulacija	prosjek $\tilde{\alpha}_n$	SE $\tilde{\alpha}_n$	prosjek $\tilde{\theta}_n$	SE $\tilde{\theta}_n$
0.5	200	500	10.50	2.064	-1.049	0.2072
0.5	500	500	10.29	1.192	-1.030	0.1204
0.5	1000	500	10.11	0.8293	-1.011	0.0830
0.5	1500	500	10.08	0.6872	-1.009	0.0685
1.0	200	500	10.59	2.111	-1.059	0.2127
1.0	500	500	10.30	1.199	-1.031	0.1199
1.0	1000	500	10.05	0.8158	-1.005	0.0818
1.0	1500	500	10.11	0.6969	-1.011	0.0698
1.5	200	496	10.50	2.344	-1.050	0.2339
1.5	500	500	10.26	1.474	-1.025	0.1476
1.5	1000	500	10.06	0.9841	-1.006	0.0984
1.5	1500	500	10.05	0.8273	-1.005	0.0830
2.0	200	466	10.35	2.493	-1.035	0.2500
2.0	500	495	10.46	2.029	-1.046	0.2036
2.0	1000	500	10.22	1.390	-1.022	0.1390
2.0	1500	500	10.13	1.097	-1.013	0.1097

Tablica 3: Numeričke karakteristike procjenitelja s obzirom na procjeniteljsku funkciju $\tilde{G}$ *mean-reverting* procesa, za $x_0 = 10$, $\sigma = 1$, $\alpha = 10$ i $\theta = -1$ (izvor: [2])

Δ	broj opažanja	broj simulacija	prosjek α_n^*	SE α_n^*	prosjek θ_n^*	SE θ_n^*
0.5	200	500	10.49	2.058	-1.048	0.2066
0.5	500	500	10.29	1.190	-1.030	0.1202
0.5	1000	500	10.11	0.8272	-1.010	0.0828
0.5	1500	500	10.09	0.6865	-1.009	0.0684
1.0	200	500	10.59	2.109	-1.059	0.2127
1.0	500	500	10.30	1.193	-1.031	0.1194
1.0	1000	500	10.05	0.8165	-1.005	0.0819
1.0	1500	500	10.11	0.6968	-1.011	0.0698
1.5	200	496	10.48	2.327	-1.048	0.2322
1.5	500	500	10.26	1.444	-1.025	0.1446
1.5	1000	500	10.06	0.9751	-1.006	0.0975
1.5	1500	500	10.05	0.8171	-1.005	0.0820
2.0	200	466	10.30	2.389	-1.030	0.2395
2.0	500	495	10.44	1.993	-1.045	0.2000
2.0	1000	500	10.22	1.336	-1.022	0.1335
2.0	1500	500	10.12	1.085	-1.012	0.1085

Tablica 4: Numeričke karakteristike procjenitelja s obzirom na procjeniteljsku funkciju G^* *mean-reverting* procesa, za $x_0 = 10$, $\sigma = 1$, $\alpha = 10$ i $\theta = -1$ (izvor: [2])

Analiziranjem numeričkih vrijednosti primjećujemo kako su procjene dobivene na temelju funkcija $\tilde{G}$ i G^* bolje od onih iz Tablice 2, tj. bliže su stvarnim vrijednostima parametara. Osim toga, uspoređivanjem informacija iz Tablica 3 i 4 uočavamo kako su razlike u vrijednostima procjenitelja vrlo male. Ukoliko fiksiramo Δ i povećavamo broj opažanja, procjene iz Tablice 3 i 4 sve će se više približavati stvarnim vrijednostima, a njihove standardne greške će se smanjivati. Situacija je nešto drukčija u slučaju procjenitelja α_n^d i θ_n^d baziranih na diskretiziranoj vremenski neprekidnoj funkciji vjerodostojnosti. Naime, fiksiranjem Δ, standardne greške procjenitelja α_n^d i θ_n^d se također smanjuju, no vrijednosti procjenitelja odudaraju od onih stvarnih. Nadalje, fiksiranje broja opažanja i povećavanje Δ rezultira povećanjem standardnih grešaka u Tablicama 3 i 4, dok je situacija suprotna u Tablici 2. Prema tome, iz svega navedenog možemo zaključiti kako su vrijednosti procjenitelja najbliže stvarnima ukoliko se primjenjuje procjeniteljska funkcija G^*.

Literatura

[1] A. K. Bera, Y. Bilias, P. Simlai, *Estimating Functions and Equations: An Essay on Historical Developments with Applications to Econometrics* (javno dostupno: `https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=79d99c1c63056097163c7e8979e9d564d459e5d1`)

[2] B. M. Bibby, M. Sørensen, *Martingale estimating functions for discretely observed diffusion processes*, Bernoulli, **1** (1995), 17-39

[3] J. L. Forman, M. Sørensen, *The Pearson Diffusions: A Class of Statistically Traceable Diffusion Processes*, Scandinavian Journal of Statistics, **35** (2005), 438-465

[4] G. Grimmett, D. Stirzaker, *Probability and Random Processes*, Oxford University Press, New York, 2001.

[5] P. Hall, C. C. Heyde, *Martingale Limit Theory and Its Application*, Academic Press, New York, 1980.

[6] L. P. Hansen, *Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators*, Econometrica, **50** (1982), 1029-1054

[7] S. M. Iacus, *Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations With R Examples*, Springer, Milano, 2008.

[8] M. Kessler, M. Sørensen, *Estimating Equations Based on Eigenfunctions for a Discretely Observed Diffusion Process*, International Statistical Institute (ISI) and the Bernoulli Society for Mathematical Statistics and Probability, **5** (1999), 299-314

[9] P. E. Kloeden, E. Platen, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1999.

[10] P. Mörters, Y. Peres, *Brownian Motion*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[11] M. Sørensen, *Estimating functions for diffusion-type processes*, Department of Mathematical Sciences, University of Copenhagen

Sažetak

U ovome radu prvo su definirana neka osnovna svojstva procjenitelja te pojmovi vezani za slučajne procese. Ukratko su opisani Itôv stohastički integral, stohastičke diferencijalne jednadžbe te difuzije. Nakon toga, dane su osnovne informacije o procjeniteljskim funkcijama kao jednom od načina procjene parametara. Specifičnu klasu procjeniteljskih funkcija čine martingalne procjeniteljske funkcije, kojima je posvećen glavni dio ovoga rada. Optimalnost u smislu Godambea prvo je opisana u generalnom slučaju procjeniteljskih funkcija, a zatim je, uz optimalnost u smislu Heydea, komentirana i u slučaju martingalnih procjeniteljskih funkcija. Navedeno je nekoliko tvrdnji koje objašnjavaju normalnu asimptotsku distribuiranost procjenitelja dobivenih pomoću martingalnih procjeniteljskih funkcija i komentirana je njihova egzistencija te jedinstvenost. Štoviše, navedena je aproksimacija skor funkcije i definiran izraz za optimalnu težinsku matricu koja određuje težinu pojedinih funkcija korištenih u aproksimaciji. Na kraju rada, komentiran je primjer u kojemu se martingalna procjeniteljska funkcija može eksplicitno izraziti pomoću svojstvenih funkcija te su analizirane vrijednosti procjenitelja dobivenih simulacijama.

Ključne riječi: difuzija, martingalne procjeniteljske funkcije, skor funkcija, optimalnost, asimptotska normalnost

Martingale estimating functions

Abstract

In this paper, some basic properties of estimators and terms related to stochastic processes are firstly defined. Itô's stochastic integral, stochastic differential equations and diffusion process are briefly described. After that, basic information about estimating functions as one of the ways of estimating parameters are given. A specific class of estimating functions are martingale estimating functions, which the main part of this paper is dedicated to. Optimality in the sense of Godambe was first described in the general case of estimating functions, and then, along with optimality in the sense of Heyde, it was also commented on in the case of martingale estimating functions. Several statements explaining the normal asymptotic distribution of estimators obtained using martingale estimating functions are stated and their existence and uniqueness are commented on. Moreover, the approximation of the score function is specified and the expression for the optimal weight matrix that determines the weight of individual functions used in the approximation is defined. At the end of the paper, an example in which the martingale estimator function can be explicitly expressed using eigenfunctions was commented, and the values of estimators obtained by simulations were analyzed.

Keywords: diffusion, martingale estimating functions, score function, optimality, asymptotic normality

Životopis

Rođena sam 11. ožujka 2000. godine u Osijeku. Osnovnu školu završila sam u Bilju, a 2014. godine upisala sam III. gimnaziju u Osijeku koju sam završila 2018. godine. Iste sam godine upisala sveučilišni preddiplomski studij Matematika na Odjelu za matematiku u Osijeku. 2021. godine završila sam preddiplomski studij uz pohvalu *magna cum laude*. Završni rad na temu Gegenbauerovi polinomi pisala sam pod mentorstvom izv. prof. dr. sc. Mihaele Ribičić Penava, s kojom sam u časopisu Osječki matematički list objavila stručni rad pod nazivom Jacobijevi polinomi. Nakon završetka preddiplomskog studija, na Odjelu za matematiku upisala sam sveučilišni diplomski studij Matematika, smjer Financijska matematika i statistika. Tijekom cjelokupnog studija bila sam demonstratorica iz kolegija Pretkolegij, Elementarna matematika i Teorija brojeva te sam sudjelovala u pripremama učenika srednjih škola za matematička natjecanja. Dobitnica sam triju Pohvala za uspješnost u studiranju po akademskim godinama studija, jedne Pohvale za izvannastavne aktivnosti, jedne Pročelnikove nagrade i jedne Rektorove nagrade za izvrstan seminarski rad iz kolegija Statistički praktikum.