Višestruki integrali i neke njihove primjene

Trupković, Dino

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
FAKULTET PRIMIJENJENE MATEMATIKE I INFORMATIKE

Sveučilišni diplomski studij matematike
modul: financijska matematika i statistika

Višestruki integrali i neke njihove primjene

DIPLOMSKI RAD

Mentor:
izv. prof. dr. sc. Ivan Soldo

Student:
Dino Trupković

Osijek, 2024.

Sadržaj

1 | Uvod

Višestruki integrali jedan su od genijalnih načina rješavanja mnogih matematičkih problema. Nije nam problem izračunati površinu pravokuntika ili volumen kvadra. Ipak, za neke geometrijske likove i tijela nije toliko logično kako bi računali njihovu površinu/volumen, pogotovo ako su stranice, odnosno plohe zakrivljene. Srećom, integrali su uvelike olakšali ovaj posao.
Naš diplomski rad započet ćemo s kratkom pričom o jednostrukim integralima. Ondje ćemo se upoznati sa zanimljivim i korisnim svojstvima integrala. Kada se upoznamo s njima vidjet ćemo da ista svojstva (na primjer linearnost) možemo koristiti i kod višestrukih integrala. Drugim riječima, u prvom dijelu ćemo stvoriti temelj za proučavanje višestrukih integrala.
Nakon dijela o jednostrukim integralima krećemo s prvom razinom višestrukih integrala, a to su dvostruki integrali. S njima ćemo se detaljno upoznati, dokazati važna svojstva i teoreme te riješiti primjere. Najvažniji teorem je Fubinijev teorem koji nam daje upute za rješavanje takvih integrala. Vidjet ćemo koliko dvostrukim integralima možemo lakše izračunati volumen tijela ispod krivulja ili čak i među krivuljama. Vidjet ćemo da se primjeri također mogu zakomplicirati i zahtjevati više koroka i opreza prilikom njihovog rješavanja.
Na kraju ćemo se zabaviti i trostrukim integralima koje uvodimo u paketu sa svim ostalim višestrukim integralima. Ovdje pronalazimo još neke primjene višestrukih integrala poput računanja mase, oplošja i momenata inercije. Ta činjenica daje nam do znanja da višestruki integrali igraju bitnu ulogu u mnogim područjima znanosti što dodatno pridonosi njihovoj važnosti.

2 | Riemannov integral

Prije samog proučavanja višestrukih integrala korisno je navesti važne informacije o jednostrukom Riemannovom integralu. Kada se prisjetimo njegove definicije i osnovnih svojstva moći ćemo lakše sve navedeno poopćiti na višestruke integrale. Da bi došli do pojma jednostrukog Riemannovog integrala trebamo proći kroz nekoliko koraka pa krenimo polako redom.

Definicija 1.
Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi da je $a < b$. Skup svih točaka $x \in \mathbb{R}$ za koje vrijedi da je $a \leq x \leq b$ nazivamo segment ili zatvoreni interval i označavamo ga sa $[a, b]$.

To još možemo zapisati i ovako:

$$[a, b] := \{\mathrm{x} \in \mathbb{R} : \mathrm{a} \leq x \leq b\}.$$

Pretohdnu definiciju možemo proširiti na prostor $\mathbb{R}^n$. Skup $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ $\subseteq \mathrm{R}^n$ zove se zatvoreni paralelepiped u $\mathbb{R}^n$. Ako je $n = 2$ radi se o zatvorenom pravokutniku u $\mathbb{R}^2$.

Primjer 1.
Primjerice, skup $[1, 2] \times [2, 3]$ je zatvoreni pravokutnik u $\mathbb{R}^2$. To je skup svih točaka $[a, b]$ sa svojstvom da je $a \in [1, 2]$ i $b \in [2, 3]$.

Različiti skupovi mogu biti korisni za izražavanje nekih svojstva funkcija. Domena funkcije je jedan skup, skup vrijednosti funkcije je drugi skup, skup nultočaka funkcije je treći skup i tako dalje. Zatvoreni intervali i pravokutnici mogu biti vrlo korisni kada proučavamo vrijednosti funkcije. Skup vrijednosti funkcije može biti ograničen na zatvorenom intervalu ili pravokutniku. Više o tome saznat ćemo u sljedećoj definiciji i primjeru.

Definicija 2.
Za funkciju $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kažemo da je ograničena na $[a, b]$ ako postoje realni brojevi m, M takvi da je $m \leq f(x) \leq M$, za sve $x \in [a, b]$.

Napomena 1.
Za proučavanje ograničenih funkcija ne treba funkcija biti ograničena na cijeloj svojoj kodomeni. Dovoljno je ograničiti funkciju na nekom segmentu ili zatvorenom pravokutniku što je čest slučaj u praksi i zadacima.

Prethodna definicija se također može proširiti na prostor $\mathbb{R}^n$. Neka je D zatvoreni pravokutnik u prostoru $\mathbb{R}^n$. Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je ograničena na pravokutniku D ako postoji $M > 0$ tako da za svaku vrijednost funkcije vrijedi da je $|f(x)| \leq M$.

Primjer 2.
Ako je $f : \mathbb{R} \to [-1,1], f(x) = sin(x)$, tada znamo da je slika funkcije f zapravo $[-1,1]$. Dakle, f je ograničena na segmentu $[-1,1]$ i vrijedi $-1 \leq f(x) \leq 1$. Funkciju $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, g(x_1,\ldots,x_n) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ možemo ograničiti na način da proizvoljne točke $T = (x_1,\ldots,x_n)$ iz domene $\mathbb{R}^n$ zadovoljavaju uvjet $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leq 1$ pa prema definiciji g je ograničena funkcija u prostoru $\mathbb{R}$. S druge strane funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = x + 3$ nije ograničena jer je njezina slika jednaka cijelom prostoru $\mathbb{R}$.

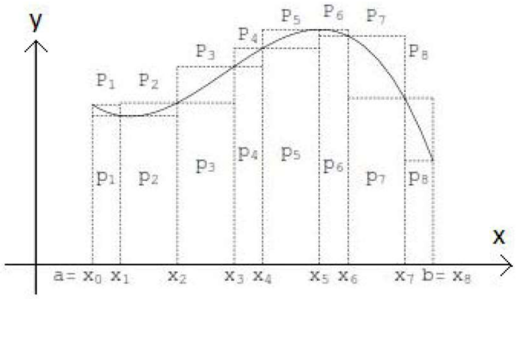
Kada smo naučili osnovne stvari o segmentu, zatvorenom pravokutniku i ograničenoj funkciji možemo krenuti sa sljedećim izrazima koji će nas dovesti do jednostrukog Riemannovog integrala. Naime, neka je $[a,b] \in \mathbb{R}$, $a < b$ i neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija na segmentu $[a,b]$. Uzimamo subdiviziju $\rho = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ tog segmenta:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

gdje je $n \in \mathbb{N}$. Budući da proučavamo funkciju na određenom segmentu, tada možemo na tom segmentu potražiti infimum i supremum. To nam omogućava aksiom potpunosti skupa $\mathbb{R}$. Uvodimo oznake:

$$m = \inf f, \quad M = \sup f$$

na intervalu $[a,b]$. Dakle, vrijedi da je $m \leq f(x) \leq M$.
Kada nacrtamo graf funkcije f možemo dobiti geometrijski lik koji je omeđen osi x, grafom funkcije f, te pravcima koji prolaze točkama a i b i okomiti su na os x. Spomenuti geometrijski lik nazivamo pseudotrapez i označit ćemo ga s T. Promatrat ćemo njegovu površinu. Ozbirom na subdiviziju ρ možemo skicirati pravokutnike unutar pseudotrapeza T na sljedeći način:

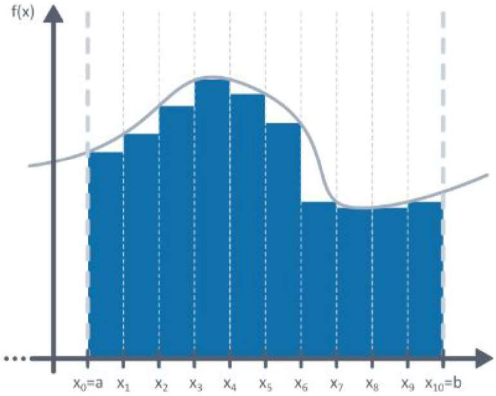


Slika 2.1: Pravokutnici određeni subidivizijom ρ; slika je preuzeta iz [6].

Dakle, dvije stranice pravokutnika su određene točkama subdivizije i jedna stranica pripada osi x. Posljednja stranica dodiruje graf funkcije f. Ta stranica se može nalaziti unutar, odnosno izvan malog pseudotrapeza T_k, određenog grafom funkcije f, pravcima $x = x_{k-1}$, $x = x_k$ i bazom duljine $x_k - x_{k-1}$, za k=1, . . . , n. Na taj način dobivamo upisane, odnosno opisane pravokutnike pseudotrapeza T_k. Površinu od T nadalje promatramo pomoću površina pravokutnika.

Napomena 2.
U daljnjem tekstu pojmovi upisani i opisani pravokutnici odnose se na to jesu li upisani ili opisani u odnosu na pseudotrapez T_k.

Pogledajmo najprije upisane pravokutnike. Neka je pravokutnik P_k određen točkama x_{k-1} i x_k.

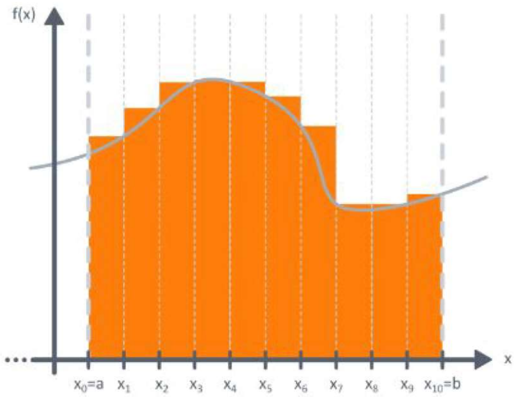


Slika 2.2: Donje Darbouxove sume; slika je preuzeta iz [7].

Vidimo da je duljina dvije stranice jednaka $x_k - x_{k-1}$, a duljinu druge dvije stranice označimo s m_k, gdje je $m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}, k = 1, \ldots, n$.
Zaključno, površina upisanog pravokutnika P_k je $m_k(x_k - x_{k-1})$. Zbrojimo li površine svih upisanih pravokutnika dobivamo donju Darbouxovu sumu:

$$s = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}).$$

Učinimo isto s opisanim pravokutnicima. Duljina dvije stranice je ponovno $x_k - x_{k-1}$, a duljinu druge dvije stranice označimo s M_k. Za pravokutnik P_k vrijedi da je $M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$, $k = 1, \ldots, n$, jer ovdje imamo opisane pravokutnike. Očito, površina opisanog pravokutnika P_k je $M_k(x_k - x_{k-1})$. Na sljedećoj slici možemo vidjeti opisane pravokutnike.



Slika 2.3: Gornje Darbouxove sume; slika je preuzeta iz [7].

Zbranjem površina svih opisanih pravokutnika dobivamo gornju Darbouxovu sumu:

$$S = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}).$$

Definirajmo skup A kao skup svih donjih Darbouxovih suma, a skup B svih gornjih Darbouxovih suma funkcije f na segmentu $[a,b]$. Uočimo da za različite subdivizije možemo dobiti različite pravokutnike i njihove površine pa samim time različite donje i gornje Darbouxove sume. Uvodimo oznake $I_d = \sup A$ te $I_g = \inf B$. Tako dolazimo do sljedeće važne definicije.

Definicija 3.
Broj I_d nazivamo donji Riemannov integral, a I_g gornji Riemannov integral funkcije f na segmentu $[a,b]$.

Razmislimo malo, ako uzmemo supremum donjih Darbouxovih suma moći ćemo se maksimalno približiti grafu funkcije f što je također slučaj s infimumom gornjih Darbouxovih suma. Idelni su nam slučajevi kada se gornji i donji integral izjednače. To nas dovodi do sljedeće važne definicije.

Definicija 4.
Za funkciju $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ koja je ograničena na segmentu $[a,b]$ kažemo da je integrabilna u Riemannovom smislu ili Riemann integrabilna na segmentu $[a,b]$ ako je I_d=I_g. Tada se njihova zajednička vrijednost I_r naziva Riemannov integral funkcije f na segmentu $[a,b]$. Za Riemannov integral imamo sljedeće oznake:

$$I_r = \int_{[a,b]} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f = \int_a^b f.$$

Napomena 3.
Prethodne dvije definicije opisuju jednostruki Riemannov integral. Do višestrukog Riemannovog integrala tek moramo doći.

Ovdje možemo navesti i geometrijsku interpretaciju određenih integrala: Integral $\int_a^b f(x)dx$ može se interpretirati kao površina ispod grafa funkcije f i iznad osi x u granicama od a do b. Ukoliko je funkcija f pozitivna na segmentu $[a,b]$ tada je ta površina jednaka $\int_a^b f(x)dx$. U suprotnom, površina je jednaka apsolutnoj vrijednosti istog integrala.

Nadalje, rješavanjem jednostrukog Riemannovog integrala funkcije f dobivamo pripadnu primitivnu funkciju F. Sljedeća definicija govori više o tome. Definicija spominje pojam "otvoreni interval". Radi se o intervalu koji ne uključuje niti jednu granicu. Primjerice, skup $S = \{x : x \in (1,2)\}$ je skup svih realnih brojeva x između brojeva 1 i 2, ali bez da uključimo granice 1 i 2.

Definicija 5.
Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval i $f : I \to \mathbb{R}$. Primitivna funkcija funkcije f na skupu I je svaka funkcija $F : I \to \mathbb{R}$ sa svojstvom $F^{'}(x) = f(x)$, za svaki $x \in I$.

Nakon što smo definirali primitivnu funkciju postavlja se logično pitanje koliko jedna funkcija f ima primitivnih funkcija F i koliko se pripadne primitivne funkcije međusobno razlikuju. Sljedeća napomena nam daje odgovore.

Napomena 4.
Ako su F_1 i F_2 dvije primitivne funkcije funkcije f, tada postoji konstanta $C \in \mathbb{R}$ takva da vrijedi $F_2 = F_1 + C$.

Drugim riječima, funkciji f pripada beskonačno mnogo primitivnih funkcija F i one se razlikuju samo za konstantu. Pogledajmo sljedeći primjer.

Primjer 3.
Zadana je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^3$. Navedimo neke njezine primitivne funkcije i funkciju koja joj nije primitivna.

Rješenje:
Jedna primitivna funkcija je $F_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_1(x) = x^4 - 4$. Druga može biti $F_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_2(x) = x^4 + 7$. Očito, vrijedi svojstvo iz definicije $F_1^{'}(x) = f(x)$ i $F_2^{'}(x) = f(x)$.
S druge strane, za funkciju $F_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_3(x) = x^2 - 1$ ne vrijedi svojstvo $F_3^{'}(x) = f(x)$ jer je $F_3^{'}(x) = 2x \neq 4x^3 = f(x)$ pa F_3 ne može biti primitivna funkcija funkcije f.

Nakon što smo objasnili primitivnu funkciju navodimo važan teorem za rješavanje određenih integrala koji nam daje Newton-Leibnizovu formulu.

Teorem 1. (vidjeti [2, Teorem 5.11])
Neka je f neprekidna funkcija na otvorenom intervalu I i F je bilo koja primitivna funkcija funkcije f na I. Onda za svaki segment $[a,b] \subsetneq I$ vrijedi:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Formulu iz prethodnog teorema nazivamo Newton-Leibnizova formula. Dokaz teorema može se pronaći u [2]. U sljedećem teoremu navedimo neka korisna svojstva Riemannovog integrala:

Teorem 2. (vidjeti [2, Teorem 5.3])
Neka su $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilne funkcije na $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:

- Za proizvoljne $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ funkcija $\alpha f + \beta g$ je integrabilna na $[a,b]$ i vrijedi

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

- Ako je $f \leq g$ na $[a,b]$, tada $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.
- Vrijedi:

$$|\int_a^b f| \leq |\int_a^b f| \leq (b-a) \sup_{[a,b]} f.$$

Dokaz prethodnog teorema može se naći u [2]. Sada imamo sav potreban alat za rješavanje jednostrukog Riemannovog integrala pa krenimo sa sljedećim primjerom.

Primjer 4.
Izračunajmo Riemannov integral funkcije $f(x) = x^2 + 5$ na segmentu [0,3].

Rješenje:
Dobivamo sljedeći integral:

$$\int_0^3 (x^2+5)dx = (\frac{x^3}{3} + 5x)\Big|_0^3 = \frac{27}{3} + 15 = 24.$$

Rezultat kojeg smo dobili je zapravo površina ispod krivulje f u granicama od 0 do 3. Vidimo da smo za uvrštavanje granica u primitivnu funkciju koristili Newton-Leibnizovu formulu. Računanje površine jedna je od najpoznatijih primjena integrala. Vidjeli smo da postoji Riemannov integral funkcije f na zadanom segmentu pa kažemo da je ova funkcija Riemann integrabilna. No, je li svaka ograničena funkcija Riemann integrabilna? Pogledajmo sljedeći primjer:

Primjer 5.
Zadana je funkcija $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ na sljedeći način:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Obzirom kako je definirana funkcija f možemo zaključiti da je $\inf f{=}0$ što u konačnici daje $I_d = 0$. Također, $\sup f{=}1$ što daje $I_g = 1$. Vidimo da je $I_g \neq I_d$ pa funkcija f, iako je ograničena na segmentu [0,1], nije integrabilna.

U prethodnom primjeru vidjeli smo da su različiti donji i gornji Riemannov integral pa funkcija f nije Riemann integrabilna. Dakle, nisu sve ograničene funkcije Riemann integrabilne. S jednostrukim integralima više nećemo duljiti već ćemo krenuti s prvom skupinom višestrukih integrala, a to su dvostruki integrali. Više o jednostrukim integralima može se pronaći u [2] i [3].

3 | Dvostruki integrali

Sada imamo sve potrebne temelje za proučavanje višestrukih integrala. Oni mogu biti dvostruki, trostruki ili jednostavno n-terostruki. U ovom poglavlju ćemo se koncentrirati na dvostruke integrale.

Naime, neka je $I = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$ zatvoreni pravokutnik, a $f : I \to \mathbb{R}$ ograničena realna funkcija. Neka integral $\int_I f$ predstavlja volumen tijela koji je odozgo omeđen grafom funkcije f u određenim granicama. Mi želimo definirati takav integral.
Sada ćemo uzeti razdiobe segmenata $[a, b]$ i $[c, d]$. Neka je $\rho_x = \{a = x_0 < \ldots < x_k = b\}$ razdioba segmenta $[a, b]$ i $\rho_y = \{c = y_0 < \ldots < y_l = d\}$ razdioba segmenta $[c, d]$. Sukladno tome, razdiobu od I označimo s $\rho = (\rho_x, \rho_y)$. Nadalje, definiramo pravokutnike razdiobe ρ s $I_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{i-1}, y_i], i \in \{1, \ldots, k\}; j \in \{1, \ldots, l\}$. Također, označimo s $\pi(I_{ij})$ površinu pravokutnika I_{ij} i s $\pi(I)$ površinu cijelog pravokutnika I. Očito je da vrijedi:

$$\pi(I) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} I_{ij}. \tag{3.1}$$

Uvodimo sljedeće oznake:

- $m := m(f) := \inf f(I)$,
- $M := M(f) := \sup f(I)$,
- $m_{ij} := m_{ij}(f) := \inf f(I_{ij}) \quad \forall i, j$,
- $M_{ij} := M_{ij}(f) := \sup f(I_{ij}) \quad \forall i, j$.

Zaključujemo da vrijedi:

$$m \leq m_{ij} \leq M_{ij} \leq M, \quad \forall i, j. \tag{3.2}$$

Donja i gornja Darbouxova suma funkcije f obzirom na razdiobu ρ definirane su s:

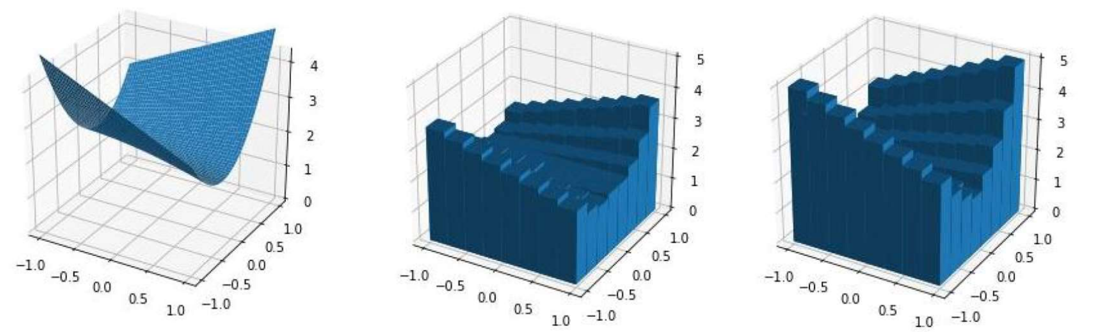
$$s(f,\rho) := \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} m_{ij} I_{ij},$$

$$S(f,\rho) := \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} M_{ij} I_{ij}.$$

Iz (3.1) i (3.2) vidimo da vrijede sljedeće nejednakosti:

$$m\pi(I) \leq s(f,\rho) \leq S(f,\rho) \leq M\pi(I), \quad \forall i,j. \tag{3.3}$$

U ovom trenutku nam je možda teško zamisliti kako izgledaju donja i gornja Darbouxova suma kada je domena funkcije podskup od $\mathbb{R}^2$. Sljedeće slike prikazuju graf funcije $z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, z(x,y) = xy + 2y^2 + 2$ (lijeva slika) te kako bi izgledala donja Darbouxova suma (slika u sredini) i gornja Darbouxova suma (desna slika):



Slika 3.1: Graf i Darbouxove sume obzirom na funkciju $z(x,y) = xy + 2y^2 + 2$; slika je preuzeta iz [8].

Možemo definirati donji Riemannov integral kao supremum donjih Darbouxovih suma:

$$\underline{\int} := \sup\{s(f,\rho) : \rho \in \rho(I)\},$$

gdje $\rho(I)$ označava skup svih razdioba od I. Također definiramo i gornji Riemannov integral kao infimum gornjih Darbouxovih suma:

$$\overline{\int} := \inf\{S(f,\rho) : \rho \in \rho(I)\}.$$

Sada možemo definirati Riemannov integral na pravokutniku I. Takav integral još se naziva i dvostruki Riemannov integral.

Definicija 6.
Za ograničenu funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ kažemo da je integrabilna u Riemannovom smislu ili Riemann integrabilna na pravokutniku I ako vrijedi da je:

$$\underline{\int} = \overline{\int}.$$

Tada se zajednička vrijednost tih integrala naziva Riemannov integral funkcije f na pravokutniku I, a oznaka je $\int_I f$.

Napomena 5.
Prethodna definicija odnosi se na dvostruki Riemannov integral. Također su uobičajene i oznake:

$$\int_I f(x,y)dxdy,$$
$$\iint_I f(x,y)dxdy.$$

Uočimo sljedeće: ako je funkcija f Riemann integrabilna, onda postoji njezin Riemannov integral i neka je njegova vrijednost p. Tada je Riemannov integral p jednak gornjem i donjem Riemannovom integralu i vrijedi:

$$\sup\{s(f,\rho) : \rho \in \rho(I)\} = \underline{\int} = \int_I = \overline{\int} = \inf\{S(f,\rho) : \rho \in \rho(I)\}.$$

Za proizvoljan $d \in \{s(f,\rho) : \rho \in \rho(I)\}$ vrijedi da je manji ili jednak od supremuma toga skupa koji također iznosi p. Dakle, $d \leq p$. Također za proizvoljan $g \in \{S(f,\rho) : \rho \in \rho(I)\}$ vrijedi da je veći ili jednak od infimuma tog skupa, a on iznosi p. Očito vrijedi $p \leq g$ pa tako i $d \leq p \leq g$. Zbog proizvoljnosti d i g doznajemo da je svaki element iz $\{s(f,\rho) : \rho \in \rho(I)\}$ manji ili jednak $\{S(f,\rho) : \rho \in \rho(I)\}$ i dobivamo da je

$$\underline{\int} \leq \overline{\int}. \tag{3.4}$$

Nakon što smo definirali dvostruki Riemannov integral i odredili odnos između donjeg i gornjeg dvostrukog Riemannovog integrala moramo proći kroz njegova svojstva koja će nam biti korisna za rješavanje problema. Znamo da za jednostruke integrale vrijedi svojstvo linearnosti. Sljedeći teorem govori nam o tom svojstvu za dvostruke integrale.

Teorem 3. (vidjeti [5, Teorem 15.3])
Neka su funkcije f i g integrabilne na pravokutniku $I = [a, b] \times [c, d]$ i neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tada je i funkcija $\alpha f + \beta g$ također integrabilna na I i vrijedi:

$$\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g.$$

Dokaz
Podijelit ćemo dokaz u dva dijela. Znamo da svojstva aditivnost i homogenost zajedno daju linearnost. Radi jednostavnosti dokaza svaki od ova dva svojstva ćemo pokazati posebno:

a) aditivnost:

Moramo pokazati da vrijedi:

$$\int (f + g) = \int f + \int g.$$

Krenimo ovako: Infimum funkcije $(f + g)$ na intervalu I zasigurno nije veći zbroja infimuma f i g. Dakle, možemo reći da je $M_{ij}(f + g) \leq M_{ij}(f) + M_{ij}(g)$. Stoga je:

$$S(f + g, \rho) \leq S(f, \rho) + S(g, \rho).$$

Ako ova nejednakost vrijedi za gornje Darbouxove sume neovisno o subdiviziji ρ, onda sigurno vrijedi i za infimume svih subdivizija. Dakle:

$$\inf\{S(f + g, \rho) : \rho \in \rho(I)\} \leq \inf\{S(f, \rho) : \rho \in \rho(I)\} + \inf\{S(g, \rho) : \rho \in \rho(I)\}.$$

Iz toga direktno zaključujemo:

$$\overline{\int}(f + g) \leq \overline{\int} f + \overline{\int} g.$$

Kako su f i g integrabilne funkcije njihovi gornji Riemannovi integrali su jednaki njihovim Riemannovim integralima. Dakle,

$$\overline{\int}(f + g) \leq \int f + \int g. \tag{3.5}$$

Sličan postupak provedemo i s donjim Darbouxovim sumama. Prije svega vrijedi da je $m_{ij}(f + g) \geq m_{ij}(f) + m_{ij}(g)$ i zaključimo:

$$s(f + g, \rho) \geq s(f, \rho) + s(g, \rho).$$

Uzimamo supremum svake od suma i sjetimo se da su f i g integrabilne. Slijedi nam:

$$\underline{\int}(f+g) \geq \int f + \int g. \tag{3.6}$$

Korištenjem svojstva tranzitivnosti iz (3.4), (3.5) i (3.6) slijedi nam:

$$\int f + \int g \leq \underline{\int}(f+g) \leq \overline{\int}(f+g) \leq \int f + \int g.$$

Primjenom definicije integrabilnosti na funkciju $f+g$ zaključujemo da vrijedi jednakost među ovim izrazima. Dakle, funkcija $f+g$ je integrabilna i vrijedi svojstvo aditivnosti.

b) homogenost:

Dokazujemo da vrijedi

$$\int(\alpha f) = \alpha \int f.$$

Za $\alpha = 0$ jednakost trivijalno vrijedi. Za $\alpha > 0$ možemo raspisati sljedeće:

$$\begin{aligned}\underline{\int}\alpha f &= \sup\{s(\alpha f, \rho) : \rho \in \rho(I)\} = \alpha \sup\{s(f,\rho) : \rho \in \rho(I)\} \\ &= \alpha \underline{\int} f = \alpha \int f.\end{aligned}$$

Na isti način dobivamo da je

$$\overline{\int}\alpha f = \alpha \overline{\int} f = \alpha \int f.$$

Sada jednostavno primjenimo definiciju integrabilnosti na funkciju αf i slijedi nam:

$$\int(\alpha f) = \alpha \int f.$$

Još moramo pokazati da vrijedi homogenost za negativne brojeve. Uzmimo jednostavno $-\alpha < 0$. Dobivamo:

$$\begin{aligned}\underline{\int}(-\alpha f) &= \sup\{s(-\alpha f, \rho) : \rho \in \rho(I)\} = -\alpha \inf\{s(f,\rho) : \rho \in \rho(I)\} \\ &= -\alpha \overline{\int} f = -\alpha \int f.\end{aligned}$$

Također dobivamo

$$\overline{\int}(-\alpha f) = -\alpha \underline{\int} f = -\alpha \int f.$$

Očito je $-\alpha f$ integrabilna i vrijedi

$$\int(-\alpha f) = -\alpha \int f.$$

Nakon što smo provjerili sve slučajeve možemo sa sigurnošću reći da je homogenost zadovoljena i da vrijedi linearnost prilikom rješavanja integrala.

$\square$

Činjenica da možemo koristiti linearnost za rješavanje dvostrukog integrala uvelike može pojednostavit stvari. Nažalost, za primjere se moramo još malo strpiti. Budući da koristimo funkcije dviju varijabli, još ne znamo po kojoj varijabli najprije integriramo i možemo li dvostruki integral tretirati kao dva jednostruka integrala. Te podatke nam otkriva Fubinijev teorem. Da bismo ga razumjeli moramo se još upoznati sa skupovima koji imaju duljinu nula i skupovima mjere nula.

Definicija 7.
Za omeđen skup $A \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da ima duljinu nula ako za sve $\epsilon > 0$ postoji konačno mnogo segmenata $I_j = [\alpha_j, \beta_j], j \in 1, \dots k$ takvih da je $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} I_j$ i $\sum_{j=1}^{k} l(I_j) < \epsilon$. Pri tome $l(I_j) = \beta_j - \alpha_j$ označava uobičajenu duljinu segmenta I_j.

Sada ćemo navesti primjer skupa koji ima duljinu nula i vidjet ćemo da postoje skupovi koji ne spadaju u takvu skupinu skupova.

Primjer 6.
Očito svaki konačan skup ima duljinu nula. Za skup $\{1, 2, 3, 4\}$ postoje "segmenti" $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ i $\{4\}$ tako da vrijede uvjeti iz Definicije 7. Ako uzmemo beskonačan skup $\mathbb{R}^+$ za njega logično ne možemo pronaći konačno mnogo segmenata I_j tako da vrijedi $\mathbb{R}^+ \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} I_j$.

Kada smo se upoznali sa skupovima koji imaju duljinu nula vidjet ćemo i da postoje skupovi mjere nula. Sljedeća definicija nam govori o tome.

Definicija 8.
Za skup $A \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je mjere nula ako za sve $\epsilon > 0$ postoji niz segmenata $I_j, j \in \mathbb{N}$ takvih da je $A \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j$ i $\sum_{j=1}^{\infty} l(I_j) < \epsilon$.

Pokažimo primjenu prethodne definicije na sljedećem primjeru.

Primjer 7.
Ponovno, svaki konačan skup je skup mjere nula. Skup svih parnih brojeva $2\mathbb{N}$ je skup mjere nula jer za njega postoje "segmenti" $\{2\}$, $\{4\}$, $\{6\}$, $\dots$ takih da zadovoljavaju uvjete iz Definicije 8. S druge strane, skup svih $x \in [7, 9]$ nije skup mjere nula jer sadrži sve realne brojeve između 7 i 9 pa je duljina ovog skupa jednaka 2. Prema tome ne može biti skup mjere nula.

Napomena 6.
Prethodna definicija i primjer opisuju skupove jednodimenzionalne mjere nula. Postoje i skupovi dvodimenzionalne mjere nula, kao na primjer skup točaka u ravnini. Skup svih $W = \{(x, x+1) : x \in \mathbb{N}\}$ je skup dvodimenzionalne mjere nula. Uzmemo niz zatvorenih pravokutnika koji su zapravo točke u koordinatnom sustavu oblika $I_j = (j, j+1)$, gdje je $j \in \mathbb{N}$. U dvodimezionalnom prostoru nećemo koristiti duljinu l već površinu P, a površina točke je 0. Tada je $W \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j$ i $\sum_{j=1}^{\infty} P(I_j) = 0 < \epsilon$.

Navedimo i pokažimo sada Fubinijev teorem koji je jedan od najvažnijih teorema u ovom području i bez njega ne možemo riješiti dvostruke integrale.

Teorem 4. (Fubinijev teorem) (vidjeti [5, Teorem 19.1])
Neka je $I = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}$ zatvoreni pravokutnik, a $f : I \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija takva da je D skup točaka u kojima funkcija f nije neprekidna skup (dvodimenzionalne) mjere nula. Ako je za sve $x \in [a, b]$ skup $D_x = \{y \in [c, d] : (x, y) \in D\}$ skup (jednodimenzionalne) mjere nula, tada vrijede sljedeće tri tvrdnje:

- funkcija $y \longmapsto f(x, y)$ je Riemann integrabilna na $[c, d]$ što vrijedi za sve $x \in [a, b]$.
- funkcija $x \longmapsto \int_c^d f(x, y)dy$ je Riemann integrabilna na $[c, d]$.
- vrijedi jednakost:

$$\int_I f = \int_a^b (\int_c^d f(x, y)dy)dx. \tag{3.7}$$

Napomena 7.
Tvrdnje teorema vrijede i kada x i y zamijene uloge.

Dokaz Fubinijevog teorema
Za fiksan $x \in [a, b]$ je funkcija $y \longmapsto f(x, y)$ neprekidna osim eventualno u nekoj točki skupa D_x. Uz prethodnu napomenu funkcija je Riemann integrabilna na $[c, d]$. Označimo:

$$F(x) = \int_c^d f(x, y)dy \tag{3.8}$$

gdje $F : [a, b] \to \mathbb{R}$. Moramo dokazati da je funkcija F Riemann integrabilna na $[a, b]$.
Prisjetimo se kako smo uopće došli do definicije Riemann integrabilnosti. Krenuli smo od razdiobe $\rho = (\rho_x, \rho_y)$ gdje su $\rho_x = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b\}$ i $\rho_y = \{c = y_0 < y_1 < \ldots < y_k = d\}$ redom razdiobe segmenata $[a, b]$ i $[c, d]$.

Uvodimo pojam integralna suma funkcije F vezane za razdiobu ρ_x kao:

$$\sigma(F,\rho_x,t_1,\dots,t_k)=\sum_{i=1}^{k}F(t_i)(x_i-x_{i-1}),\quad t_i\in[x_{i-1},x_i],\quad i\in\{1,\dots,k\}. \tag{3.9}$$

Integral (3.8) integriramo u granicama od c do d. Ako uzmemo točke subdivizije ρ_y, tada možemo integrirati u granicama od y_{j-1} do y_j, gdje $j\in\{1,\dots,l\}$ pa će suma takvih integrala biti jednaka integralu (3.8). Matematički ćemo to zapisati ovako:

$$\int_c^d f(x,y)dy=\sum_{j=1}^{l}(\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)dy). \tag{3.10}$$

Koristeći (3.8), (3.9) i (3.10) dobivamo:

$$\sigma(F,\rho_x,t_1,\dots,t_k)=\sum_{i=1}^{k}(\sum_{j=1}^{l}(\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)dy))(x_i-x_{i-1}). \tag{3.11}$$

Uz (3.11) i činjenicu da je $m_{ij}\le f(t_i,y)\le M_{ij}$ zaključujemo:

$$s(f,\rho)\le\sigma(F,\rho_x,t_1,\dots,t_k)\le S(f,\rho). \tag{3.12}$$

Za gornju i donju Darbouxovu sumu funkcije F u odnosu na subdiviziju ρ_x vrijedi:

$$s(F,\rho_x)=\inf\{\sigma(F,\rho_x,t_1,t_k)\},$$
$$S(F,\rho_x)=\sup\{\sigma(F,\rho_x,t_1,t_k)\},$$

pa uz (3.12) vrijedi:

$$s(f,\rho)\le s(F,\rho_x)\le S(F,\rho_x)\le S(f,\rho). \tag{3.13}$$

Nadalje, za sve $\epsilon>0$ postoji razdioba ρ pravokutnika I takva da vrijedi da je $S(f,\rho)-s(f,\rho)\ge 0$ pa uz (3.13) vrijedi da je $S(f,\rho_x)-s(f,\rho_x)\ge 0$. Prema tome funkcija F je Riemann integrabilna na $[a,b]$.
Još samo preostaje pokazati da vrijedi formula (3.7). Za svaku razdiobu ρ pravokutnika I vrijedi:

$$s(f,\rho)\le\int_I f\le S(f,\rho).$$

Također:

$$s(f,\rho)\le s(F,\rho)\le\int_a^b F(x)dx\le S(F,\rho)\le S(f,\rho).$$

Iz toga možemo zaključiti da vrijedi:

$$|\int_I f - \int_a^b F(x)dx| \leq S(f,\rho) - s(f,\rho).$$

Prisjetimo se da je f Riemann integrabilna. Za desnu stranu nejednadžbe vrijedi da je manja od ϵ i to vrijedi za svaki $\epsilon > 0$. Kako je i lijeva strana nenegativan izraz, a manja je ili jednaka od desne, tada vrijedi:

$$|\int_I f - \int_a^b F(x)dx| < \epsilon,$$

te dolazimo do formule koju smo i trebali dokazati:

$$\int_I f = \int_a^b F(x)dx = \int_a^b (\int_c^d f(x,y)dy)dx.$$

$\square$

Pogledajmo sada kako to funkcionira na primjerima.

Primjer 8.
Izračunajmo Riemannov integral funkcije $z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $z(x,y) = x^2 + y + 17$ u granicama $[1,2] \times [0,2]$.

Rješenje:

$$\int z\,dv = \int_{[1,2]} \int_{[0,2]} z(x,y)dxdy = \int_{[1,2]} \Big(\int_{[0,2]} z(x,y)dy \Big) dx.$$

Posljednja jednakost vrijedi jer se radi o formuli iz Fubijevog teorema. Nakon uvrštavanja funkcije i granica integracije vidimo integral po varijabli y unutar integrala po varijabli x pa najprije njega možemo posebno riješiti. Ovdje varijablu x tretiramo kao konstantu.

$$\begin{aligned}\int_{[0,2]} (x^2 + y + 17)dy &= \int_{[0,2]} x^2 dy + \int_{[0,2]} ydy + \int_{[0,2]} 17dy \\ &= x^2 y\Big|_0^2 + \frac{y^2}{2}\Big|_0^2 + 17y\Big|_0^2 = 2x^2 + 36.\end{aligned}$$

Dobiveni rezultat uvrstimo u gornji integral i dobivamo:

$$\begin{aligned}\int_{[1,2]} (2x^2 + 36)dx = \int_{[1,2]} 2x^2 dx + \int_{[1,2]} 36dx = 2\frac{y^3}{3}\Big|_1^2 + 36x\Big|_1^2 \\ = \frac{16}{3} - \frac{2}{3} + 72 - 36 = \frac{122}{3}.\end{aligned}$$

Naravno, postoje i funkcije više varijabli koje nisu Riemann integrabilne. Sljedeći primjer funkcije dvije varijable potvrđuje tu činjenicu.

Primjer 9. (vidjeti [5, Primjer 15.1])
Promatramo funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ na zatvorenom pravokutniku $[a,b] \times [c,d]$ i pogledajmo njezin gornji i donji Riemannov integral. Neka je funkcija definirana ovako:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{ako su } x, y \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Za svaku razdiobu ρ i za svaki izbor i, j je $m_{ij} = 0$, a $M_{ij} = 1$. Iz toga slijedi da je $s(f,\rho) = 0$ i $S(f,\rho) = 1$ pa zaključno $\underline{\int} = 0 \neq 1 = \overline{\int}$.

Nakon što smo naveli primjer funkcije koja je i koja nije Riemann integrabilna možemo navesti još neke korisne informacije za rješavanje integrala. U primjeru s Riemann integrabilnom funkcijom smo rješavali integral najprije po varijabli y, a potom po x. No, mogli smo i obratno. Iako to možemo zaključiti iz Fubinijevog teorema postoji i korolar istog teorema koji govori o tome.

Korolar 1. (vidjeti [5, Korolar 19.2])
Neka je $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija. Ponovno, skup D sadrži sve točke u kojima funkcija f nije neprekidna i to je skup (dvodimenzionalne) mjere nula. Definiramo skupove:

$$D_x = \{y : (x,y) \in D\} \subseteq [c,d],$$
$$D_y = \{x : (x,y) \in D\} \subseteq [a,b].$$

Skupovi D_x i D_y su skupovi (jednodimenzionalne) mjere nula. Tada vrijedi jednakost:

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx.$$

Dakle, iz prethodnog korolara saznajemo da je dozvoljeno mijenjati redoslijed integracije. Uočimo kako smo u prethodnom korolaru pretpostavili da postoje točke u kojima funkcija f nije neprekidna. Zamislimo da takvih točaka nema već da je funkcija neprekidna na cijelom zadanom skupu. Tada dolazimo do još jednog korolara.

Korolar 2. (vidjeti [5, Korolar 19.3])
Ako je $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija, tada vrijedi:

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx.$$

Prisjetimo se Primjera 8. Funkcija f je neprekidna, a integrirali smo je najprije po y, a zatim po x. Ništa nas ne spriječava da pokušamo obratno, a to ćemo napraviti u sljedećem primjeru.

Primjer 10.
Integrirajmo funkciju $z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $z(x,y) = x^2 + y + 17$ u granicama od $[1,2] \times [0,2]$ najprije po x pa po y.

Rješenje:

$$\int z\, dv = \int_{[1,2]} \int_{[0,2]} z(x,y)dxdy = \int_{[0,2]} \Big(\int_{[1,2]} z(x,y)dx \Big) dy.$$

Izračunamo unutarnji integral posebno. Ovdje se varijabla y ponaša kao konstanta. Dobivamo:

$$\begin{aligned}\int_{[1,2]} (x^2 + y + 17)dx &= \int_{[1,2]} x^2 dx + \int_{[1,2]} ydx + \int_{[1,2]} 17dx \\ &= \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 + yx\Big|_1^2 + 17x\Big|_1^2 = y + \frac{58}{3}.\end{aligned}$$

Dobiveni rezultat uvrštavamo u početni integral:

$$\begin{aligned}\int_{[0,2]} (y + \frac{58}{3})dy &= \int_{[0,2]} ydy + \int_{[0,2]} \frac{58}{3}dy = \frac{y^2}{2}\Big|_0^2 + \frac{58}{3}\Big|_0^2 \\ &= \frac{4}{2} + 0 + \frac{58}{3}(2-0) = 2 + \frac{116}{3} = \frac{122}{3}.\end{aligned}$$

Vidimo da smo dobili isti rezultat, a to nam je i garantirao navedeni korolar.

3.1 Primjena dvostrukih integrala

Najvažnija primjena dvostrukih integrala je računanje volumena tijela omeđenog grafom nenegativne funkcije u određenim granicama. Označimo traženi volumen s V, a tijelo čiji volumen tražimo s Ω. Volumen računamo na sljedeći način:

$$V(\Omega) = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dP,$$

gdje je $dP = dxdy$. Zaključimo da smo u Primjeru 8. (i u Primjeru 10.) zapravo izračunali volumen tijela omeđenog grafom funkcije z. Vidimo da funkcija z sadrži tri varijable. Ako je $z = f(x,y) = 1$, tada je volumen ispod krivulje jednak površini zadanog skupa $I = [a,b] \times [c,d]$. Dakle, površina zadanog pravokutnika je:

$$P(\Omega) = \int_a^b \int_c^d dP.$$

Zadatak može biti i drugačije zadan. Moguće je da se ne traži volumen ispod krivulje nego među krivuljama. Neka je Ω tijelo omeđeno krivuljama $z = f(x,y)$ i $z = g(x,y)$ pri čemu je $f(x,y) \geq g(x,y)$, za sve $(x,y) \in I$, gdje je $I = [a,b] \times [c,d]$ područje integracije. Tada je volumen tijela Ω jednak:

$$V(\Omega) = \int_a^b \int_c^d [f(x,y) - g(x,y)] dxdy.$$

Korisno je znati da možemo računati volumen tijela omeđenog krivuljama. Pogledajmo u sljedećem primjeru kako to funkcionira:

Primjer 11.
Izračunajmo volumen tijela omeđenog krivuljama $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + x + y^2 + 15$ i $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = y^2 + x - 5$ na području integracije $I = [2,3] \times [1,4]$.

Rješenje:
Naslutimo da bi moglo vrijediti $f(x,y) \geq g(x,y)$ na cijelom I pa provjerimo to:

$$\begin{aligned} f(x,y) \geq g(x,y) \quad &\iff \quad x^2 + x + y^2 + 15 \geq y^2 + x - 5 \\ &\iff \quad x^2 + 15 \geq -5 \\ &\iff \quad x^2 \geq -20. \end{aligned}$$

Obzirom na $x \in [2,3]$ zaista vrijedi $x^2 \geq -20$ pa tako i $f(x,y) \geq g(x,y)$ na cijelom I. Kada to ne bi bilo tako, onda bi morali područje integracije I podijeliti na dva područja I_1 i I_2 pa posebno riješiti integral gdje je $f(x,y) \geq g(x,y)$, a posebno gdje je $f(x,y) \leq g(x,y)$. Izračunajmo sada volumen polaznog tijela. Dobivamo:

$$\begin{aligned} V &= \int_2^3 \int_1^4 [f(x,y) - g(x,y)] dxdy \\ &= \int_2^3 \int_1^4 [x^2 + x + y^2 + 15 - y^2 - x + 5] dxdy \\ &= \int_2^3 \int_1^4 [x^2 + 20] dxdy. \end{aligned}$$

Razdvojimo prethodni integral na dva integrala i primijetimo da je drugi integral jednak površini I. Dobivamo:

$$\int_2^3 x^2dx \int_1^4 dy + 20\int_2^3 \int_1^4 dxdy = 3\int_2^3 x^2dx + 60 = x^3\Big|_2^3 + 3$$
$$= 27 - 8 + 60 = 79.$$

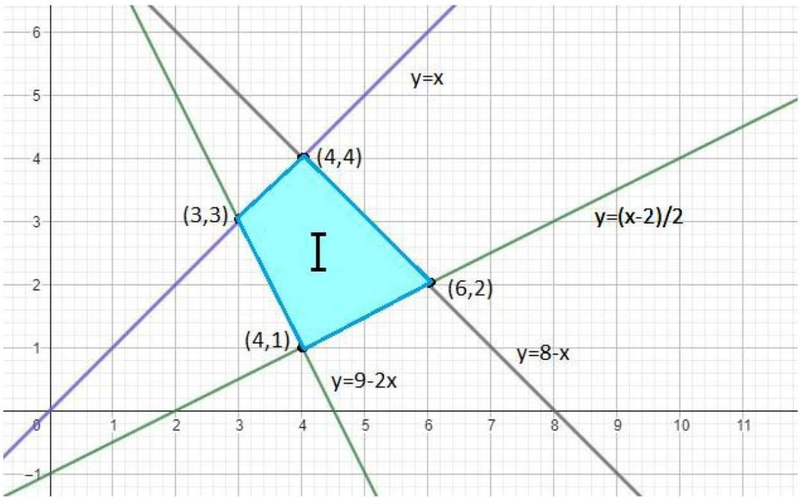
Dakle, površina, odnosno traženi volumen jednak je 79.

Prethodni primjer bio je jednostavan. Međutim, nismo ni svjesni koliko se primjeri mogu zakomplicirati. Ponekad nam niti granice integracije nisu zadane, a takve primjere je teško riješiti bez skiciranja grafova zadanih funkcija. Tada obično imamo puno više posla za računanje integrala. U nastavku slijedi takav primjer.

Primjer 12.
Neka je zadana ploha $z = x^2 + y$. Izračunajmo volumen tijela omeđenog plohom z te sljedećim ravninama:

$$g \ldots y = x, \quad h \ldots y = 8 - x, \quad p \ldots y = \tfrac{x-2}{2}, \quad q \ldots y = 9 - 2x.$$

Rješenje:
Prije svega skiciramo područje integracije I. To možemo vidjeti na sljedećoj slici:



Slika 3.2: Područje integracije I.

Na Slici 3.2. vidimo ravnine koje određuju područje integracije I. Jednostavnosti radi, postavili smo i točke u kojima se krivulje sijeku. Do tih točaka inače moramo doći izjednačavanjem funkcija što je očiti dokaz da ovdje imamo nešto više posla. Takve točke su nam potencijalne granice integracije. Izjednačimo određene funkcije da dođemo do tih točaka:

a) Izjednačimo ravnine g i h:

$$x = 8 - x \;\Rightarrow\; 2x = 8 \;\Rightarrow\; x = 4.$$

Zbog funkcije $g \ldots y = x$ vrijedi da je $y = 4$ i dobivamo točku $(4{,}4)$.

b) Izjednačimo ravnine p i q:

$$9 - 2x = \frac{x-2}{2} \;\Rightarrow\; 18 - 4x = x - 2 \;\Rightarrow\; 5x = 20 \;\Rightarrow\; x = 4.$$

Zbog funkcije $q \ldots y = 9 - 2x$ vrijedi da je $y = 1$ i dobivamo točku $(4{,}1)$.

c) Izjednačimo ravnine p i h:

$$8 - x = \frac{x-2}{2} \;\Rightarrow\; 16 - 2x = x - 2 \;\Rightarrow\; 3x = 18 \;\Rightarrow\; x = 6.$$

Zbog funkcije $h \ldots y = 8 - x$ vrijedi da je $y = 2$ i dobivamo točku $(6{,}2)$.

d) Izjednačimo ravnine g i q:

$$9 - 2x = x \;\Rightarrow\; 3x = 9 \;\Rightarrow\; x = 3.$$

Zbog funkcije $q \ldots y = x$ vrijedi da je $y = 3$ i dobivamo točku $(3{,}3)$.

Dobivene točke smo smjestili na Sliku 3.2. Uočimo da su koordinate točaka prirodni brojevi. Kada ih budemo uzimali kao granice integracije lakše ćemo računati s njima. Sada nam je potreban integral. Ako računamo integral najprije po varijabli y, onda po x, tada on izgleda ovako:

$$V = \int_3^4 \int_{9-2x}^{x} (x^2 + y)dydx + \int_4^6 \int_{\frac{x-2}{2}}^{8-x} (x^2 + y)dydx.$$

A obrnutim redoslijedom:

$$V = \int_1^2 \int_{\frac{y-9}{2}}^{2y-2} (x^2 + y)dxdy + \int_2^3 \int_{\frac{y-9}{2}}^{8-y} (x^2 + y)dxdy + \int_3^4 \int_{y}^{8-y} (x^2 + y)dxdy.$$

Tek sada smo došli u poznato područje: rješavanje integrala. Morali smo najprije skicirati područje integracije, izračunati granice i postaviti integrale. Vidimo da ništa od toga nije teško za napraviti, ali uz duži postupak lako je i pogriješiti.

Ipak, kada uspijemo postaviti integral napravili smo većinu posla. Sada biramo koju verziju integrala V želimo riješiti. Jednostavnosti radi, rješit ćemo prvu verziju. Prije toga razdvojimo dva integrala na četiri:

$$V = \int_3^4 x^2 dx \int_{9-2x}^{x} dy + \int_3^4 dx \int_{(9-2x)}^{x} ydy + \int_4^6 x^2 dx \int_{\frac{x-2}{2}}^{8-x} dy \; + \int_4^6 dx \int_{\frac{x-2}{2}}^{8-x} ydy$$
$$= \frac{81}{4} - \frac{13}{6} + 66 - 73 = \frac{133}{12}.$$

Ovim primjerom zaključujemo sadržaj vezan za dvostruke integrale. U nastavku ćemo promatrati dvostruke i ostale višestruke integrale.

4 | Višestruki integrali

Definirajmo sada integral više varijabli. Promatramo omeđene realne funkcije više varijabli $f : I \to \mathbb{R}$ definirane na nekom n-pravokutniku $I = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}$. Razdioba $\rho = (\rho_{x_1}, \ldots, \rho_{x_n})$ je uređena n-torka razdiobi $\rho_{x_i} = \{a_i = x_i^0 < \ldots < x_i^{k_i} = b_i\}$ segmenta $[a_i, b_i]$.
Za multiindeks $j := (j_1, \ldots, j_n)$ pripadni pravokutnik označavamo sa $I_j := [x_1^{j_1-1}, x_1^{j_1}] \times \ldots \times [x_1^{j_n-1}, x_1^{j_n}]$. Definiramo brojeve:

$$m_j = \inf f(I_j) \quad \text{i} \quad M_j = \sup f(I_j)$$

te donje i gornje Darbouxove sume:

$$s(f,\rho) := \textstyle\sum_j m_j v(I_j) \quad \text{i} \quad S(f,\rho) := \textstyle\sum_j M_j v(I_j),$$

gdje $v(I_j)$ označava volumen n-pravokutnika I_j. Na taj način ponovno dolazimo do donjeg i gornjeg Riemannovog integrala:

$$I_d = \underline{\int} := \sup\{s(f,\rho) : \rho \in \rho(I)\},$$

$$I_g = \overline{\int} := \inf\{S(f,\rho) : \rho \in \rho(I)\}.$$

Ponovno, zajednička vrijednost tih integrala, uz istu oznaku $\int_I f$ nazivamo nazivamo višestruki Riemannov integral funkcije f na n-pravokutniku I.

Za integral $\int_I f$ se mogu koristiti različite oznake poput $\int_I f\, dv$ ili $\int \int \ldots \int f(x_1, , x_n) dx_1 \ldots dx_n$. Sve navedene oznake predstavljaju **višestruki integral**.

Kod višestrukih integrala vrijedi potpuno ista Definicija 5. te Fubinijev teorem smijemo primijeniti i na ovoj razini. Dakle, redoslijed integracije nije važan niti kod višestrukih integrala. Bez smanjenja općenitosti u ovom poglavlju ćemo se baviti trostrukim intgralima jer jasno je kako možemo integrale poopćiti na četverostruke, peterostruke. Pogledajmo primjer fukcije koja je Riemann integrabilna:

Primjer 13.
Izračunajmo integral funkcije $w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $w = f(x,y,z) = z^3 + 4xy$ u granicama $[0,1] \times [2,6] \times [0,3]$.

Rješenje:
Razdvojimo integral ponovno na dva integrala. Vidjet ćemo da u oba integrala možemo postavljati redoslijed integracije kako želimo:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_2^6 \int_0^3 (z^3 + 4xy)dxdydz &= \int_0^3 z^3 dz \int_2^6 dy \int_0^1 dx + 4 \int_0^1 xdx \int_2^6 ydy \int_0^3 dz \\ &= 4\frac{x^4}{4}\Big|_0^3 + 12 \int_0^1 xdx \frac{y^2}{2}\Big|_6^2 = 81 + 6 \int_0^1 32xdx \\ &= 81 + 192\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = 81 + 96 = 177.\end{aligned}$$

Potražimo sada i funkciju koja nije Riemann integrabilna. Takvu uočavamo u sljedećem primjeru:

Primjer 14.
Zadana je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ na sljedeći način:

$$f(x,y,z) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}/\mathbb{N}, z \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Neka je funkcija f ograničena na zatvorenom pravokutniku $I = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$. Možemo zaključiti da je $\inf f = 0$ što daje $I_d = 0$. Također, $\sup f = 1$ što daje $I_g = 1$. Vidimo da je $I_g \neq I_d$ pa funkcija f nije integrabilna.

U Primjeru 13. vidimo da smo ponovno računali volumen tijela omeđenog krivuljom w u zadanim granicama. Možemo računati i volumen tijela omeđenog s više krivulja kao što smo vidjeli kod dvostrukih integrala. No, ovog puta ćemo kod primjene isprobati nešto drugo.

4.1 Primjena trostrukih integrala

Kako možemo računati volumen tijela tako je moguće i izračunati masu tijela primjenom trostrukih integrala. Za masu tijela moramo napraviti mali uvod. Naime, za volumen tijela ispod krivulje vrijedi formula:

$$V = \iiint_V f(x,y,z)dxdydz.$$

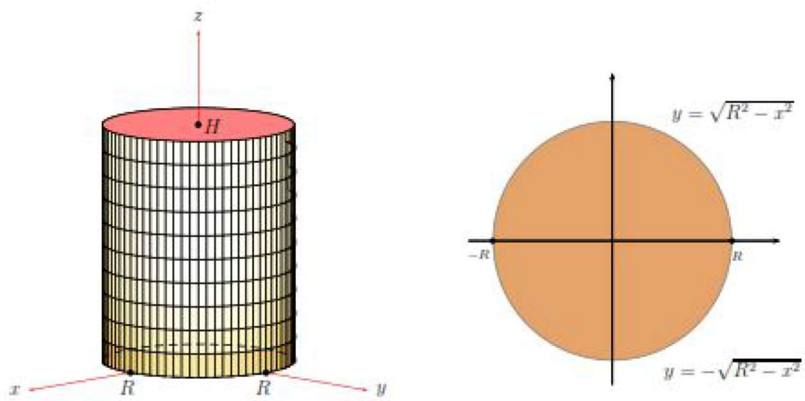
Neka je zadano područje integracije $I = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$. Kada bi $f(x, y, z)$ bilo jednako 1, tada bi V bio jednak upravo volumenu tijela $(b - a)(d - c)(f - e)$. Nadalje, fizika nam tvrdi da je masa tijela m jednaka $V\rho$, gdje ρ označava gustoću zadanog tijela. Ako još gustoću možemo tretirati kao funkciju $\rho(x, y, z)$ dobivamo formulu za masu tijela:

$$m = \iiint\limits_V \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

Primjer u nastavku prikazuje nam kako možemo izračunati masu određenog tijela.

Primjer 15. (vidjeti [4, Primjer 1.15])
Izračunajmo masu kružnog cilindra kojemu je visina H, a polumjer osnovice je jednak R.

Rješenje:
Na slici to izgleda ovako:



Slika 4.1: Cilindar - slika i baza; slika je preuzeta iz [4].

Kako se udaljavamo od osnovice gustoća tijela je proporcionalna za konstantu k. Tada funkcija gustoće izgleda ovako: $\rho(x, y, z) = kz$. Još moramo postaviti određeni integral. Visina z se kreće u granicama od 0 do H, dužina x od $-R$ do R, a širina y od $-\sqrt{R^2 - x^2}$ do $\sqrt{R^2 - x^2}$. Rješavamo sljedeći integral:

$$
\begin{aligned}
m &= \iiint\limits_V \rho(x,y,z)dxdydz = \int_{-R}^{R}\Big(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\Big(\int_0^H kzdz\Big)dy\Big)dx \\
&= k\int_{-R}^{R}\Big(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{1}{2}H^2dy\Big)dx = kH^2\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}dx \\
&= kH^2(\frac{1}{2}(x\sqrt{R^2-x^2})+R^2arcsin(\frac{x}{R}))\Big|_{-R}^{R} = \frac{1}{2}kH^2\pi R^2.
\end{aligned}
$$

Ako bi uzeli konkretne vrijednosti za parametre poput $k = 0.2, H = 5$ i $R = 2$, dobivamo masu cilindra $m = 10\pi \approx 31.415$.

4.2 Još neke primjene višestrukih integrala

Masu i volumen određenog tijela susrećemo u različitim područjima znanosti i tehnologije pa tako i višestruke integrale nalazimo u različitim područjima poput matematike, fizike ili elektrotehnike. No, to nije jedina primjena višestrukih integrala. U nastavku slijedi uloga višestrukih integrala u računanju inercije i oplošja.

4.2.1 Inercija

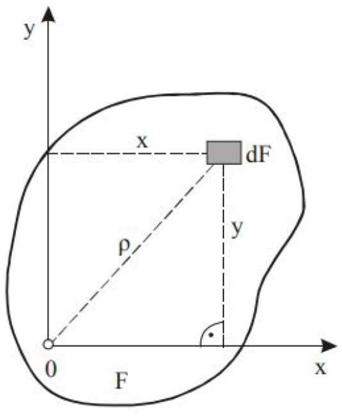
Upoznat ćemo se najprije s inercijom. Radi se o tromosti tijela. Proučavamo koliko je snage potrebno da se tijelo pokrene. Što je tijelo teže pokrenuti, to ono ima veću inerciju. Na primjer, težak paket ima veću inerciju od lopte. Dakle, inerciju možemo povezati i s masom tijela. Kako je gustoća tijela dana kao funkcija $\rho(x, y)$, dobivamo formulu za moment inercije:

$$I = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)\rho(x, y)dxdy.$$

Prethodna formula opisuje inerciju iz ishodišta koordinatnog sustava. Definiramo inerciju oko koordinatnih ravnina:

$$
\begin{aligned}
I_y &= \iiint\limits_V \rho(x,y)xdxdy, \\
I_x &= \iiint\limits_V \rho(x,y)ydxdy.
\end{aligned}
$$

Momenti inercije zapravo govore u kojem smjeru pomičemo predmet. Na slici to izgleda ovako:



Slika 4.2: Pomicanje tijela u različitim smjerovima; slika je preuzeta iz [9].

Tijelo možemo pomicati u smjeru I (misli se na ρ), u smjeru x što je I_x ili u smjeru y što je I_y. Više o inerciji i njezinim momentima možete pronaći u [1], [4] i [9].

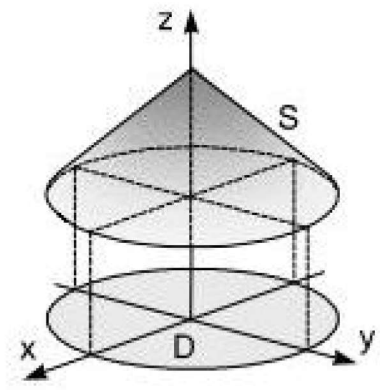
4.2.2 Oplošje

Osim volumena i mase tijela, također možemo računati i oplošje tijela. Oplošje je zbroj površina svih ploha koje pripadaju tijelu koje promatramo. Neka je zadana funkcija $z = f(x,y)$ i D je područje integracije. Formula za površinu plohe S dana je formulom:

$$P(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^2} dxdy. \tag{4.1}$$

Ako je $z = f(x,y) = 1$, tada je $P(S) = P(D)$. Postupak kako dolazimo do ove formule može se pogledati u [1], a mi ćemo se pozabaviti primjerom.

Primjer 16.
Zadana je stožasta ploha formulom $z = f(x,y) = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$ koja je određena uvjetom $z \in [2,3]$. Označimo područje integracije s $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ i plašt stošca sa S. Želimo izračunati oplošje stošca T prikazanog na Slici 4.3:



Slika 4.3: Stožac T; slika je preuzeta iz [1].

Rješenje:
Zaključimo da je baza stožca zapravo jednake površine kao područje integracije D. Za računanje oplošja moramo izračunati $P(D) + P(S)$ pa idemo redom. Površinu kruga D znamo računati bez višestrukih integrala. Dobivamo:

$$P(D) = r^2\pi = \pi.$$

Površinu plohe S računamo uporabom formule (4.1). Dobivamo:

$$\begin{aligned} P(S) &= \iint_D \sqrt{1 + \Big(\frac{\partial 3 - \sqrt{x^2+y^2}}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial 3 - \sqrt{x^2+y^2}}{\partial y}\Big)^2} dxdy \\ &= \iint_D \sqrt{1 + \Big(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big)^2 + \Big(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big)^2} dxdy \\ &= \iint_D \sqrt{2} dxdy = \sqrt{2}P(D) = \pi\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Dakle, oplošje stošca T jednako je $\pi + \pi\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})\pi$.

Literatura

[1] B. Červar, K. Miletić, *Matematika 2*, Sveučilište u Mostaru, Građevinski fakultet, Mostar, 2014.

[2] B. Guljaš, *Matematička analiza 1 i 2*, skripta, Zagreb, 2018.

[3] D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika 1*, Odjel za matematiku, Osijek, 1998.

[4] N. Okičić, V. Pašić, *Funkcije više promjenljivih: Integrabilnost*, Prirodnoslovno-matematički fakultet Tuzla, Tuzla, 2016.

[5] Š. Ungar, *Matematička analiza 3*, Sveučilište u Zagrebu, Prirodnoslovno-matematički fakultet, Matematički odjel, Zagreb, 2002.

Web izvori:

[6] https://web.math.pmf.unizg.hr/~rus/nastava/ma2/1-integral.pdf

[7] https://www.cantorsparadise.com/why-we-use-the-infimum-and-supremum-in-mathematics-32a90ba13c6c

[8] https://www.math.utoronto.ca/kzhang/notebooks/vectorcalculus/riemann-2d/

[9] https://www.slideserve.com/arnon/momenti-inercija

Sažetak

U ovom diplomskom radu proučavali smo pojam višestrukog integrala. Započeli smo s uvođenjem jednostrukih integrala, zatim dvostrukih i na kraju višestrukih, gdje smo se većinom bavili trostrukim integralom. Razradili smo pojmove koji su nužni za uvođenje Reimannovog integrala poput segmenta, ograničene funkcije, subdivizije segmenta i Darbouxovih suma. Nakon toga naveli smo važne teoreme za rješavanje višestrukih integrala. Sve to ilustrirali smo odgovarajućim primjerima.

Ključne riječi

segment, ograničena funkcija, subdivizija, primitivna funkcija, Darbouxove sume, Riemannov integral, površina, volumen, masa, oplošje, momenti inercije

Multiple integrals and some applications

Summary

In this master's thesis, we studied the concept of multiple integrals. We began by introducing single integrals, followed by double integrals, and finally multiple integrals, focusing primarily on triple integrals. We elaborated on concepts necessary for introducing the Riemann integral such as intervals, bounded functions, subdivisions, and Darboux sums. Subsequently, we presented important theorems for solving multiple integrals. All of this was illustrated with corresponding examples.

Keywords

segment, bounded function, subdivision, antiderivative, Darboux sums, Riemann integral, area, volume, mass, surface, moments of inertia

Životopis

Moje ime je Dino Trupković. Rođen sam 30. travnja 1997. godine u Karlovcu. Nakon završene osnovne škole "Ivan Goran Kovačić" u Dugoj Resi upisao sam opću gimnaziju u školi "Srednja škola Duga Resa", gdje sam još više zavolio matematiku i prirodne znanosti. U srpnju 2016. dolazim na preddiplomski studij matematike na Sveučilište u Rijeci. Studij sam zaključio završnim radom "Wienerov indeks" kod mentorice dr. sc. Nine Mostarac i stekao titulu univ. bacc. math. U listopadu 2020. godine dolazim na diplomski studij "Financijska matematika i statistika" na Odjelu za matematiku, sadašnjem Fakultetu primijenjene matematike i informatike u sastavu Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, gdje sam se dodatno obogatio matematičkim znanjem i vještinama. Svoj studij ovdje završavam diplomskim radom "Višestruki integrali i neke njihove primjene".