Krylovljevi potprostori i primjene

Grbeš, Petra

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike

Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Krylovljevi potprostori i primjene

Završni rad

Mentor:
doc. dr. sc. Ivana Kuzmanović Ivičić

Student:
Petra Grbeš

Osijek, 2024

Sadržaj

Uvod

U ovom završnom radu istraživat ćemo i proučiti Krylovljev potprostor te ćemo vidjeti na koji se način koristi i primjenjuje u matematici. Krylovljev potprostor često susrećemo u linearnoj algebri i numeričkoj analizi, a naziv je dobio prema ruskom matematičaru Alekseju Krylovu[1].

Slika 1: Aleksej Nikolajevič Krilov (1863-1945)

Nadalje, vidjet ćemo poveznicu Krylovljeva potprostora s raznim matematičkim metodama poput rješavanja sustava linearnih jednadžbi ili pronalaska svojstvenih vrijednosti matrica. No, prije nego što se detaljnije upoznamo s Krylovljevim potprostorima prisjetit ćemo se bitnih tvrdnji, iskaza i definicija potrebnih za daljnje razumijevanje.

[1] **Aleksej Nikolajevič Krilov** (1863-1945) ruski pomorski inženjer, primijenjeni matematičar i memoarist.

1 | Osnovni pojmovi

Prisjetimo se sljedećih definicija te nekih rezultata iz linearne algebre koji će nam biti nužni za daljnje razumjevanje.

Definicija 1.0.1. Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$. Tada sa $[S] = \operatorname{span}(S)$ označavamo linearnu ljusku skupa S. Definiramo je kao:

$$[S] = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i : \alpha_i \in \mathbb{F}, a_i \in S, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Također, definiramo i $[\emptyset] = \{0\}$.

Definicija 1.0.2. Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$, takav da je $V = [S]$ te neka je S linearno nezavisan. Tada S nazivamo bazom vektorskog prostora V.

Definicija 1.0.3. Neka je $V \neq \{0\}$ konačnodimenzionalni vektorski prostor. Dimenzija prostora V definira se kao broj elemenata bilo koje baze tog prostora. Dodatno, dimenzija nulprostora je 0.

Definicija 1.0.4. Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i M njegov neprazan podskup. Ako je i $(M, +, \cdot)$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ uz iste operacije, onda kažemo da je M potprostor vektorskog prostora V, što označavamo $M \leq V$.

Nadalje, kako je $M \leq V$ vrijedi $\dim M \leq \dim V$. Ukoliko vrijedi $\dim M = \dim V$, također vrijedi i $M = V$.

Slijede osnovne definicije i svojstva vezana za takozvani svojstveni problem.

Definicija 1.0.5. Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $A : V \to V$ linearan operator. Kažemo da je skalar $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ svojstvena vrijednost operatora A ako postoji $x \in V$, $x \neq 0$ takav da je $Ax = \lambda_0 x$. Skup svih svojstvenih vrijednosti operatora A nazivamo spektrom operatora A i označavamo sa $\sigma(A)$. Vektor x, $x \neq 0$ pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_0 nazivamo svojstvenim vektorom.

Definicija 1.0.6. Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$. Polinom $k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ nazivamo svojstvenim ili karakterističnim polinomom matrice A.

Primjer 1.0.1. *Odredimo karakteristični polinom matrice* $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$. *Kako je*

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -4 & 2-\lambda \end{bmatrix},$$

slijedi da je

$$\det(A - \lambda I) = (3-\lambda)(2-\lambda) + 4 = 6 - 3\lambda - 2\lambda + \lambda^2 + 4 = \lambda^2 - 5\lambda + 10.$$

I traženi karakteristični polinom jest:

$$k_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 10.$$

Definicija 1.0.7. Neka je V konačnodimenzionalni vektroski prostor nad $\mathbb{F}$ dimenzije n, $A \in L(V)$ te $A_m \in M_n(\mathbb{F})$ matrični prikaz operatora A u proizvoljnoj bazi. Svojstveni polinom operatora A, k_A, definiramo kao svojstveni polinom matrice A_m:

$$k_A(\lambda) = k_{A_m}(\lambda).$$

Definicija 1.0.8. Neka su V i W vektorski prostori, linearan operator $A \in L(V, W)$ nazivamo:

i) monomorfizam ako je A injekcija,

ii) epimorfizam ako je A surjekcija,

iii) izomorfizam ako je A bijekcija.

Sada ćemo iskazati nekoliko tvrdnji koji će nam pomoći dokazati teorem 1.0.1.

Korolar 1.0.1. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i b neka njegova baza. Operator $A \in L(V)$ je reguralan ako i samo ako je matrica tog operatora A_m zapisana u bazi b regularna.*

Propozicija 1.0.1. *Neka su V i W vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$, V dimenzije m, W dimenzije n i b_1 neka baza od V, a b_2 neka baza od W. Preslikavanje $\Phi : L(V, W) \to M_{mn}(\mathbb{F})$, $\Phi(A) = A_m$, gdje je A_m matrica u paru baza b_1 i b_2, je izomorfizam.*

Korolar 1.0.2. *Neka je $A : V \to W$ linearan operator i neka su vektorskog prostori V i W jednakih dimenzija, oba konačna. Tada su sljedeće tvrdnje međusobno ekvivalentne:*

i) A je monomorfizam;

ii) A je epimorfizam;

iii) A je izomorfizam.

Propozicija 1.0.2. *Linearan operator $A : V \to W$ je injekcija ako i samo ako Ker $A = \{0\}$, odnosno, ako i samo ako je $d(A) = 0$.*

Teorem 1.0.1. *Neka je V konačnodimenzionalni vektroski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ te neka je $A \in L(V)$. Skalar $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ je svojstvena vrijednost operatora A ako i samo ako vrijedi:*

$$k_A(\lambda_0) = 0.$$

Dokaz. Neka je A_m matrica linearnog operatora A, sljedeće tvrdnje međusobno su ekvivalentne:

$$\begin{aligned}
\lambda_0 \text{ svojstvena je vrijednost za } A &\iff \exists x \in V, x \neq 0, \text{ tako da je } Ax = \lambda_0 x \\
&\iff Ker(A - \lambda_0 I) \neq \{0\} \\
&\overset{1.0.2}{\iff} A - \lambda_0 I \text{ nije monomorfizam} \\
&\overset{1.0.2}{\iff} \text{matrica operatora } A - \lambda_0 I \text{ nije regularna matrica} \\
&\overset{1.0.3}{\iff} \text{ni matrica } A_m - \lambda_0 I \text{ nije regularna matrica} \\
&\iff \det(A_m - \lambda_0 I) = 0 \\
&\iff k_{A_m}(\lambda_0) = 0 \text{ to jest } k_A(\lambda_0) = 0.
\end{aligned}$$

□

Napomena 1.0.1. Prema teoremu 1.0.1 uviđamo da su svojstvene vrijednosti operatora nultočke svojstvenog polinoma. Polje kompleksnih brojeva je algebarski zatvoreno, to jest svaki polinom s kompleksnim koeficijentima ima nultočke u $\mathbb{C}$ pa zbog toga svaki operator na konačnodimenzionalnom kompleksnom prostoru ima svojstvenu vrijednost. S druge strane, polje $\mathbb{R}$ nije algebarski zatvoreno, to jest ima polinoma s realnim koeficijentima bez realnih nultočaka.

Primjer operatora koji nam pokazuje da operatori na realnim prostorima ne moraju imati svojstvene vrijednosti je operator rotacije.

Teorem 1.0.1 tvrdi da su svojstvene vrijednosti operatora upravo nultočke njegovog svojstvenog polinoma.

Primjer 1.0.2. *Odredimo svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene vektore matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Neka je $k_A(\lambda)$ karakteristični polinom matrice A, odnosno:

$$k_A(A) = \det(A - \lambda I).$$

Uvrštavanjem A dobivamo:

$$k_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 \\ 1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-4-\lambda) + 5.$$

Odnosno:

$$k_A(\lambda) = -8 - 2\lambda + 4\lambda + \lambda^2 + 5 = \lambda^2 + 2\lambda + 3.$$

Izjednačavajući:

$$k_A(\lambda) = 0,$$

dobivamo kvadratnu jednadžbu:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0,$$

iz koje slijedi $\lambda_1 = -3$ *i* $\lambda_2 = 1$. *Pronađimo sada svojstvene vektore: Za* $\lambda_1 = -3$ *trebamo riješiti sustav:*

$$\begin{aligned}(A - \lambda_1 I)v_1 &= 0\\ \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} v_1 &= 0.\end{aligned}$$

Nadalje dobivamo sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{aligned}5x_1 - 5x_2 &= 0\\ x_1 - x_2 &= 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2.\end{aligned}$$

Dakle:

$$v_1 = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ x_2 \in \mathbb{R}, x_2 \neq 0.$$

Nadalje, za $\lambda_2 = 1$ *trebamo riješiti sustav:*

$$\begin{aligned}(A - \lambda_2 I)v_2 &= 0\\ \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} v_2 &= 0,\end{aligned}$$

iz čega dobivamo sustav dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned}x_1 - 5x_2 &= 0\\ x_1 - 5x_2 &= 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 5x_2.\end{aligned}$$

Dakle:

$$v_2 = \begin{bmatrix} 5x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix},\ x_2 \in \mathbb{R}, x_2 \neq 0.$$

Sada imamo dva svojstvena vektora:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Definicija 1.0.9. Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$. Minimalni polinom matrice A je normirani polinom najmanjeg stupnja kojeg matrica A poništava, odnosno normirani polinom μ_A za kojeg vrijedi:

i) $\mu_A \neq 0$,

ii) $\mu_A(A) = 0$,

iii) ako za polinom p vrijedi $p(A) = 0$, tada je:

$$st(p) \geq st(\mu_A).$$

Za kvadratnu matricu $A \in M_n(\mathbb{F})$ s elementima a_{ij} $(i,j = 1,2,...,n)$, njezina adjunkta je kvadratna matrica $\tilde{A} \in M_n(\mathbb{F})$ čiji element na sjecištu i-tog retka i j-tog stupca je $(-1)^{j+i} \det A_{ji}$, a A_{ji} je matrica iz $M_{n-1}(\mathbb{F})$ koja se iz matrice A dobiva uklanjanjem j-tog retka i i-tog stupca.

Korolar 1.0.3. *Za svaku kvadratnu matricu A vrijedi:*

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = \det A \cdot I.$$

Teorem 1.0.2. (***Hamilton-Cayley***) *Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$. Tada je $k_A(A) = 0$, odnosno svaka matrica poništava svoj karakteristični polinom.*

Dokaz. Neka je $C = A - \lambda I$ i $\det C = k_A(\lambda) = \alpha_n\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + \alpha_1\lambda + \alpha_0$, te neka je $\tilde{C}$ adjunkta matrice C. Vrijedi:

$$C \cdot \tilde{C} = A \cdot \tilde{C} - \lambda \cdot \tilde{C} = (\det C) \cdot I.$$

Uočavamo da su elementi matrice $\tilde{C}$ polinomi stupnja $n-1$ pa je možemo zapisati kao polinom stupnja $n-1$ s matričnim koeficijentima:

$$\tilde{C} = \lambda^{n-1}C_{n-1} + \lambda^{n-2}C_{n-2} + \cdot + \lambda C_1 + C_0.$$

Nadalje slijedi:

$$\alpha_n\lambda^n I + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} I + ... + \alpha_1\lambda I + \alpha_0 I = AC_{n-1}\lambda^{n-1} + AC_{n-2}\lambda^{n-2} + ... + AC_0 - C_{n-1}\lambda^n - C_{n-2}\lambda^{n-1} - ... - C_0$$

Sada iz gornje jednakosti slijedi:

$$\begin{aligned} -C_{n-1} &= \alpha_n I \\ AC_{n-1} - C_{n-2} &= \alpha_{n-1} I \\ &(...) \\ AC_1 - C_0 &= \alpha_1 I \\ AC_0 &= \alpha_0 I \end{aligned}$$

Ako pomnožimo prvu jednakost s A^n, sljedeću s A^{n-1} i tako redom do zadnje s $A^0 = I$ i nakon toga ih zbrojimo, dobivamo da vrijedi $k_A(\lambda) = 0$. □

Definicija 1.0.10. Za kvadratnu matricu kažemo da je regularna ako postoji matrica B takva da je $AB = BA = I$. Tada matricu B zovemo inverzna matrica matrice A i označavamo s A^{-1}.

Propozicija 1.0.3. *Matrica $A \in M_n(\mathbb{F})$ je regularna ako i samo ako je $k_A(0) \neq 0$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $A \in M_n(\mathbb{F})$ regularna, to jest A ima inverz, odnosno postoji A^{-1}. Ako je A regularna, onda je $\det A \neq 0$. Primjetimo da vrijedi:

$$k_A(0) = \det(A - 0 \cdot I) = \det(A) \neq 0.$$

Obratno, ako je $k_A(0) \neq 0$, onda je $\det A \neq 0$, iz čega zaključujemo da je matrica A regularna. □

2 | Krylovljevi potprostori

Da bismo uveli pojam Krylovljevih potprostora, koristit ćemo rezultat iz Teorema 1.0.2 koji tvrdi da za regularnu matricu $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ vrijedi:

$$k_A(A) = a_0 I + a_1 A + ... + a_{n-1} A^{n-1} + a_n A^n = 0,$$

gdje je $k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i$.

Neka je matrica A regularna, prema Propoziciji 1.0.3 slijedi da je $a_0 \neq 0$.
Vrijedi:

$$\frac{-1}{a_0}(a_1 I + ... + a_{n-1} A^{n-2} + a_n A^{n-1}) \cdot A = A \frac{-1}{a_0}(a_1 I + ... + a_{n-1} A^{n-2} + a_n A^{n-1}) = I,$$

odakle slijedi da se inverzna matrica može dobiti kao:

$$A^{-1} = \frac{-1}{a_0}(a_1 I + ... + a_{n-1} A^{n-2} + a_n A^{n-1}). \tag{2.1}$$

Promatrajmo sada sustav linearnih jednadžbi $Ax = b$, gdje je $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ regularna matrica, $b \in \mathbb{C}^n$ dani vektor i $x \in \mathbb{C}^n$ traženi vektor. Zbog regularnosti matrice A, promatrani sustav ima jedinstveno rješenje.

Kako rješenje linearnog sustava $Ax = b$ možemo zapisati kao $x = A^{-1}b$, iz (2.1) slijedi da je oblika:

$$x = -\frac{a_1}{a_0} b - ... - \frac{a_{n-1}}{a_0} A^{n-2} b - \frac{a_n}{a_0} A^{n-1} b,$$

to jest, $x \in \text{span}\{b, Ab, A^2 b, ..., A^{n-1} b\}$. Potprostor koji smo dobili je važan potprostor određen matricom A i vektorom b, a naziva se Krylovljev potprostor matrice A i vektora b.

Definicija 2.0.1. Neka je $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ i $b \in \mathbb{C}^n$. Krilovljeva matrica reda $i$definira se kao $K_i \equiv K_i(A, b) = [b, Ab, ..., A^{i-1} b]$, a i-ti Krilovljev potprostor $\mathcal{K}_i$ definiran je kao slika od K_i, $\mathcal{K}_i \equiv \mathcal{K}_i(A, b) = \text{span}\{b, Ab, ..., A^{i-1} b\}$.

Osnovna svojstva Krylovljevih potprostora:

i) linearna nezavisnost
Niti jedan vektor unutar potprostora $\mathcal{K}_n$ se ne može prikazati kao linearna kombinacija preostalih vektora, to jest, vektori $\{b, Ab, ..., A^{n-1} b\}$ su linearno

nezavisni. Pokažimo to. Vektori $b, Ab, \ldots, A^{n-1}b$ su nezavisni ako i samo ako jednadžba:

$$a_0 b + a_1 Ab + ... + a_{n-1}A^{n-1}b = 0 \tag{2}$$

gdje su a_0, a_1,... i a_{n-1} skalari, ima samo trivijalno rješenje. Jednadžbu (2) možemo zapisati kao $p(A)b = 0$, gdje je $p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_{n-1}x^{n-1}$ polinom. Ukoliko je $p(A) = 0$, tada su vektori linearno nezavisni. Provjera linearne nezavisnosti svodi se na provjeru jesu li stupci matrice A nezavisni, a to slijedi iz regularnosti matrice A. Nadalje slijedi da su i vektori b, Ab,... i $A^{n-1}b$ linearno nezavisni.

ii) za matricu A, koja je $n \times n$, stupci Krylovljeve matrice K_{n+1} su linearno zavisni jer potprostor od C^n može imati dimenziju najviše n

iii) invarijantnost na množenje matricom A:

$$x \in \mathcal{K}_n(A, b) \implies A^n x \in \mathcal{K}_n(A, b), \forall n \in \mathbb{N}.$$

iv) invarijantnost na translacije:

$$\mathcal{K}_i(A - \sigma I, b) = \mathcal{K}_i(A, b).$$

3 | Metode Krylovljevih potprostora za linearne sustave

Iterativne metode su ključne za rješavanje matematičkih problema kroz postupno poboljšavanje aproksimacija. Njihova ideja je postizanje željene razine točnosti rješenja putem ponavljanja koraka jer se svaka sljedeća iteracija koristi za poboljšavanje prethodne. Tim metodama želimo riješiti sustav $Ax = b$ pri čemu su aproksimacije rješenja x iz Krylovljevog potprostora.

Kao početnu aproksimaciju uzet ćemo:

$$x_0 \in \text{span}\{b\}.$$

Nadalje, računamo Ab i želimo da sljedeća aproksimacija bude jednaka nekoj linearnoj kombinaciji od b i Ab, to jest:

$$x_1 \in \text{span}\{b, Ab\}.$$

Nastavljajući proces dobivamo:

$$x_k \in \text{span}\{b, Ab, A^2b, ..., A^kb\}, \quad k = 1, 2, ...$$

Ako je x_k aproksimacija rješenja koju je dala neka iterativna metoda za rješavanje sustava linearnih jednadžbi te ako je:

$$x_{k+1} = x_k + A^{-1}(b - Ax_k),$$

onda je $x_{k+1} = A^{-1}b$ rješenje sustava.

Sljedeće dvije metode su najznačajnije metode za rješavanje linearnih sustava koristeći aproksimacije iz Krylovljevih potporostora.

3.1 Metoda konjugiranih gradijenata (CG)

CG metoda je iterativna metoda iz Kryovljevih potprostora koju koristimo pri rješavanju sustava $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x, b \in \mathbb{R}^n$, gdje je matrica A simetrična pozitivno definitna, to jest vrijedi:

i) $A^T = A$,

ii) $y^T Ay > 0, \forall y \in \mathbb{R}^n, y \neq 0$.

Kako je matrica A pozitivno definitna, dobro je definiran A-skalarni produkt $\langle x, y \rangle_A = y^T A x$, kao i A-norma:

$$\|x\|_A = \sqrt{\langle x, x \rangle_A} = \sqrt{x^T A x}.$$

U metodi konjugiranih gradijenata aproksimacije su oblika

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k,$$

pri čemu su $d_0, d_1, \ldots, d_k$ A-konjugirani vektori, odnosno za koje vrijedi $d_i^T A d_j = 0$, $\forall i \neq j$ i koji čine A-ortonormiranu bazu za potprostor $\text{span}\{r_0, r_1, \ldots, r_{k-1}\}$, gdje su $r_i = b - Ax_i$ reziduali. Nadalje, uzima se

$$\alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{d_k^T a d_k}.$$

Algoritam za CG metodu dan je u Algorimu 1.

Teorem 3.1.1. (*vidjeti* [3, *Teorem 2.4.4.*]) *Greška e_k dobivena u k-tom koraku metode konjugiranih gradijenata ima najmanju A-normu na prostoru:*

$$e_0 + \text{span}\{Ae_0, A^2 e_0, ..., A^k e_0\}.$$

U svakom koraku CG algoritma, duljina vektora greške $e_k = x - x_0$ se reducira, pri čemu je $A^{-1}b = x = x_m$ za neki $m \leq n$.

Dokaz. Neka je $e_k = x - x_0$ i $d_k = r_k + \beta_k d_{k-1}$. Vrijedi $d_0 = r_0 = Ae_0$ pa je

$$e_1 = e_0 - \alpha_0 r_0 = e_0 - \alpha_0 A e_0 \in e_0 + \text{span}\{Ae_0\}.$$

Pretpostavimo nadalje da je $e_k \in \text{span}\{e_0, Ae_0, ..., A^k e_0\}$ i $d_{k-1} \in \text{span}\{Ae_0, A^2 e_0, ..., A^k e_0\}$, tada za e_{k+1} vrijedi:

$$e_{k+1} = e_k - \alpha_k d_k = e_k - \alpha_k \beta_k d_{k-1} - \alpha_k A e_k \in \text{span}\{Ae_0, A^2 e_0, ..., A^{k+1} e_0\}.$$

Nadalje, $e_k \in e_0 + \text{span}\{Ae_0, A^2 e_0, ..., A^{k+1} e_0\}$ i $d_k = Ae_k + \beta_k d_{k-1}$, pa slijedi

$$d_k \in \text{span}\{Ae_0, A^2 e_0, ..., A^{k+1} e_0\}.$$

Nadalje slijedi da je

$$\text{span}\{d_0, d_1, ..., d_k\} = \text{span}\{Ae_0, A^2 e_0, ..., A^{k+1} e_0\}.$$

Budući da je e_{k+1} A-ortogonalan na $\text{span}\{d_0, d_1, ..., d_k\}$, slijedi da je e_{k+1} element prostora $e_0 + \text{span}\{Ae_0, A^2 e_0, ..., A^{k+1} e_0\}$ s najmanjom A-normom. Nadalje za $k = n - 1$ iz linearne nezavisnosti vektora $\{d_0, ..., d_{n-1}\}$ dobiva se da je $e_n = 0$. □

Algoritam 1 [3, Algoritam 2.4.3.] Algoritam za metodu konjugiranih gradijenata

x_0 zadan,
$d_0 = r_0 = b - Ax_0$;
$k = 0$;
dok nije zadovoljen kriterij zaustavljanja **radi**
 $\alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{d_k^T A d_k}$;
 $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$;
 $r_{k+1} = r_k - \alpha_k A d_k$;
 $\beta_{k+1} = \frac{r_{k+1}^T r_{k+1}}{r_k^T r_k}$;
 $d_{k+1} = r_{k+1} + \beta_{k+1} d_k$;
 $k = k + 1$;

Teorem 3.1.2. (*vidjeti* [3, 7]) *Greška e_k u k-tom koraku metode konjugiranih gradijenata zadovoljava:*

$$\|e_k\|_A \leq \min_{p_k \in \mathbb{P}_k, p_k(0)=1} \max_{i=1,\dots,n} |p_k(\lambda_i)| \|e_0\|_A,$$

gdje su $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ svojstvene vrijednosti od A.

Primjenjiva ocjena je dana s:

$$\|e_k\|_A \leq 2 \left(\frac{\sqrt{\kappa_2(A)} - 1}{\sqrt{\kappa_2(A)} + 1} \right)^k \|e_0\|_A,$$

gdje je $\kappa(A)_2 = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \lambda_{max} / \lambda_{min}$ broj uvjetovanosti matrice A.

Dokaz. Matrica A je simetrična i pozitivno definitna pa ju možemo zapisati u obliku $A = U \Lambda U^T$, gdje su:

- $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ svojstvene vrijednosti matrice A
- $UU^T = U^T U = I$ je ortogonalna
- $\sqrt{A}$ je simetrični drugi korijen od A i vrijedi $\sqrt{A} = U \sqrt{\Lambda} U^T$ pa komutira s A

Slijedi:

$$\begin{aligned}
||e_k||_A &= \min_{p_k \in \mathbb{P}_k, p_k(0)=1} ||p_k(A) e_0||_A, \ p_k \text{ polinom } k\text{-tog stupnja} \\
&= \min_{p_k \in \mathbb{P}_k, p_k(0)=1} ||\sqrt{A} p_k(A) e_0||_2 \\
&= \min_{p_k \in \mathbb{P}_k, p_k(0)=1} ||U p_k(\Lambda) U^T \sqrt{A} e_0||_2 \\
&\leq \min_{p_k \in \mathbb{P}_k, p_k(0)=1} ||p_k(\Lambda)||_2 ||e_0||_A \\
&= \min_{p_k \in \mathbb{P}_k, p_k(0)=1} \max_{i=1,\dots n} |p_k(\lambda_i)| ||e_0||_A.
\end{aligned}$$

$\square$

3.2 GMRES metoda (Generalized minimal residue alogrithm)

GMRES metoda je metoda koja se može primijeniti na sve sustave $Ax = b$ s regularnom matricom A. Koriste se aproksimacije oblika $x_k \in x_0 + \mathcal{K}_n(A.r_0)$ za koje je norma reziduala $r_k = b - Ax_k$ minimalna. Ta metoda koristi Gram-Schmidtov postupak kako bismo imali ortonormiranu bazu $\{q_1, q_2, ..., q_{k+1}\}$ za niz Krylovljevih potprostora span$\{r_0, Ar_0, ..., A^n r_0\}$. U svakom koraku GMRES metode primijenjuje se Arnlodijev algoritam, dan u Algoritmu 2, koji koristi modificirani Gram-Schmidtov postupak kako bi proizveo niz ortogonalnih vektora $q_1, q_2, q_3, \ldots$ koji su baza za Krylovljev potprostor $\mathcal{K}_n$.

Algoritam 2 [3, Algoritam 2.5.1.] Arnoldijev algoritam

q_1 sa $||q_1||_2 = 1$ zadan,
za $j = 1; j++$ **radi**
  $\tilde{q}_{j+1} = Aq_j;$
  za $i = 1; i \leq j; i++$ **radi**
    $h_{i,j} = q_i^\tau \tilde{q}_{j+1};$
    $\tilde{q}_{j+1} := \tilde{q}_{j+1} - h_{i,j} q_i;$
  $h_{j+1,i} = \|\tilde{q}_{j+1}\|_2;$
  $q_{j+1} = \frac{\tilde{q}_{j+1}}{h_{j+1,i}};$

Vektor $x_k \in x_0 + K_k$ može se zapisati kao

$$x_k = x_0 + Q_n y_n,$$

gdje je $y_k \in \mathbb{R}^n$ i Q_k matrica čiji su stupci $\{q_1, \ldots, q_k\}$. Vektor y_k određuje se tako da $\|r_k\|_2$ bude minimalna.

Osnovna iteracija GMRES algoritma je oblika

1. Odrediti q_k koristeći Arnoldijevu metodu;
2. odrediti y_k koji minimizira $\|r_k\|$;
3. izračunati $x_k = x_0 + Q_k y_k$.

Sljedeći teoremi nam daju neka od svojstava GMRES metode.

Teorem 3.2.1. [3, *Teorem 2.5.3*] *Rezidual u k-tom koraku GMRES metode zadovoljava:*

$$r_k = b - Ax_k = Q_{k+1}(\beta\xi_1 - H_{k+1,k}y_k) = Q_{k+1}G^{(k)}(g_{k+1}^{(k)}\xi_{k+1}),$$

gdje je $\xi_1 = [1, 0, ..., 0]^\tau$, $G^{(k)} = G_k G_{k-1} \cdots G_0$, *a* $g^{(k)} = \beta G^{(k)} \xi_1$. *Kao rezultat dobivamo:*

$$\|r_k\|_2 = \|b - Ax_k\|_2 = |g_{k+1}^{(k)}|.$$

Ako je A regularna matrica, tada se GMRES algoritam prekida u k-tom koraku ($H_{k+1}[k] = 0$) za $k \leq n$ ako i samo ako je aproksimacija x_k jednaka egzaktnom rješenju x.

Dokaz. Za dokaz vidjeti [3]. □

Teorem 3.2.2. [3, *Lema 2.5.6*] *Neka je x_k aproksimacija rješenja dobivena u k-tom koraku GMRES algoritma, i neka je $r_k = b - Ax_k$. Tada postoji $q_{k-1} \in \mathbb{P}_{k-1}$ takav da je*

$$x_k = x_0 + q_{k-1}(A)r_0$$

i

$$\|r_k\|_2 = \min_{q_{k-1}\in\mathbb{P}_{k-1}} \|(I - Aq_{k-1}(A))r_0\|_2.$$

Dokaz. U GMRES metodi u k-tom koraku bira se aproksimacija x_k takva da za $\mathcal{K}_k(A, r_0) = \text{span}\{r_0, Ar_0, ..., A^{k-1}r_0\}$ vrijedi svojstvo da je $||b - Ax_k||_2 = \min_{x\in x_0+\mathcal{K}_k(A,r_0)} ||b - Ax||_2$. Znamo da je x_k oblika $x_k = x_0 + Q_k y_k$ gdje je Q_k matrica čiji stupci čine bazu Krylovljevog potprostora $\mathcal{K}_k(A, r_0)$. Za svaki $x \in x_0 + \mathcal{K}_k(A, r_0)$ koji je oblika $x = x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} d_j A^j r_0$ vrijedi:

$$x = x_0 + q_{k-1}(A)r_0\,, q_{k-1} \in \mathbb{P}_{k-1}.$$

Sada vrijedi da je:

$$r = b - Ax = b - Ax_0 - Aq_{k-1}(A)r_0 = (I - Aq_{k-1}(A))r_0 = p_k(A)r_0,$$

gdje je $p_k \in \mathbb{P}_k$, $p_k(0) = 1$. □

Teorem 3.2.3. [3, *Teorem 2.5.7*] *Neka je A dijagonalizabilna matrica i neka je $A = V\Lambda V^T$ njezina spektralna dekompozicija, gdje je $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ dijagonalna matrica svojstvenih vrijednosti, a stupci regularne matrice V su svojstveni vektori od A.Neka je*

$$\varepsilon_k = \min_{p_k\in\mathbb{P}_k, p_k(0)=1} \max_{i=1,...n} |p_k(\lambda_i)|.$$

Tada norma reziduala u k-tom koraku GMRES metode zadovoljava

$$||r_k||_2 \leq \kappa(V)\varepsilon_k||r_0||_2,$$

gdje je $\kappa(V) = ||V||_2||V^{-1}||_2$.

Dokaz. Neka je p_k proizvoljni polinom stupnja najviše k, koji zadovoljava uvjet $p_k(0) = 1$. Nadalje, neka je $x \in x_0 + \mathcal{K}_k(A, r_0)$ vektor takav da je $r = b - Ax = p_k(A)r_0$ iz $\mathcal{K}_{k+1}(A, r_0)$. Slijedi da je

$$||b - Ax||_2 = ||Vp_k(\Lambda)V^{-1}r_0||_2 \leq ||V||_2||V^{-1}||_2||p_k(\Lambda)||_2||r_0||_2.$$

Matrica Λ je dijagonalna matrica pa slijedi:

$$||p_k(\Lambda)||_2 = \max_{i=1,...,n} ||p_k(\lambda_i)||_2.$$

Vektor x_k minimizira normu reziduala na $x_0 + \mathcal{K}_k(A, r_0)$, pa za proizvoljni polinom p_k s navedenim svojstvima vrijedi da je

$$||b - Ax_k||_2 \leq ||b - Ax||_2 \leq ||V||_2||V^{-1}||_2||r_0||_2 \max_{i=1,\dots,n} |p_k(\lambda_i)|.$$

Ako u prethodnoj nejednakosti uzmemo polinom p_k koji minimizira desnu stranu nejednakosti, to rezultira odabirom odgovarajućeg $x_{min} \in x_0 + \mathcal{K}_k(A, r_0)$. Tako slijedi da je:

$$||b - Ax_k||_2 \leq ||b - Ax_{min}||_2 \leq ||V||_2||V^{-1}||_2||r_0||_2\varepsilon_k,$$

što je i trebalo dokazati. □

U Algoritmu 3 dan je GMRES algoritam.

Algoritam 3 [3, Algoritam 2.5.2.] GMRES algoritam

x_0 zadan;
$r_0 = b - Ax_0$;
$\beta = \|r_0\|_2$;
$q_1 = \frac{r_0}{\beta}$;
$I = [1, 0, ..., 0]^\tau$;
za $k = 1; k \leq k_{max}; k++$ **radi**
  Izračunaj q_{k+1} i $h_{i,k}$ za $i = 1, 2, ..., k+1$ koristeći Arnoldijev algoritam.;
  Primijeni $F_1, ..., F_{k-1}$ na zadnji stupac od H:
  za $i = 1; i \leq k-1; i++$ **radi**
    $\begin{bmatrix} h_{i,k} \\ h_{i+1,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_i & s_i \\ \bar{s}_i & c_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{i,k} \\ h_{i+1,k} \end{bmatrix}$;
  Izračunaj k-tu Givensovu rotaciju F_k kako bi se poništio $h_{i+1,k}$;
  $c_k = \frac{|h_{k,k}|}{\sqrt{|h_{k,k}|^2 + |h_{k+1,k}|^2}}$;
  ako je $c_k \neq 0$ **onda**
    $s_k = c_k \frac{\overline{h_{k+1,k}}}{\overline{h_{k,k}}}$;
  inače
    $s_k = 1$;
  Primijeni k-tu rotaciju na I i na zadnji stupac od H: $\begin{bmatrix} I_k \\ I_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_k & s_k \\ \bar{s}_k & c_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_k \\ 0 \end{bmatrix}$;

  $h_{k,k} = c_k h_{k,k} + s_k h_{k+1,k}$;

  $h_{k+1,k} = 0$;
  ako je ocjena norme reziduala $\beta|I_{k+1}|$ dovoljno mala **onda**
    Riješi gornjetrokutasti sustav $H_{k \times k} y_k = \beta I_{k \times 1}$;
    $x_k = x_0 + Q_k y_k$;

Literatura

[1] D. Bakić, *Linearna algebra*, Školska knjiga, Zagreb, 2008

[2] N. Bosner, *Numerička analiza*, predavanje 7, Zagreb

[3] N. Bosner, *Numerička analiza*, materijal dostupan na mrežnoj stranici https://web.math.pmf.unizg.hr/ nela/kostur.pdf

[4] H. Kraljević, *Vektorski prostori*, Odjel za matematiku, Osijek, 2008

[5] Y. Saad, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003.

[6] I. Šain, *Arnoldijev algoritam za nelinearne probleme svojstvenih vrijednosti*, diplomski rad, Zagreb, 2014

[7] N. Truhar, *Numerička linearna algebra*, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek, 2010.

Sažetak

U ovom radu proučavat ćemo Krylovljeve potprostore. Ovi potprostori imaju važnu primjenu u numeričkoj analizi, posebno za rješavanje sustava linearnih jednadžbi. Osim toga, koriste se i u drugim područjima, uključujući optimizaciju i teoriju kontrole. U radu će najprije biti dan pregled osnovnih pojmova iz linearne algebre koji su nužni za daljnje razumijevanje. Nakon toga, definirani su Krylovljevi potprostori i navedena njihova osnovna svojstva. Primjena Krylovljevih potprostora promatrana je na problemu rješavanja sustava linearnih jednadžbi, pri čemu su posebno promatrane metoda konjugiranih gradijenata i GMRES metoda.

Ključne riječi

Krylovljev potprostor, aproksimacija, sustav jednadžbi, CG, GMRES

Krylov subspaces and applications

Summary

In this paper we will study Krylov subspaces. These subspaces have important applications in numerical analysis, especially for solving systems of linear equations. In addition, they are used in other fields, including optimization and control theory. The paper will first give an overview of the basic terms from linear algebra that are necessary for further understanding. After that, Krylov subspaces are defined and their basic properties are stated. The application of Krylov subspaces was observed to the problem of solving a system of linear equations, where the method of conjugate gradients and the GMRES method were especially observed.

Keywords

Krylov subspace, approximation, system of equations, CG, GMRES

Životopis

Rođena sam 1.4.1999. godine u Požegi gdje sam završila Opću gimnaziju i nakon toga upisala sam prijediplomski studij na Odjelu za matematiku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku(sadašnji Fakultet primijenjene matematike i infromatike). Matematika mi je uvijek bila zvijezda vodilja u životu i činila me sretnom, stoga sam znanje koje sam stekla na studiju nastavila prenositi djeci radeći prvo u osnovnoj školi, a zatim privremeno i u srednjoj školi kao nastavnica matematike. U slobodno vrijeme bavim se fotografiranjem prirode, ali i davanjem privatnih poduka iz matematike osnovnoškolcima i srednjoškolcima.

I was born on April 1, 1999. in Požega, where I graduated from the General Gymnasium after which I enrolled in undergraduate studies at the Department of Mathematics at the Josip Juraj Strossmayer University in Osijek (now the School of Applied Mathematics and Informatics).Mathematics has always been a guiding star in my life and made me happy, so I continue to pass on the knowledge I gained during my studies to children, working first in elementary school, and then temporarily in high school as a mathematics teacher.In my spare time, I am engaged in nature photography, but also give private lessons in mathematics to elementary and high school students.