Grupno odlučivanje i pripadne metode

Pintarić, Ena

Master's thesis / Diplomski rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, School of Applied Mathematics and Informatics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Fakultet primijenjene matematike i informatike**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:007107

Rights / Prava: In copyright/Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-08-08**

Repository / Repozitorij:

Repository of School of Applied Mathematics and Computer Science

zir.nsk.hr

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU

dabar

DIGITALNI AKADEMSKI ARHIVI I REPOZITORIJI

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike

Studij Sveučilišni diplomski studij matematike
modul: financijska matematika i statistika

Grupno odlučivanje i pripadne metode

Diplomski rad

Mentor:
**prof. dr. sc.
Dragana Jankov Maširević**

Student:
Ena Pintarić

Osijek, 2024.

Sadržaj

1 | Uvod

Kao pojedinci često u svakodnevnom životu donosimo razne odluke. Zapravo je cijeli naš život protkan nekim našim odlukama. One mogu obuhvaćati različita područja, poput osobnih, profesionalnih ili financijskih odluka. Donošenje odluka o karijeri, obrazovanju, financijskim ulaganjima ili osobnim odnosima sastavni je dio našeg svakodnevnog iskustva. Često nismo ni svjesni koliko odluka donesemo na dnevnoj razini jer neke od njih već donosimo rutinski. One mogu biti potpuno male i trivijalne kao kojim ćemo putem ujutro krenuti na posao ili hoćemo li popiti kavu ili čaj, a mogu biti puno veće i ozbiljnije poput koji ćemo smjer odabrati u karijeri i koliko joj se želimo posvetiti ili u kojoj ćemo državi i gradu živjeti.

Kad govorimo o problemima odlučivanja, često mislimo na one sa stajališta pojedinca, odnosno jednog donositelja odluka. No, u stvarnosti, donošenje odluka je, uglavnom, grupna aktivnost. Važno je uočiti da su mnoge odluke koje donosimo zapravo grupne odluke koje se donose kao kolektivna cjelina. Bez obzira na to jesu li to odluke unutar obitelji, radnog tima, političkog tijela ili društvene zajednice, grupno donošenje odluka ima širok spektar implikacija i utjecaja. Isto tako, među grupom postoje mnoge razlike u preferencijama, uvjerenjima i sklonostima te je iz tog razloga grupno odlučivanje mnogo složenije od onog u kojem je samo jedan donositelj odluka. Pitamo se mogu li se i kako načela koja smo razvili za individualnog donositelja odluka prenijeti u grupni kontekst. Vidjet ćemo da to ne možemo učiniti niti izravno niti jednostavno, ali moguće je analizirati probleme za grupe donositelja odluka na informativan, koristan i u krajnjem slučaju zadovoljavajući način.

Ovaj diplomski rad istražuje ključne aspekte i izazove grupnog odlučivanja, uključujući problem nemogućnosti grupiranja individualnih preferencija u grupne odluke na način koji bi zadovoljavao sve dane racionalne kriterije. Posebna pažnja posvećena je Arrovljevom teoremu o nemogućnosti koji pokazuje poteškoće u postizanju pravednog i demokratskog grupnog odlučivanja. Osim uvoda, ovaj rad sadrži još pet poglavlja. U drugom poglavlju upoznajemo se s osnovnim pojmovima teorije odlučivanja te definicijama i tvrdnjama koje će nam biti potrebne u radu. U trećem poglavlju raspravljamo o *jednostavnom pravilu većine* kao metodi grupnog odlučivanja te uvodimo pojmove *Condorcetov pobjednik* i *Condorcetov paradoks*. Također, navodimo primjer kako može doći do paradoksa te analiziramo nepoželjna svojstva ove metode glasovanja. Četvrto poglavlje započinjemo motivacijom za iskazivanje Arrowljevog teorema o nemogućnosti, zatim navodimo aksiome, odnosno uvjete za koje Arrow smatra da su minimalni zahtjevi koje bi pravedni sustav glasovanja trebao zadovoljiti te iskazujemo i dajemo dokaz Teorema o nemogućnosti. U petom poglavlju razmatramo svaki od Arrowljevih aksioma zasebno i što se događa ako se neki od njih odbace ili modificiraju. U zadnjem, šestom poglavlju, u našu raspravu o grupnom odlučivanju uvodimo funkcije vrijednosti i metode međusobne usporedbe te navodimo teorem koji nam daje odgovor na pitanje možemo li funkcije vrijednosti dane od svakog člana grupe za alternative grupirati u grupnu funkciju vrijednosti na način koji je u skladu s Arrowljevim aksiomima.

2 | Teorija odlučivanja

Odluke su neizostavan dio našeg svakodnevnog života, prisutne od samih početaka čovječanstva. Gotovo sve u našim životima proizlazi iz donesenih ili pak nedonesenih odluka. Raspravu o načinima i procesima donošenja odluka obuhvaća pojam teorije odlučivanja. Teorija odlučivanja je grana matematike koja proučava procese donošenja odluka koristeći matematičke modele i alate za analizu odlučivanja, s ciljem pronalaženja najbolje moguće odluke u danoj situaciji, uzimajući u obzir sve relevantne čimbenike. Primjena teorije odlučivanja proteže se na različita područja poput ekonomije, politike, psihologije, sociologije i mnogih drugih.

2.1 Osnovni pojmovi i definicije teorije odlučivanja

U ovome poglavlju navest ćemo pojmove i definicije koji će nam biti potrebni u ovom radu.

Definicija 1. *Alternative, koje još nazivamo akcije, a ponekad i objekti, predstavljaju različite mogućnosti, odnosno različite izbore koji su dostupni donositelju odluka (odlučitelju) u situaciji o kojoj treba odlučiti.*

Definicija 2. *Kriteriji, koje još nazivamo atributi te stanja svijeta, su faktori koji dodatno utječu na donošenje odluke. Preciznije, to su različiti kutevi gledanja na dane alternative.*

Ponekad čak i najjednostavnije odluke mogu biti teške za donijeti. Dok neki donositelji odluka mogu brzo donijeti odluku u trenutku, drugi odlažu proces donošenja odluke dok pažljivo ne razmotre sve moguće opcije i posljedice koje te opcije nose sa sobom. Osim toga, različiti donositelji odluka mogu izabrati potpuno različite putove i donijeti potpuno drugačije odluke u istoj situaciji ili problemu. Ovo razlikovanje u odlukama može proizaći iz njihovih osobnih uvjerenja, sklonosti i preferencija. Kada govorimo o preferencijama, pretpostavljamo da smo u uvjetima sigurnosti, odnosno da donositelj odluke točno zna sve posljedice svojih odluka te da svaka od dostupnih akcija vodi do dobro određenih posljedica. U kontekstu preferencija, akcije uobičajeno nazivamo objektima.

Definicija 3. *Kažemo da donositelj odluka preferira (kažemo još i jako preferira) objekt a nad objektom b (u oznaci $a \succ b$) ako bi, u slučaju da mu ponudimo izbor između a i b, bio razočaran da mora odabrati b.*

Definicija 4. *Kažemo da je donositelj odluka indiferentan između objekata a i b (u oznaci $a \sim b$) ako je jednako sretan dobije li ili a ili b.*

Definicija 5. *Kažemo da donositelj odluka slabo preferira objekt a nad objektom b (u oznaci $a \succcurlyeq b$) ako on smatra da je a dobar barem kao b.*

U nastavku navodimo i aksiome za slabu preferenciju.

Neka je A skup objekta, odnosno alternativa koje donositelj odluke promatra.

Aksiom A1 (*Usporedivost*) Svake su dvije alternative usporedive relacijom $\succcurlyeq$, odnosno za svake dvije alternative $a, b \in A$ vrijedi

$$a \succcurlyeq b \text{ ili } b \succcurlyeq a \text{ ili oboje.}$$

Aksiom A2 (*Tranzitivnost*) Relacija $\succcurlyeq$ je tranzitivna, odnosno za svake tri alternative $a, b, c \in A$ vrijedi

$$a \succcurlyeq b \text{ i } b \succcurlyeq c \Longrightarrow a \succcurlyeq c.$$

Aksiom A3 (*Konzistentnost slabe preferencije i indiferentnosti*) Za svake dvije alternative $a, b \in A$ vrijedi

$$a \sim b \Longleftrightarrow a \succcurlyeq b \text{ i } b \succcurlyeq a.$$

Aksiom A4 (*Konzistentnost slabe i jake preferencije*) Za svake dvije alternative $a, b \in A$ vrijedi

$$a \succ b \Longleftrightarrow b \not\succcurlyeq a.$$

Sada ćemo se ukratko upoznati s *tablicama odlučivanja* i pojmovima vezanim uz njih kako bismo mogli precizno iskazati aksiom koji će nam biti potreban u nastavku.
Već smo definirali pojam *akcije*, odnosno *alternative* i pojam *kriterij*, odnosno *stanje svijeta*. Pretpostavimo sada da donositelj odluke ima informaciju o svim mogućim stanjima svijeta, da je njih konačno mnogo i da su ona označena $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$. Pretpostavimo i da je dano konačno mnogo akcija koje su označene $a_1, a_2, ..., a_m$ od kojih donositelj odluke mora odabrati samo jednu. Ako s x_{ij} označimo posljedicu akcije a_i u stanju θ_j, tada *tablicu odlučivanja* zapisujemo na sljedeći način

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="4">stanja svijeta</td></tr>
<tr><td rowspan="4">akcije</td><td>posljedice</td><td>θ_1</td><td>θ_2</td><td>$\cdots$</td><td>θ_n</td></tr>
<tr><td>a_1</td><td>x_{11}</td><td>x_{12}</td><td>$\cdots$</td><td>x_{1n}</td></tr>
<tr><td>$\vdots$</td><td>$\cdots$</td><td>$\cdots$</td><td>$\ddots$</td><td>$\cdots$</td></tr>
<tr><td>a_m</td><td>x_{m1}</td><td>x_{m2}</td><td>$\cdots$</td><td>x_{mn}</td></tr>
</table>

Tablica 2.1: Tablica odlučivanja

Posljedicama x_{ij} možemo pridružiti numeričke vrijednosti na način

$$v(x_{ij}) := v_{ij}.$$

U tom slučaju, $v(x_{ij}) > v(x_{kl})$ označava da donositelj odluke preferira posljedicu x_{ij} nad posljedicom x_{kl}.

Tablice odlučivanja najčešće se vežu uz odlučivanje u uvjetima jake nesigurnosti, pri čemu racionalni donositelj odluke treba poštivati takozvane *socijalne aksiome* koji se odnose na skup od osam aksioma (vidjeti [3]): *potpunost rangiranja, neovisnost o oznakama, neovisnost o mjernoj skali, jaka dominacija, neovisnost o irelevantnim alternativama, neovisnost o dodavanju konstante stupcu, neovisnost o permutaciji elemenata u retku* i *neovisnost o dupliciranju stupaca*. Od navedenih aksioma izdvajamo sljedeći koji će nam biti od interesa.

Aksiom AA1 (*Neovisnost o irelevantnim alternativama*) Neka je dana tablica odlučivanja dimenzija $m \times n$ u kojoj su naznačene akcije a_i, stanja svijeta θ_j i vrijednosti $v_{ij}, i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$. Neka je konstruirana druga tablica odlučivanja na način da smo prvoj tablici dodali jednu akciju te je

$$v'_{ij} = v_{ij},\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$$
$$v'_{(m+1)j} = x,\ j = 1, \ldots, n,$$

gdje x označava bilo koju vrijednost. Metoda odlučivanja tada akcijama u 1. tablici mora dodijeliti težine v_i, $i = 1, \ldots, m$, a akcijama u 2. tablici težine v'_i, $i = 1, \ldots, m+1$ tako da vrijedi

$$v_i > v_k \iff v'_i > v'_k,\ i, k = 1,\ \ldots, m.$$

U nastavku, definirat ćemo još i ordinalnu funkciju vrijednosti te izmjerivu funkciju vrijednosti.

Definicija 6. *Za zadani skup alternativa $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ i relaciju slabe preferencije $\succcurlyeq$ nad A definiramo ordinalnu funkciju vrijednosti $v : A \to \mathbb{R}$ tako da za proizvoljne $a_i,\ a_j \in A$ vrijedi*

$$a_i \succcurlyeq a_j \iff v(a_i) \geq v(a_j).$$

Kako bismo povećali ekspresivnost donositelja odluke, uobičajeno je uvesti pojam *zamjene* i relaciju slabog uređaja na zamjene. Neka $(a \leftarrow b)$ bude oznaka za zamjenu (engl. exchange) b sa a. Kao i do sada, $\succcurlyeq$ označava slabu preferenciju među akcijama, odnosno $a \succcurlyeq b$ znači da donositelj odluka slabo preferira a nad b, dok će sada $\succcurlyeq_e$ označavati slabu preferenciju među zamjenama.

Definicija 7. *Neka su dane akcije $a, b, c, d \in A$. Kažemo da donositelj odluke preferira, odnosno slabo preferira zamjenu $(a \leftarrow b)$ nad zamjenom $(c \leftarrow d)$ ako on više preferira dobiti a umjesto b nego c umjesto d. To označavamo*

$$(a \leftarrow b) \succcurlyeq_e (c \leftarrow d).$$

Definicija 8. *Funkciju $v : A \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava*

1. $a \succcurlyeq b \ \Leftrightarrow\ v(a) \geq v(b)$

2. $(a \leftarrow b) \succsim_e (c \leftarrow d) \;\Leftrightarrow\; v(a) - v(b) \geq v(c) - v(d)$

zovemo izmjerivom funkcijom vrijednosti za relacije slabe preferencije $\succsim$ i slabe preferencije nad zamjenama $\succsim_e$.

Sada navodimo jedan od takozvanih aksioma *slabog uređaja* koji povezuju slabu preferenciju i slabu preferenciju nad zamjenama, a koji će nam također biti potreban u nastavku.

Aksiom AAA1 (*Rješivost*)

(i) Za sve alternative $b, c, d \in A$ postoji alternativa $a \in A$ takva da vrijedi

$$(a \longleftarrow b) \sim_e (c \longleftarrow d).$$

(ii) Za sve alternative $b, c \in A$ postoji alternativa $a \in A$ takva da vrijedi

$$(b \longleftarrow a) \sim_e (a \longleftarrow c).$$

Ostale aksiome slabog uređaja čitatelj može pronaći u [3].

U nastavku izdvajamo tvrdnju koja će nam poslužiti u boljem razumijevanju teorijskih koncepata koji će uslijediti u 6. poglavlju.

Propozicija 1. [3] *Pretpostavimo da na skupu alternativa A vrijedi aksiom rješivosti. Tada su v i w dvije izmjerive funkcije vrijednosti za iste preferencije $\succsim$ i $\succsim_e$ ako i samo ako postoje realni brojevi $\alpha, \beta > 0$ tako da vrijedi*

$$w(a) = \alpha v(a) + \beta, \text{ za svaki } a \in A.$$

Dokaz. Prvo pretpostavimo da vrijedi

$$w(a) = \alpha v(a) + \beta,\ a \in A,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha > 0.$$

Tada je

$$\begin{aligned} a \succsim b &\Longleftrightarrow v(a) \geq v(b) \Longleftrightarrow \alpha v(a) + \beta \geq \alpha v(b) + \beta \\ &\Longleftrightarrow w(a) \geq w(b) \end{aligned}$$

i time je zadovoljen prvi uvjet Definicije 8.
Osim toga, vrijedi

$$\begin{aligned} (a \leftarrow b) \succsim_e (c \leftarrow d) &\Longleftrightarrow v(a) - v(b) \geq v(c) - v(d) \\ &\Longleftrightarrow \alpha(v(a) - v(b)) \pm \beta \geq \alpha(v(c) - v(d)) \pm \beta \\ &\Longleftrightarrow w(a) - w(b) \geq w(c) - w(d), \end{aligned}$$

čime je zadovoljen drugi uvjet Definicije 8. Dakle, w je izmjeriva funkcija vrijednosti nad istim preferencijama kao i izmjeriva funkcija vrijednosti v.
Dio dokaza koji pokazuje da funkcije v i w mogu biti definirane samo nad istim preferencijama ukoliko je $w = \alpha v + \beta$, za neke $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha > 0$, čitatelj može pronaći u [5]. $\square$

3 | Jednostavno pravilo većine

Poznato je da grupe donose odluke nekim oblikom glasovanja. Najjednostavniji i najpopularniji postupak glasovanja, kojem ćemo ovdje naglasiti nedostatke i poteškoće koje dolaze s njim, je *jednostavno pravilo većine*, tj. Condorcetov jednostavni princip većine. Marquis de Condorcet, francuski matematičar, predložio je metodu glasovanja koja se temelji na uspoređivanju alternativa u parovima te se kandidat koji je većinski pobjednik u usporedbi sa svakim protivnikom, odnosno svakom alternativom, naziva *Condorcetov pobjednik*. Njegovo jednostavno pravilo većine zapravo govori da bi grupa, kao cjelina, trebala strogo preferirati a nad b ako većina njezinih članova strogo preferira a nad b. Ukoliko jednak broj članova grupe preferira a nad b i b nad a, onda bi grupa trebala biti indiferentna između a i b. Članovi koji su indiferentni između a i b ne utječu na preferencije grupe. Nedostatak ove metode je u tome što ne daje uvijek rezultat, tj. može se dogoditi da ne postoji Condorcetov pobjednik. To ćemo pokazati na sljedećem primjeru.

Primjer 1. *Razmotrimo problem s tri pojedinca i tri alternative: a, b i c. Pretpostavimo da pojedinci imaju sljedeće stroge preferencije.*

Pojedinac 1: $a \succ_1 b \succ_1 c$.

Pojedinac 2: $b \succ_2 c \succ_2 a$.

Pojedinac 3: $c \succ_3 a \succ_3 b$.

Relacija strogih preferencija je označena indeksom kako bi se naznačio pojedinac na kojeg se ta relacija odnosi. Zatim, koristeći $\succ_u$ *za označavanje stroge preferencije grupe, jednostavno pravilo ili princip većine dovodi nas do sljedećeg:*

$a \succ_u b$ *jer 2 od 3 pojedinca preferira a nad b.*

$b \succ_u c$ *jer 2 od 3 pojedinca preferira b nad c.*

$c \succ_u a$ *jer 2 od 3 pojedinca preferira c nad a.*

Dakle, jednostavno pravilo većine može dovesti do netranzitivne grupne preferencije.

Situacija opisana u prethodnom primjeru poznata je kao *Condorcetov paradoks*. Također, pravilo jednostavne većine se rijetko, ako ikada, koristi za uspoređivanje svih alternativa istovremeno. Kao što smo već naveli, to pravilo, zvano i Condorcetova metoda, alternative razmatra par po par. Alternativa a može se usporediti

s b; manje poželjna se odbacuje, dok se ona više poželjna uspoređuje s idućom alternativom c i tako dalje.
Stoga, u primjeru, tri osobe mogle bi prvo usporediti a s b, a zatim usporediti pobjednika s c. Rezultat bi bio da bi grupa odabrala c budući 2 od 3 pojedinca više preferiraju a nad b, a zatim 2 od 3 pojedinca više preferira c nad a. Pretpostavimo, međutim, da su za početak uzimali u obzir izbor između b i c. U tom slučaju rezultat ne bi bio isti, odnosno na kraju bi odabrana bila alternativa a. Ako bi izbor započeli usporedbom a i c, tada bi na kraju njihov konačan izbor bila alternativa b.
Alternativa koja bi bila odabrana ovom procedurom usporedbe parova je određena redoslijedom kojim su alternative razmatrane, a ne prvenstveno preferencijama članova grupe. Preferencije pojedinaca jasno su i simetrično suprotstavljene i postoji vrlo dobar razlog za tvrdnju da bi grupa kao cjelina trebala biti indiferentna između tri alternative. Zbog toga je konačan izbor pomalo zabrinjavajući te se postavlja pitanje treba li izbor grupe ovisiti o redoslijedu u kojem se razmatraju alternative.
Postoji još jedan negativan aspekt ovog problema. Pretpostavimo da su preferencije članova grupe kako smo naveli na početku primjera i pretpostavimo da prvi pojedinac zna preferencije ostala dva. Ako uspoređujemo alternative redoslijedom da prvo uspoređujemo a s b, a zatim pobjednika s c, tada će prvi pojedinac moći predvidjeti da će na kraju biti odabrana alternativa c. No, pretpostavimo sada da on ne iznosi istinu o svojim preferencijama, dok drugi iskreno otkrivaju svoje. Onda, ako pojedinac 1 iznese svoje preferencije na način:

$$b \succ_1 a \succ_1 c,$$

konačan izbor grupe bit će b tako što će se prvo uspoređivati a i b iz čega će biti odabrano b, a zatim u usporedbi sa c će kao krajnji pobjednik izaći b. Dakle, lažući, on će osigurati da grupa odabere b koji on preferira u odnosu na početni izbor grupe c. U ovim okolnostima, pravilo jednostavne većine njega potiče da laže, odnosno on će taktizirati i time namjestiti glasovanje.

U sljedećim poglavljima otkrit ćemo da ovo pravilo nije jedino koje posjeduje nepoželjna svojstva. Sve sheme glasovanja, odnosno svi sustavi glasovanja mogu dovesti do nedemokratskog ili iracionalnog grupnog ponašanja.

4 | Arrowljev teorem

4.1 O problemu

Sada ćemo formalno izraziti problem koji ćemo promatrati u ovom poglavlju. Pretpostavimo da imamo n pojedinaca koji su zaduženi za odabir akcije iz nekog određenog skupa mogućih akcija. Pretpostavit ćemo da je taj skup mogućih akcija konačan. Također, pretpostavit ćemo da je svaki pojedinac odlučio kako bi on rangirao akcije za sebe. Neka je $\succsim_i$ oznaka za slabu preferenciju i-tog pojedinca. Tada pišemo $a \succsim_i b$ ako on slabo preferira a u odnosu na b. Za cijeli poredak preferencija i-tog pojedinca, tj. cijeli skup alternativa poredan prema njegovim preferencijama također ćemo koristiti oznaku $\succsim_i$. Dakle, ako je skup alternativa a, b, c, d, e i ako i-ti pojedinac rangira akcije na način $a \succ_i d \sim_i b \succ_i e \succ_i c$, koristit ćemo oznaku $\succsim_i$ za predstavljanje niza izjava "$a \succ_i d \sim_i b \succ_i e \succ_i c$". Preciznije, relacija slabe preferencije objedinjuje relacije jake preferencije i indiferentnosti. Osim na taj način, preferencije pojedinca možemo prikazati i kao:

1. izbor: a
2. izbor: b, d
4. izbor: e
5. izbor: c.

Problem je sada postavljen za n pojedinaca i njihove preferencije $\succsim_i$, $i = 1, 2, ..., n$. Želimo vidjeti kako iz njih izvesti poredak preferencija za grupu u cjelini. Taj poredak označit ćemo $\succsim_g$ i pisati $a \succsim_g b$ za određene izjave o preferenciji grupe. Sustav glasovanja ili mehanizam gdje se $\succsim_1, \succsim_2, ..., \succsim_n$ kombiniraju kako bi se dobilo $\succsim_g$ često se naziva ustrojem ili ustrojstvom grupe. Ova terminologija naglašava namjeru pružanja načina konstruiranja $\succsim_g$ bez obzira na poredak preferencija $\succsim_1, \succsim_2, ..., \succsim_n$.
Kao primjer, možemo zamisliti odbor direktora neke tvrtke koji razmatra planiranje njenih aktivnosti. U obzir dolazi nekoliko korporativnih planova. Svaki direktor je razmotrio ove planove, vjerojatno u raspravi s kolegama direktorima te proučavanjem izvještaja i dokumenata koji su pripremljeni od strane računovodstvenog odjela, odjela za operacijska tržišta i drugih relevantnih odjela unutar tvrtke. Zatim je svaki od direktora individualno rangirao alternative, oblikujući na taj način vlastiti poredak preferencija $\succsim_i$. Nama proces kojim su direktori došli do svojih preferencija nije ključan, bilo da su se oslanjali na vlastitu intuiciju ili neku drugu metodu. Naš zadatak je dizajnirati sustav glasovanja odbora koji će kombinirati

poretke preferencija direktora kako bi dobili ukupan "poredak odbora" mogućih korporativnih planova.
Osim ovoga, navodimo još nekoliko primjera problema grupnog odlučivanja: grupa osiguravatelja koja odlučuje o visini premije za osiguranje od određenog rizika, Sabor koji odlučuje hoće li usvojiti zakonodavstvo; povjerenstvo izbornika nekog sporta odlučuje o članovima tima; i tako dalje. U ovim primjerima, n je mali ili umjereno velik. Odluke se često donose putem rasprava "za okruglim stolom" prije glasovanja. S druge strane, za velik ili vrlo velik n, suočavamo se s problemima društvenog izbora.
Kao tipične primjere problema društvenog izbora možemo navesti situacije poput biranja članova parlamenta od strane biračkog tijela ili glasovanje na referendumu. U takvim slučajevima, iako je neizbježno da će biti mnogo javnih rasprava koje prethode glasovanju, svaki član biračkog tijela će raspravljati o problemu samo s nekoliko drugih pojedinaca. Odluka se ne donosi za stolom, već na izbornim ili anketnim mjestima. Ipak, i dalje je riječ o problemu grupnog odlučivanja.
Ponekad društvo možda i nije svjesno da sudjeluje u procesu donošenja odluka i da glasa o nečemu. Primjerice, u ekonomiji, tržišni sustav možemo promatrati kao mehanizam društvenog izbora za postavljanje cijena i, prema tome, distribuciju dobara. Svaki pojedinac u populaciji "glasa" ili izražava svoje preferencije kupnjom ili nekupnjom robe po određenim cijenama. Tijekom određenog vremenskog razdoblja tržišni sustav omogućuje cijenama da se prilagode na ravnotežne razine i te se razine mogu smatrati grupnom odlukom.
Razlika između problema društvenog izbora i problema odlučivanja u manjim skupinama često je vrlo suptilna i smatra se nedefiniranom. Povijesno gledano, ta razlika proizlazi iz fokusa ekonomista i politologa na pitanja pravednosti i funkcionalnosti društva s obzirom na njegovu brojnost članova. Manje skupine nisu bile predmet njihovih istraživanja. Iako postoje razlike u načinima glasovanja "za stolom", na izbornim mjestima ili na tržištima, te razlike su više u intenzitetu nego u fundamentalnim kategorijama. Načela pravednosti i racionalnosti koja ćemo primijeniti na sustave glasovanja pokazat će se adekvatnima bez obzira na veličinu grupe.
Za kraj, naglasit ćemo jednu bitnu napomenu o kontekstu. Ističemo da pojedinačni poretci preferencija $\succsim_i$ mogu biti sebični, tj. mogu odražavati isključivo preferencije pojedinca bez obzira što to može značiti za ostale članove grupe; ili $\succsim_i$ može biti altruistično, odnosno može odražavati preferencije pojedinca koje su oblikovane u korist šire dobrobiti grupe, gdje pojedinac uzima u obzir dobrobit svojih kolega i bližnjih.

4.2 Teorem o nemogućnosti

Nas zanima kako bi se oblikovao ukupan poredak preferencija grupe $\succsim_g$ od pojedinačnih poredaka preferencija $\succsim_1, \succsim_2, ..., \succsim_n$. Kenneth J. Arrow je 1951. predložio sljedeće aksiome koji postavljaju minimalne zahtjeve pravednosti i racionalnosti koje bi takav sustav trebao zadovoljiti. Nažalost, pokazat će se da su ti zahtjevi međusobno kontradiktorni.

Aksiom 4.2.1. (*Slaba preferencija*) $\succsim_1, \succsim_2, ..., \succsim_n$ i $\succsim_g$ su sve slabe preferencije, tj. svaka od njih zadovoljava Aksiome A1-A4.

Aksiom 4.2.2. (*Netrivijalnost*)

1. Postoje barem dva člana grupe n_1 i n_2, tj. $n \geq 2$.
2. Postoje barem tri alternative.

Aksiom 4.2.3. (*Univerzalna domena*) Grupni poredak preferencija $\succsim_g$ je definiran bez obzira na to što su $\succsim_1, \succsim_2, ..., \succsim_n$.

Aksiom 4.2.4. (*Binarna relevantnost*) Neka je $\succsim_1, \succsim_2, ..., \succsim_n$ skup pojedinačnih poredaka preferencija nad skupom alternativa A. Neka je $\succsim'_1, \succsim'_2, ..., \succsim'_n$ drugi skup pojedinačnih poredaka preferencija nad skupom alternativa A'. Pretpostavimo da alternative a i b leže i u skupu A i u A': $a, b \subset A \cap A'$. Nadalje, pretpostavimo da su $\succsim_1, \succsim_2, ..., \succsim_n$ i $\succsim'_1, \succsim'_2, ..., \succsim'_n$ identični na a, b; odnosno, za svaki indeks i vrijedi

$$\begin{gathered} a \succsim_i b \Leftrightarrow a \succsim'_i b \\ \text{i} \\ b \succsim_i a \Leftrightarrow b \succsim'_i a. \end{gathered}$$

Tada bi ustroj grupe trebao rezultirati istom grupnom preferencijom između a i b:

$$\begin{gathered} a \succsim_g b \Leftrightarrow a \succsim'_g b \\ \text{i} \\ b \succsim_g a \Leftrightarrow b \succsim'_g a. \end{gathered}$$

Jednoglasnost ima središnje mjesto u teoriji demokracije. Ako svaki član neke grupe preferira a nad b, tada bi grupa trebala preferirati a nad b. Ovaj princip, koji je znatno stariji, pripisuje se talijanskom ekonomistu Vilfredu Paretu, te ga navodimo kao sljedeći aksiom.

Aksiom 4.2.5. (*Paretov princip za jake preferencije*) Ako svaki pojedinac ima preferenciju $a \succ_i b$, tada grupa ima preferenciju $a \succ_g b$.

Posljednje, suprotno konceptu grupnog donošenja odluka je ideja postojanja diktatora. Ako diktator uvijek donosi odluku, nema grupnog donošenja odluka. Stoga pretpostavljamo sljedeće.

Aksiom 4.2.6. (*Bez diktature*) Ne postoji pojedinac čije preferencije automatski postaju preferencije grupe, neovisno o preferencijama ostalih članova.

Poznati Arrowljev teorem o nemogućnosti, nazvan i Teorem o nemogućnosti, jednostavno tvrdi da su Aksiomi 4.2.1. - 4.2.6. međusobno neusklađeni, odnosno kontradiktorni. Tvrdi da ne postoji ustroj grupe koji istovremeno zadovoljava svih šest pretpostavki. U nastavku ćemo iskazati spomenuti teorem te dati njegov dokaz.

Teorem 1 (Arrowljev teorem o nemogućnosti [2])**.** *Ne postoji ustroj grupe koji omogućuje definiranje $\succsim_g$ iz $\succsim_1, \succsim_2, ..., \succsim_n$ na način koji je u skladu s Aksiomima 4.2.1. - 4.2.6.*

Istaknimo da teorem ne tvrdi da za sve moguće grupne odluke i za sve moguće grupne ustroje, barem jedan od aksioma neće biti zadovoljen. Umjesto toga, tvrdi da za svaki mogući ustroj postoji barem jedan skup mogućih pojedinačnih preferencija takav da konstrukcija $\succsim_g$ ne zadovoljava barem jedan od aksioma. Drugim riječima, svako moguće ustrojstvo grupe ima potencijal biti nepravedno ili iracionalno.
Prije samog dokaza navest ćemo neke definicije koje će nam biti potrebne.

Definicija 9 (Odlučujuća podgrupa)**.** *Podgrupa pojedinaca V odlučujuća je za a nad b ako, kad god vrijedi $a \succ_i b$ za sve pojedince $i \in V$ i $b \succ_i a$ za sve pojedince $i \notin V$, grupa preferira $a \succ_g b$.*

Drugim riječima, prema ustroju koji konstruira $\succsim_g$ iz pojedinačnih $\succsim_i$, podrupa V je odlučujuća za a nad b ako, kad god pojedinci iz V jednoglasno preferirajući a nad b imaju moć tu preferenciju prenijeti na cijelu grupu, unatoč strogoj preferenciji za b nad a članova grupe koji nisu iz V.

Definicija 10 (Minimalno odlučujuća podgrupa)**.** *Podgrupa V je minimalno odlučujuća podgrupa ako je odlučujuća za neko a nad nekim b i nijedna prava podgrupa od V nije odlučujuća za bilo koje c nad bilo kojim d.*

Napomenimo da minimalno odlučujuća podgrupa uvijek postoji prema Arrowljevim aksiomima. Paretov princip osigurava da je cijela grupa odlučujuća za sve a nad svim b. Dakle, sama grupa je odlučujuća podgrupa. Možemo izbaciti članove grupe dok ne dobijemo minimalno odlučujuću podgrupu. Također, važno je naglasiti da se pri definiranju odlučujućih podgrupa koristimo binarnom relevantnosti. Ako Aksiom 4.2.4 vrijedi, sigurni smo da grupna preferencija između a i b ovisi samo o pojedinačnim preferencijama između a i b.
Sada smo spremni dokazati Arrowljev teorem.

Dokaz. Teorem se dokazuje u dva koraka. Prvo pokazujemo da minimalna odlučujuća podgrupa mora biti jedan pojedinac. Zatim pokazujemo da je taj pojedinac diktator u kontradikciji s Aksiomom 4.2.6.

Pretpostavimo da je V minimalni odlučujući podskup i da je odlučujući za a nad b. Pretpostavimo i da V sadrži više od jedne osobe. Neka je j određena osoba iz V. W sadrži preostale osobe iz V, a U one osobe koje nisu u V. Razmotrimo sljedeće redoslijede preferencija u primjeru s 3 alternative.

	$\{j\}$	W	U
1. izbor	a	c	b
2. izbor	b	a	c
3. izbor	c	b	a

Ovo nam označava, na primjer, da svi pojedinci iz W imaju preferenciju $c \succ_i a \succ_i b$.
S obzirom na to da vrijedi $a \succ_i b$ za sve $i \in V$ jer V čine pojedinac j i svi pojedinci iz W, mora vrijediti $a \succ_g b$ jer je V odlučujuća za a nad b. W je pravi podskup od V i stoga ne može biti odlučujuća za nijedan drugi par alternativa. Zato ne može biti $c \succ_g b$ jer bi onda W bila odlučujuća za c nad b. Dakle, $b \succsim_g c$. Prema Aksiomu 4.2.1. $\succsim_g$ je grupni poredak slabih preferencija. Sada imamo, $a \succ_g b, b \succsim_g c \Rightarrow a \succ_g c$. Ali, uočimo, samo j preferira a nad c, $a \succ_j c$; svi ostali preferiraju c nad a, $c \succ_i a$. Dakle, j je odlučujući za a nad c, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je V minimalni odlučujući podskup. Jedini način da se ova kontradikcija izbjegne bez kršenja jednog od Arrowljevih aksioma je prihvatiti da V mora biti jedan pojedinac. Dalje ćemo pokazati da je j, koji je odlučujući za određeni a nad određenim b, diktator; tj. on je odlučujući za bilo koji c nad bilo kojim d. Prvo pokažimo da je j odlučujući za a nad bilo kojim d. Dovoljno je to pokazati za a nad bilo kojim $d \neq b$. Razmotrimo sljedeću situaciju i napomenimo da U čine svi članovi grupe osim j.

$$\begin{array}{lccl} & \{j\} & U & \\ \text{1. izbor} & a & b & \\ \text{2. izbor} & b & d & \\ \text{3. izbor} & d & a & , d \neq b. \end{array}$$

Vidimo da je j odlučujući za a nad b; $a \succ_g b$. Nadalje, za sve ostale članove grupe vrijedi $b \succ_i d$ pa, prema Paretovom principu, slijedi $b \succ_g d$. Budući je grupni poredak preferencija $\succ_g$ tranzitivan (Aksiom 4.2.1.) vrijedi $a \succ_g d$. No, samo jedan j smatra $a \succ_j d$, svi ostali smatraju $d \succ_i a$ pa je j odlučujući za a nad bilo kojim d.
Sljedeće pokazujemo da je j odlučujući za bilo koji $c \neq a$ nad bilo kojim $d \neq a$. Razmotrimo situaciju:

$$\begin{array}{lccl} & \{j\} & U & \\ \text{1. izbor} & c & d & \\ \text{2. izbor} & a & c & \\ \text{3. izbor} & d & a & , d \neq a. \end{array}$$

Sada imamo:

$$\begin{array}{ll} \text{Paretov princip} & \Rightarrow c \succ_g a \\ j \text{ je odlučujući za } a \text{ nad } d & \Rightarrow a \succ_g d \\ \succ_g \text{ je tranzitivna} & \Rightarrow c \succ_g d \end{array}$$

Samo j smatra $c \succ_j d$, ostali $d \succ_i c$. Stoga je j odlučujući za c nad d. Konačno, pokazat ćemo da je j odlučujući za bilo koji c nad bilo kojim a.

$$\begin{array}{lcc} & \{j\} & U \\ \text{1. izbor} & c & d \\ \text{2. izbor} & d & a \\ \text{3. izbor} & a & c \end{array}$$

U ovom slučaju imamo:

$$\begin{array}{ll} j \text{ je odlučujući za } c \text{ nad } d \neq a & \Rightarrow c \succ_g d \\ \text{Paretov princip} & \Rightarrow d \succ_g a \\ \succ_g \text{ je tranzitivna} & \Rightarrow c \succ_g a \end{array}$$

Ali, samo za j vrijedi $c \succ_j a$, dok kod ostalih vrijedi $a \succ_i c$. Stoga je j odlučujući za bilo koji c nad a. Slijedi da je j diktator u kontradikciji sa Aksiomom 4.2.6. Dakle, šest aksioma je međusobno nespojivo. Nijedan ustroj grupe ne može zadovoljiti svih šest. □

5 | O Arrowljevim aksiomima

Dakle, Arrow tvrdi da ne postoji sustav glasovanja ili bilo koja druga metoda prikupljanja individualnih preferencija koja zadovoljava svih šest aksioma koje on smatra minimalnim zahtjevima da bi sustav bio pravedan, racionalan i demokratski. Njegov rezultat je u najmanju ruku iznenađujući, a utjecaj njegove teorije je mnogo širi nego što se čini na prvi pogled. Ne možemo tvrditi da su većina glasačkih sustava koje koristimo u praksi izuzeti od njegovih implikacija jer oni, uglavnom, ne zahtijevaju da glasači rangiraju svoje preferencije, već samo da naznače svoje prve ili druge izbore. U svojoj formulaciji, Arrow navodi da se grupna preferencija $\succsim_g$ formira nekim postupkom agregacije, odnosno grupiranjem pojedinačnih redoslijeda preferencija $\succsim_1, \succsim_2, ..., \succsim_n$. S obzirom na to, razumljivo je da su mnogi pokušali argumentirati kako su određeni Arrowljevi aksiomi neprikladni i da, kada se modificiraju ili odbace, nemogućnost nestaje. U nastavku ćemo razmotriti svaki od aksioma i istražiti kako njihove promjene utječu na mogućnost donošenja odluka.

5.1 Bez diktature

Započet ćemo s onim najmanje spornim, aksiomom *Bez diktature* (Aksiom 4.2.6.). Oko ovog aksioma nema puno rasprave jer je općenito prihvaćeno da demokracija i diktatura nisu spojivi koncepti. Međutim, važno je primijetiti da aksiom ne zabranjuje samo vidljive i očite diktatore, nego i one nevidljive. Jednostavno rečeno, aksiom tvrdi da preferencije grupe $\succsim_g$ ne bi uvijek trebale biti u skladu s preferencijama određenog pojedinca $\succsim_i$ bez obzira na stavove i preferencije drugih pojedinaca. Dakle, aksiom se primijenjuje bez obzira na to je li diktator svjestan da diktira i znaju li drugi članovi grupe da on to čini.

5.2 Paretov princip

Paretov princip (Aksiom 4.2.5.) također je gotovo univerzalno prihvaćen. Prema tom principu, ako pojedinci jednoglasno preferiraju a nad b, onda bi i grupa kao cjelina trebala preferirati a nad b. Aksiom koji smo naveli ovo tvrdi samo za jake preferencije. Postoje i općenitije, stoga i jače verzije Paretovog principa koju istu tvrdnju potvrđuju i za slabe preferencije, no mi ih ovdje nećemo navoditi. Rezultat prethodnog poglavlja temelji se na najslabijoj i općenito najprihvatljivijoj Paretovoj pretpostavci. Uz malo preoblikovanja i suptilniji matematički argument, gotovo isti rezultat kao i Arrowljev može se izvesti ne pretpostavljajući niti jednu verziju Paretovog principa tako da ovaj aksiom nije uzrok nemogućnosti (Wilson, 1972. [7]).

5.3 Netrivijalnost

Aksiom 4.2.2, nazvan *Netrivijalnost*, također je prilično neproblematičan. Teško je zamisliti grupu s manje od dva člana. Slično tome, većina odluka u stvarnome svijetu uključuje tri ili više mogućnosti, odnosno alternativa. Međutim, ovdje je važno napomenuti da nemogućnost iz teorema nestaje ako su sve odluke ograničene na izbor između samo dvije alternative. No, kako bi ovo bilo relevantno u općenitijim okolnostima, primijetimo sljedeće. Svaki postupak koji identificira određenu opciju - nazovimo je *status quo* - i zatim sekvencijalno uspoređuje tu opciju u paru s nekoliko alternativa, bilo odbacujući alternativu ili zamijenjujući *status quo* s njom će:

(i) suočiti se s poteškoćama koje proizlaze iz Teorema o nemogućnosti jer postupak grupiranja individualnih preferencija $\succsim_1, \succsim_2, ..., \succsim_n$ u preferenciju grupe $\succsim_g$ može biti bilo koji postupak,

(ii) naići na probleme koji su tipični za primjere taktiziranja i namještanja glasovanja.

5.4 Slaba preferencija

Nadalje, usredotočit ćemo se na kontroverznije aksiome. *Slaba preferencija* (Aksiom 4.2.1) čini se intuitivnom unutar općeg pristupa teoriji odlučivanja. Međutim, u literaturi o društvenom izboru, ovaj aksiom je predmet rasprave iz nekoliko razloga. Prvo, mnogi tvrde da stvarni ljudi nisu idealan primjer racionalnosti te da njihove preferencije mogu biti neusporedive i/ili netranzitivne. Ipak, pod uvjetom da oni mogu pružiti potrebni unos u sustav glasovanja, označiti izbor križićem ili slično, očekivalo bi se da sustav pravedno grupira njihove glasove. Stoga bi se zahtjev da su $\succsim_1, \succsim_2, ..., \succsim_n$ slabi poretci trebao odbaciti. No, treba li se zabraniti pojedincima da imaju usporedive i tranzitivne preferencije? Jer, ako to ne učinimo, tada nemogućnost ostaje. Ako bi ovakav pristup imao bilo kakav uspjeh, njegov "uspjeh" bio bi samo u pokazivanju da samo društva s iracionalnim pojedincima mogu biti demokratska. Drugo, treba li $\succsim_g$ biti slabi poredak? Nije li dovoljno da grupa identificira svoje najbolje opcije ili opciju; treba li ona i rangirati preostale? Kao što smo već primijetili, u prisutnosti aksioma *Neovisnost o irelevantinim alternativama*, pronalaženje najbolje opcije ekvivalentno je pronalaženju grupnog poretka. Zaključujemo, $\succsim_g$ bi trebao biti slabi poredak. Drugi nisu prihvatili ove primjedbe. Jednostavno zahtijevaju da postupak grupiranja dovede do skupa izbora, podskupa alternativa iz kojeg se konačni izbor može napraviti bez rizika od nedemokratskog izbora. Charles R. Plott, američki ekonomist, je 1976. otkrio da je nemoguće definirati takav skup izbora.

5.5 Univerzalna domena

Pretposljednje, za raspravu nam ostaje Aksiom 4.2.3. koji je nazvan *Univerzalna domena*. On zahtijeva da, koje god individualne preferencije $\succsim_i$ bile, koliko god različite bile, one odrede grupnu preferenciju $\succsim_g$. To možda i zvuči razumno. Demokratski sustav trebao bi utvrditi grupnu preferenciju na temelju bilo kojeg mogućeg skupa individualnih preferencija. Međutim, postoje racionalni argumenti protiv toga. U stvarnosti, iako je određeni skup redoslijeda preferencija $\succsim_1, \succsim_2, ..., \succsim_n$ moguć, malo je vjerojatno da će biti zapažen. Grupe se ne formiraju nasumično; one dijele zajedničke interese. Na primjer, upravni odbori tvrtki dijele interes za uspjeh tvrtke; oni mogu imati različite poglede o tome što je najbolje za tvrtku, ali u širem smislu će njihove preferencije biti korelirane. Slično tome, u drugim odborima i grupama, redoslijedi preferencija članova vjerojatno će biti korelirani zbog zajedničkog interesa. Stoga, možda se ne bi u potpunosti izgubio značaj ako bi se Aksiom 4.2.3. preformulirao kako bi se ograničila pažnja na one skupove $\succsim_i$ koji se čine vjerojatnima jer sukobi među njima nisu "preveliki". Jedan način ograničavanja domene individualnih rangiranja na dosljedan način uključuje pojam *jednovršne preferencije*. Redoslijedi individualnih preferencija zadovoljavaju svojstvo jednovršne preferencije ako postoji osnovni opisni poredak alternativa takav da, kroz taj poredak, svaka individualna preferencija strogo raste sve dok se ne dosegne njezina najpoželjnija alternativa nakon čega se preferencija strogo smanjuje. Osnovni opisni poredak zajednički je svim pojedincima, ali njihovi rasporedi preferencija mogu se razlikovati. Razmotrimo primjer.

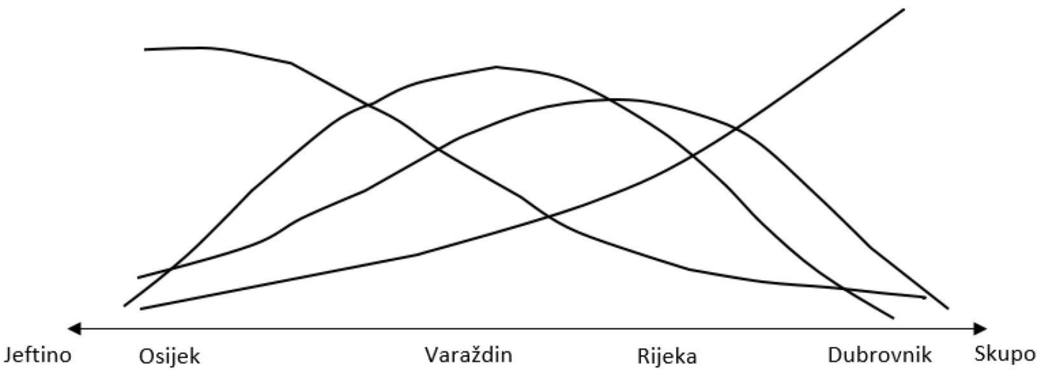
Primjer 2. *Roditelji djece iz nekog sportskog kluba biraju u kojem gradu će se održati sljedeće natjecanje. Na izbor su im dana 4 grada: Rijeka, Varaždin, Osijek i Dubrovnik. Pretpostavimo da svaki član biračkog tijela svoj poredak preferencija temelji samo na tome je li grad "skup" ili "jeftin" zbog troškova natjecanja, smještaja i ostalog. Nadalje, pretpostavimo da je svaki član, odnosno svaki roditelj pozicionirao gradove istim redoslijedom na liniji "jeftino - skupo". To nam daje zajednički osnovni opisni poredak spomenut gore, a prikazan je na Slici 5.1. Mnogi poretci preferecija u ovom primjeru su kompatibilni s pretpostavkom jednovršnosti preferencija. Na primjer:*

Varaždin$\succ$Rijeka$\succ$Osijek$\succ$Dubrovnik
Rijeka$\succ$Varaždin$\succ$Dubrovnik$\succ$Osijek
Osijek$\succ$Varaždin$\succ$Rijeka$\succ$Dubrovnik
Dubrovnik$\succ$Rijeka$\succ$Varaždin$\succ$Osijek

Međutim, mnogi drugi redoslijedi preferencija nisu u skladu s tom pretpostavkom. To su na primjer:

Osijek$\succ$Dubrovnik$\succ$Rijeka$\succ$Varaždin
Dubrovnik$\succ$Varaždin$\succ$Osijek$\succ$Rijeka

Važnost pretpostavke o jednovršnoj preferenciji je u tome što, ako je broj članova grupe neparan i ako njihove preferencije zadovoljavaju pretpostavku o jednovršnosti, tada jednostavno pravilo većine zadovoljava sve Arrowljeve aksiome osim



Slika 5.1: Primjeri jednovršnih preferencija

Univerzalne domene. No, potreba za neparnim brojem članova grupe nam sugerira da ovaj rezultat nema bitan značaj u potrazi za demokratskim grupiranjem preferencija. Dakle, jednovršna preferencija sama po sebi nije rješenje. Može se tvrditi da ona dodaje važnost ideji ograničavanja domene tako da se $\succsim_g$ definira samo na osnovu vjerojatnih uzroka neslaganja unutar $\succsim_1, \succsim_2, ..., \succsim_n$.

5.6 Binarna relevantnost

Za raspravu nam je preostao još aksiom *Neovisnost o irelevantnim alternativama* ili kako smo ga ovdje nazvali *Binarna relevantnost*. Ovo je možda najkontroverznija pretpostavka u teoriji društvenog izbora, ako ne i u teoriji odlučivanja. Promotrimo sljedeći primjer.

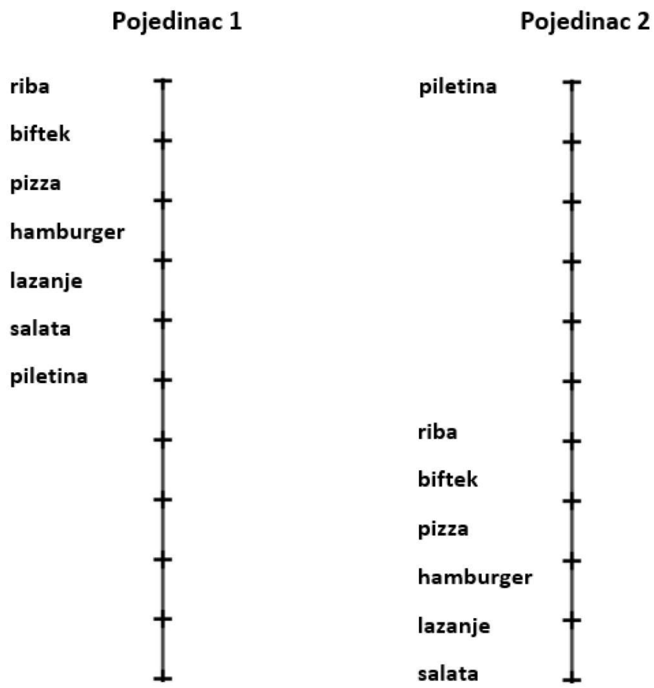
Primjer 3. *Dvije osobe moraju odlučiti hoće li za večeru napraviti ribu ili piletinu. Moguće je pojesti samo ribu ili samo piletinu. Međutim, umjesto da samo izraze svoje preferencije između ovih opcija, oboje rangiraju sedam različitih jela.*
Prva osoba jela je rangirala na sljedeći način:

$$riba \succ_1 biftek \succ_1 pizza \succ_1 hamburger \succ_1 lazanje \succ_1 salata \succ_1 piletina$$

Druga osoba dala je sljedeći poredak svojih preferencija:

$$piletina \succ_2 riba \succ_2 biftek \succ_2 pizza \succ_2 hamburger \succ_2 lazanje \succ_2 salata$$

Primamljivo je tvrditi da će, iako je riba $\succ_1$ pileteina i piletina $\succ_2$ riba, jasno simetričan odabir, njihov izbor biti pojesti ribu. Riba je prvi odabir prvog pojedinca, a piletina je prvi izbor drugog pojedinca. No, važno je napomenuti da je za prvog pojedinca piletina sedmi izbor kada su dostupna ostala jela, dok bi riba bila drugi izbor drugog pojedinca i da su sva ostala jela dostupna. Ovo ukazuje na različitu snagu preferencija, odnosno na neku *vrstu jačine preferencija. Stoga, drugih pet jela postaju relevantne alternative koje utječu na konačnu grupnu preferenciju što nije u skladu s konceptom binarne relevantnosti. Međutim, stvari možda nisu baš onakve kakvima se čine. Pogledajmo Sliku 5.2.*



Slika 5.2: Skala jačine preferencija za oba pojedinca

Pretpostavimo da su jačine preferencija značajne što omogućuje mjerenja funkcije vrijednosti za pojedince. Sasvim je moguće da one sugeriraju da bi piletina trebala biti izbor grupe. Na primjer, pojedinac 1 može imati samo blage preferencije između različitih jela, dok bi pojedinac 2 mogao snažno preferirati piletinu, dok mu druga jela nisu privlačna. Važno je napomenuti da ovdje pretpostavljamo da su jačine preferencija oba pojedinca izražene na istoj skali.

Prethodni primjer nameće nam nekoliko pitanja. Prvo, postoji sugestija da bi aksiom *Binarna relevantnost* mogao ograničiti uvođenje koncepta snage ili jačine preferencija u postupak grupiranja preferencija. Osim toga, pretpostavka o rješivosti koja se ovdje usvaja implicira da je prostor alternativa beskonačan. Budući da u većini slučajeva to nije tako, ova pretpostavka mora se tumačiti kao uvođenje hipotetskih alternativa koje donositej odluka koristi kako bi razmotrio i ocijenio razlike u svojim preferencijama. Pretpostavka *Binarne relevantnosti* sugerira da te hipotetske alternative ne bi trebale biti relevantne za grupnu odluku, stoga ni ideja o jačini preferencija koja proizlazi iz njih ne bi trebala biti relevantna.
Ova točka naglašava razliku između neostvarivih i hipotetskih alternativa, što je bitan koncent koji je često podsticao rasprave o *Neovisnosti o irelevantnim alternativama* i općenito rasprave vezane uz teoriju odlučivanja. Ključna razlika je u tome što se problem odlučivanja pojavljuje kada donositelj odluka mora izabrati između različitih opcija koje su stvarne i izvedive, od kojih svaku može odabrati. Dok razmišlja o svom problemu, donositelj može postati svjestan dodatnih stvarnih i izvedivih opcija. Također, tokom procesa odlučivanja, događaji u vanjskom svijetu mogu učiniti neke dodatne alternative izvedivima ili neke od izvornih alternativa neizvedivima. Ključno je napomenuti da su sve ove alternative, u nekom trenutku, stvarne i izvedive, što znači da su moguće za odabir. Princip *Neovisnosti o irelevantnim alternativama* tvrdi da u trenutku donošenja odluke, preferencije donositelja između bilo kojih dvoje stvarnih i izvedivih alternativa ne bi trebale ovisiti o prisutnosti ili odsutnosti drugih alternativa. Ovaj princip implicira da se preferencije trebaju temeljiti isključivo na izravnom uspoređivanju trenutnih alternativa, bez utjecaja drugih alternativa koje nisu izravno uključene u trenutnu odluku.
Iako se na prvi pogled ovo čini jednostavno, postoji složenost koju treba uzeti u obzir. Analiza koja prethodi donošenju odluke može zahtijevati uvođenje hipotetskih alternativa, koje su potpuno neizvedive. Ove hipotetske alternative uvode se za olakšavanje procjene funkcija vrijednosti. Na ove hipotetske alternative treba gledati kao na alat koji donositelju odluka pomaže da razmisli o svojem problemu i precizira svoje preferencije. Stoga, one imaju značajan utjecaj jer mogu utjecati na preferencije donositelja odluka. Iz toga proizlazi da aksiom *Neovisnost o irelevantnim alternativama* ne bi trebao zabraniti uvođenje ovih hipotetskih alternativa. Primijetimo, međutim, iako prihvaćamo da uvođenje hipotetskih alternativa može utjecati na neke preferencije donositelja odluka jer mu pomažu u razmišljanju, ne bismo prihvatili ideju da će donositelj odluka nakon što razmotri svoje preferencije ponovo promijeniti mišljenje ako se hipotetske alternative isključe.

6 | Funkcije vrijednosti grupe i međusobne usporedbe

Kao rezultat napomena iz prethodnog poglavlja, zaključujemo da nećemo tumačiti binarnu relevantnost kao zabranu uvođenja informacija o jačini preferencija u proces glasovanja. Pretpostavimo li tada da svaki član grupe može iznijeti svoju funkciju vrijednosti za alternative, pitamo se možemo li ih grupirati u grupnu funkciju vrijednosti na način koji je u skladu s duhom Arrowljevih aksioma. Odgovor je - da.

Teorem 2. [2] *Neka su $v_1(\cdot), v_2(\cdot), \ldots, v_n(\cdot)$ izmjerive funkcije vrijednosti za n članova grupe. Neka je $v_g(.,.,\ldots,.)$ n-dimenzionalna diferencijabilna funkcija takva da su barem dvije parcijalne derivacije pozitivne, a nijedna nije negativna. Tada, ako definiramo $\succsim_g$ prema*

$$a \succsim_g b \Leftrightarrow v_g(v_1(a), v_2(a), \ldots, v_n(a)) \geq v_g(v_1(b), v_2(b), \ldots, v_n(b)),$$

dobivamo postupak grupiranja koji zadovoljava sljedeće uvjete koje navodimo u nastavku.

Uvjet 1 (*Slabi poredak*) *Grupni poredak preferencija $\succsim_g$ označava slabi poredak.*

Uvjet 2 (*Netrivijalnost*) *Grupni poredak preferencija $\succsim_g$ definiran je za bilo koji konačan broj alternativa.*

Uvjet 3 (*Univerzalna domena*) *Grupni poredak preferencija $\succsim_g$ definiran je bez obzira na izmjerive funkcije vrijednosti $v_1(\cdot), v_2(\cdot), \ldots, v_n(\cdot)$ koje su dane od strane članova grupe.*

Uvjet 4 (*Binarna relevantnost*) *Poredak bilo kojeg para (stvarnih) alternativa ne ovisi o tome koje su druge alternative dostupne.*

Uvjet 5 (*Paretov princip*) *Ako za svakog pojedinca vrijedi $v_i(a) > v_i(b)$, tada vrijedi $a \succ_g b$.*

Uvjet 6 (*Bez diktature*) *Ne postoji pojedinac takav da za sve parove alternativa, a, b, kad god on preferira a nad b, koliko god malo i neznatno, grupa smatra $a \succ_g b$ bez obzira na to što ostali članovi grupe preferiraju.*

Dokaz. **Uvjet 1** Grupni poredak preferencija $\succsim_g$ je slabi poredak jer se temelji na numeričkom poretku vrijednosti izmjerivih funkcija vrijednosti $v_g(v_1(a), v_2(a), \ldots, v_n(a))$ dodijeljenih alternativama.

Uvjet 2 Grupni poredak preferencija $\succsim_g$ proizlazi iz funkcije v_g koja može primiti bilo koji konačan broj ulaznih vrijednosti. Stoga, $\succsim_g$ može usporediti sve te ulazne vrijednosti bez ograničenja na broj alternativa pa je definiran za bilo koji konačan broj alternativa.

Uvjet 3 Budući da je grupni poredak $\succsim_g$ definiran na temelju funkcije v_g koja kao ulazne vrijednosti uzima izmjerive funkcije vrijednosti $v_i(\cdot)$ za sve članove grupe, a funkcije $v_i(\cdot)$ daju numeričke vrijednosti preferencija članova grupe, $\succsim_g$ je definiran bez obzira na to što su $v_1(\cdot), v_2(\cdot), \ldots, v_n(\cdot)$.

Uvjet 4 Za bilo koji par alternativa a, b, brojevi

$$v_g(v_1(a), v_2(a), \ldots, v_n(a)) \text{ i } v_g(v_1(b), v_2(b), \ldots, v_n(b))$$

ne ovise o nijednoj drugoj alternativi.

Uvjet 5 Budući da su sve parcijalne derivacije nenegativne, $v(.,.,\ldots,.)$ je rastuća funkcija u svim svojim argumentima. Štoviše, budući da su joj barem dvije parcijalne derivacije pozitivne, ona strogo raste u nekim od svojih argumenata. Dakle, $v_i(a) > v_i(b)$ za sve i što povlači

$$v_g(v_1(a), v_2(a), \ldots, v_n(a)) > v_g(v_1(b), v_2(b), \ldots, v_n(b)).$$

Uvjet 6 Pretpostavimo da za par alternativa a, b, pojedinac 1 ima blagu sklonost prema a koju modeliramo sa

$$v_1(a) = v_1(b) + \delta,$$

gdje je δ mala, ali pozitivna vrijednost. Pokazat ćemo da za dovoljno mali δ grupa ne mora smatrati da je $a \succ_g b$. Dakle, da pojedinac 1 nije diktator u navedenome smislu. Sličan argument pokazuje da ni jedan drugi pojedinac ne može biti diktator.
Budući da su barem dvije parcijalne derivacije pozitivne, postoji pojedinac $k \neq 1$ takav da

$$\frac{\partial v_g}{\partial v_k} > 0.$$

Pretpostavimo da pojedinac k preferira b nad a:

$$v_k(b) = v_k(a) + \Delta, \tag{6.1}$$

gdje je Δ također mala, ali pozitivna vrijednost.

Nadalje, pretpostavimo da su svi ostali članovi grupe indiferentni između a i b:

$$v_i(a) = v_i(b) \text{ za sve } i \neq 1, i \neq k.$$

Ukoliko za dovoljno mali δ u (6.1) odaberemo

$$\Delta = \left[1 + \left(\frac{\partial v_g}{\partial v_1}\right) / \left(\frac{\partial v_g}{\partial v_k}\right)\right] \cdot \delta,$$

može se pokazati (vidjeti [2]) da je

$$v_g(v_1(b), v_2(b), \ldots, v_n(b)) > v_g(v_1(a), v_2(a), \ldots, v_n(a)).$$

Dakle, male promjene u preferencijama pojedinca 1 za a mogu biti preglasane preferencijama pojedinca k za b.

□

Prije nego što analiziramo značaj, ili eventualni nedostatak značaja, ovog teorema za teoriju društvenog izbora, trebamo uzeti u obzir nekoliko tehničkih napomena. Zahtjev da $v_i(\cdot)$ budu izmjerive funkcije vrijednosti koristi se samo u jednom kontekstu, a to je u tumačenju pojma "blage" sklonosti pojedinca 1 u uvjetu 6. Na svim ostalim mjestima u iskazu i dokazu teorema $v_i(\cdot)$ mogu biti samo ordinalne funkcije vrijednosti. Funkcija vrijednosti grupe v_g je ordinalna funkcija vrijednosti.

Razmotrimo sada važnost ovog teorema. Čini se da on implicira da bi, ako članovi grupe izraze svoju jačinu preferencija za različite alternative putem funkcija vrijednosti, mogli postojati postupci grupiranja preferencija koji su u skladu s duhom Arrowljevih aksioma. No, prije nego što se prihvati ta ideja, važno je primijetiti ključnu pretpostavku koja se implicira u teoremu. Ona podrazumijeva mogućnost usporedbe jačine preferencija između različitih osoba. Da bismo to razumjeli, sjetimo se da su izmjerive funkcije vrijednosti jedinstvene do na pozitivne afine transformacije (Propozicija 1). Dakle, preferencije svakog člana ne određuju jedinstvenu numeričku funkciju. U svakom slučaju, implicitno se postavljaju pitanja poput: "Preferira li pojedinac i alternativu a nad alternativom b više nego što pojedinac k preferira alternativu c nad alternativom d?" te se na ta pitanja daju i odgovori. U primjeru 3 s ribom i piletinom, Slika 5.2 sugerira da pojedinac 2 preferira piletinu nad ribom više nego što pojedinac 1 preferira ribu nad piletinom. Jesu li takve međusobne usporedbe značajne? U principu, postoji nekoliko načina za izvođenje takvih usporedbi, no svaki od njih nosi određene probleme. Nabrojat ćemo neke od njih.

- Prvo, članovi grupe mogu jednoglasno zaključiti da pojedinac i preferira a nad b više nego pojedinac k preferira c nad d. Ako bi to uvijek bio slučaj, mogao bi se naći postupak za korištenje Teorema 2. No, što ako nema jednoglasnog suglasja? U tom slučaju bila bi potrebna teorija društvenog izbora kako bi se razlike rješile, što bi moglo dovesti do beskonačnih rasprava.

- Drugo, mogli bismo zahtijevati da se samo pojedinci i i k slože da i preferira a nad b više nego k preferira c nad d, odnosno međusobne usporedbe mogle bi se izvoditi samo između parova pojedinaca koji se slažu u svojim usporedbama. Međutim, opet se suočavamo s beskonačnim problemima ako se oni ne slažu.

- Treće, jedan pojedinac mogao bi biti odgovoran za sve međusobne usporedbe, a grupa bi trebala prihvatiti njegove prosudbe bez pitanja. Iako ovaj način može izbjeći beskonačne rasprave, postavlja se pitanje tko bi taj pojedinac trebao biti i koliko bi njegova uloga mogla utjecati na konačni izbor grupe. Možda taj pojedinac ne bi bio diktator u smislu Arrowljevih aksioma, ali bi zasigurno imao značajan utjecaj na izbor grupe. Također, grupa ne može izabrati tu osobu jer je ona sastavni dio njihovog izbornog postupka.

- Četvrto, postoji mogućnost postojanja nekog objektivnog mehanizma za izvođenje takvih usporedbi, ali još uvijek nema jasnog prijedloga kako bi to moglo funkcionirati. Neki su sugerirali da bi novac mogao biti zajednička jedinica preferencije. Dakle, ako bi osoba i bila spremna platiti 5 eura za preferenicju $a \succ b$, a osoba k bi platila 3 eura za preferenciju $c \succ d$, tada bi i prefereirao a nad b više nego što k preferira c nad d. No, ovaj koncept pretpostavlja da je 1 euro jednako vrijedan i za pojedinca i i za pojedinca k. Pitamo se na koji način bismo mogli provesti takvu međusobnu usporedbu.

U konačnici, iako izgleda da su takve usporedbe izvedive, njihova praktična primjena suočava se s brojnim pitanjima i problemima. Čini se da nema zadovoljavajuće metode za jednoznačno i nedvosmisleno utvrđivanje međusobnih usporedbi preferencija. Prema tome, Teorem 2 ne predstavlja korak naprijed u našoj potrazi za demokratskim rješenjima. Arrow je zapravo problem društvenog izbora postavio u smislu slabih poredaka upravo zbog toga što smatra da su međusobne usporedbe besmislene. Za razliku od toga, drugi su argumentirali da nema druge opcije osim da dopustimo te usporedbe, koliko god taj put bio težak. Nadalje, tvrde da samo filozofi imaju problema s konceptom međusobne usporedivosti; neki ljudi nesvjesno provodi takve usporedbe u svakodnevnom životu. Na primjer, jeste li ikada pristali na kino umjesto na kazališnu predstavu jer je vaš prijatelj više želio gledati film nego što ste vi željeli pogledati predstavu? Ovdje ćemo završiti našu raspravu. Iako bi mogla potrajati u beskonačnost, ishod najvjerojatnije ne bi bio drugačiji. Koliko god se trudili izbjeći implikacije Arrowljevih rezultata, ne možemo.

Literatura

[1] K. Dutković, *Društveni izbor*, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2021., dostupno na
`https://repozitorij.pmf.unizg.hr/islandora/object/pmf:10106`

[2] S. French, *Decision Theory: An Introduction to the Mathematics of Rationality*, Ellis Horwood Limited, Chichester, 1988.

[3] D. Jankov Maširević, *Teorija odlučivanja*, Odjel za matematiku, Sveučilište J. J. Strossmayera, Osijek, 2022.

[4] D. Kozulić, *Individualno i grupno odlučivanje*, Fakultet ekonomije i turizma "Dr. Mijo Mirković", Sveučilište Jurja Dobrile u Puli, Pula, 2019., dostupno na
`https://repozitorij.unipu.hr/islandora/object/unipu:3599`

[5] D. H. Krantz, R. D. Luce, P. Suppes, A. Tverksy, *Foundations of Measurement*, vol. 1, Academic Press, 1971.

[6] S. Pintar, *O paradoksima društvenih izbora s preferencijalnim glasanjem*, Fakultet organizacije i informatike, Sveučilište u Zagrebu, Varaždin, 2022., dostupno na
`https://repozitorij.foi.unizg.hr/islandora/object/foi:7271`

[7] R. Wilson, *Social choice theory without the Pareto Principle*, Journal of Economic Theory 5.3, 1972., 478-486.

Sažetak

Ovaj diplomski rad bavi se grupnim odlučivanjem i pripadnim metodama. U prvom poglavlju definiraju se osnovne definicije i pojmovi teorije odlučivanja. U nastavku, istražuju se ključni aspekti i izazovi grupnog odlučivanja, opisuje jednostavno pravilo većine, a zatim problem nemogućnosti grupiranja individualnih preferencija u grupne odluke na način koji bi zadovoljavao sve racionalne kriterije. Posebna pažnja posvećena je Arrowljevom teoremu o nemogućnosti. Rad također istražuje funkcije vrijednosti grupe i metode međusobne usporedbe, te analizira mogućnosti grupiranja funkcija vrijednosti pojedinaca u grupnu funkciju koja je u skladu s Arrovljevim aksiomima.

Ključne riječi

grupno odlučivanje, jednostavno pravilo većine, grupni poredak preferencija, Arrowljev teorem o nemogućnosti, funkcija vrijednosti, funkcija vrijednosti grupe, međusobne usporedbe

Group decision making and related methods

Summary

This master's thesis deals with group decision making and related methods. The first chapter defines the basic definitions and concepts of the decision theory. Later, it explores the key aspects and challenges of group decision making, describes the simple majority rule, and then addresses the problem of the impossibility of aggregating individual preferences into group decisions in a way that satisfies all rational criteria. Special attention is given to Arrow's impossibility theorem. The thesis also investigates group value functions and comparison methods, then also analyzes the possibilities of aggregating individual value functions into a group value function that complies with Arrow's axioms.

Keywords

group decision making, simple majority rule, group preference order, Arrow's impossibility theorem, value function, group value function, mutual comparisons

Životopis

Rođena sam 28. studenoga 1997. godine u Varaždinu gdje i živim. Pohađala sam Prvu osnovnu školu Varaždin, a zatim upisala Prvu gimnaziju Varaždin, prirodoslovno - matematički smjer. Srednju školu završila sam 2016. godine kada upisujem preddiplomski sveučilišni studij matematike na Odjelu za matematiku Sveučilišta u Rijeci. Završetkom preddiplomskog studija 2021. godine stekla sam akademski naziv prvostupnice matematike te iste godine upisala diplomski studij Financijska matematika i statistika na Fakultetu primijenjene matematike i informatike (tada Odjel za matematiku), Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku.