Cobb - Douglasova funkcija

Radan, Matea

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Matea Radan

Cobb - Douglasova funkcija

Završni rad

Osijek, 2016.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Matea Radan

Cobb - Douglasova funkcija

Završni rad

Mentor: doc.dr.sc. Snježana Majstorović

Osijek, 2016.

Sadržaj

Sažetak

U ovom radu ćemo se upoznati s Cobb-Douglasovom funkcijom. Pokazati ćemo kako je funkcija nastala, opisati njena osnovna svojstva te navesti njene osnovne primjene. Pritom ćemo se koristiti nekim matematičkim rezultatima iz teorije funkcija više varijabli, kao što su parcijalne derivacije te rješavanje uvjetne optimizacije metodom Lagrangeovih multiplikatora. Spomenuti ćemo i neke poteškoće koje se javljaju prilikom upotrebe ove funkcije.

Ključne riječi: Cobb-Douglasova funkcija, kvazikonkavnost, homogenost, parcijalne derivacije

Abstract

In this paper we will be introduced to Cobb-Douglas function, show how the function is created, describe it's basic properties and specify it's basic applications. We will use some mathematical results of the theory of functions with multiple variables, such as the partial derivatives and solving conditional optimization by using method of Lagrange multipliers. We will mention some problems that occur when using this function.

Keywords: Cobb-Douglas function, quasiconcavity, homogeneity, partial derivatives

1 Uvod

Charles Cobb i Paul Douglas 1928. godine objavili su rad pod nazivom "Teorija proizvodnje" u kojem su predstavili model rasta Američke ekonomije između 1899. i 1922. godine. Svojim pojednostavljenim pogledom na gospodarstvo definirali su funkciju proizvodnje čiju vrijednost određuje odnos između određene količine rada i količine kapitala. Mnogi su kritičari bili skeptični jer se model zasniva na vrlo oskudnim podacima. Iako postoje razni drugi parametri koji utječu na učinkovitost proizvodnje, ispostavilo se da je ovakav model ipak vrlo precizan pa se dvadeset godina kasnije, a sve do danas, počeo intenzivno primjenjivati. Funkcija proizvodnje koja se koristi za modeliranje proizvodnje je oblika

$$P(L, K) = bL^{\alpha}K^{\beta}, \tag{1}$$

gdje je:

P - Vrijednost svih dobara proizvedenih u jednoj godini (*total production*)

L - Ukupan broj radnih sati svih osoba koje su radile u jednoj godini (*labor*)

K - Vrijednost uloženog kapitala (*capital*)

b - Parametar koji odražava tehnološki nivo proizvodnje

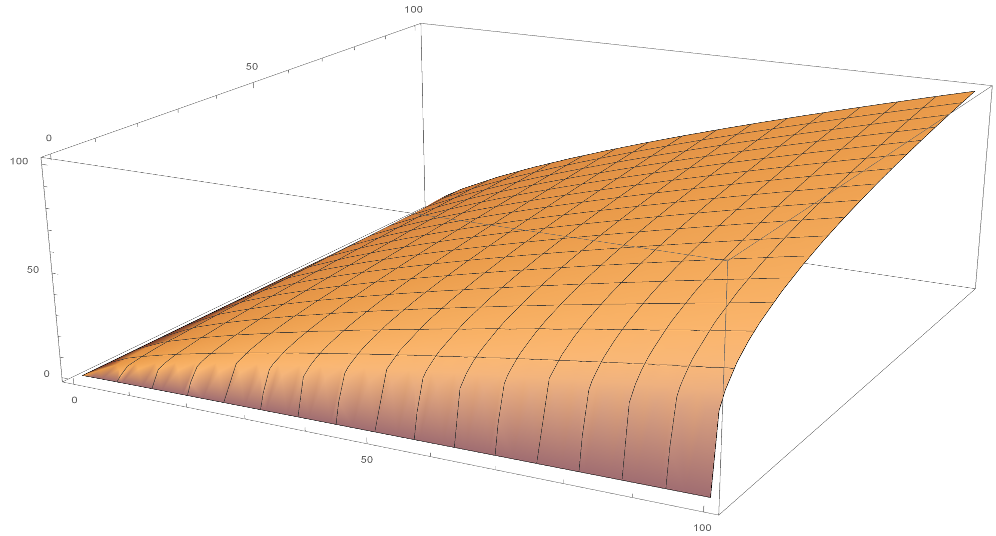
α - Mjera približne postotne promjene produktivnosti P pri jednopostotnoj promjeni kapitala

β - Mjera promjene produktivnosti P pri jednopostotnoj promjeni rada L i konstantnoj vijednosti kapitala K.

Cobb-Douglasova funkcija se najčešće koristi za slučaj $\beta = 1 - \alpha$, tj.

$$P(L, K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}. \tag{2}$$

Takvu funkciju zovemo strogom Cobb-Douglasovom funkcijom i nju ćemo najčešće promatrati u ovom radu. Razlog je taj što ta funkcija ima svojstvo da ako se količina kapitala K i količina radnih sati L obje uvećaju m puta, onda će i količina proizvodnje P biti uvećana m puta.



Slika 1: Graf funkcije $P(L,K) = 1,01L^{0,75}K^{0,25}$

Primjer 1. *U sljedećoj tablici su prikazani podatci američke ekonomije u vremenu između 1899. i 1922. godine. Podatke je objavila američka vlada, a upotrijebili su ih Cobb i Douglas tako da su 1899. godinu uzeli kao početnu, a za* P, L *i* K *su uzeli vrijednost* 100.

Godina	P	L	K
1899	100	100	100
1900	101	105	107
1901	112	110	114
1902	122	117	122
1903	124	122	131
1904	122	121	138
1905	143	125	149
1906	152	134	163
1907	151	140	176
1908	126	123	185
1909	155	143	198
1910	159	147	208
1911	153	148	216
1912	177	155	226
1913	184	156	236
1914	169	152	244
1915	189	156	266
1916	225	183	298
1917	227	198	335
1918	223	201	366
1919	218	196	387
1920	231	194	407
1921	179	146	417
1922	240	161	431

Koristeći model opisan funkcijom $P(L, K) = 1,01 \cdot L^{0,75} K^{0,25}$, možemo izračunati proizvodnju u proizvoljno odabranoj godini. Izračunajmo proizvodnju u 1910. te u 1920. godini:

$$P(147, 208) = 1,01(147)^{0,75}(208)^{0,25} \approx 161,9$$

$$P(194, 407) = 1,01(194)^{0,75}(407)^{0,25} \approx 235,8.$$

Dobiveni iznosi približno su jednaki stvarnim vrijednostima koje se nalaze u tablici za zadane godine.

2 Svojstva Cobb-Douglasove funkcije

Područje definicije Cobb-Douglasove funkcije

$$P(L,K) = bL^{\alpha}K^{\beta}$$

je skup

$$D_p = \{(L,K) \, : \, L \geq 0, \, K \geq 0\},$$

tj.

$$D_p = \mathbb{R}_+^2 = [0,\infty) \times [0,\infty)$$

jer L i K redom prestavljaju rad i uloženi kapital, a oni nikad nisu negativni.

Graf Cobb-Douglasove funkcije je trodimenzionalan. Međutim, rijetko se bavimo 3D grafovima poput ovog, već umjesto njega proučavamo pripadne nivo-krivulje. Ako uzmemo P kao konstantu, odnosno $P = P_0$, dobivamo

$$P_0 = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}.$$

Imamo:

$$P_0 = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}.$$

Ukoliko želimo da za danu funkciju (2) postignemo nivo proizvodnje od P_0 jedinica proizvoda, tada svaka kombinacija rada i kapitala koja zadovoljava jednadžbu $P_0 = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$ omogućava postizanje tog nivoa proizvodnje. Iz ove jednadžbe moguće je izraziti K kao funkciju od L uz zadane vrijednosti konstante b i P_0:

$$K = P_1^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot L^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}},$$

gdje je konstanta $P_1 = \dfrac{P_0}{b}$. Dobivenu funkciju zovemo izokvanta, a njen graf je hiperbola. Ukoliko želimo povećati proizvodnju na nivo od P_2 jedinica proizvoda, tada rješavanjem jednadžbe $b \cdot L^{\alpha} \cdot K^{1-\alpha} = P_2$ možemo odrediti izokvantu za nivo proizvodnje od P_2 jedinica proizvoda. Ako ove izokvante prikažemo grafički, vidjeti ćemo da se one ne sijeku i da je druga izokvanta iznad prve. Izokvanta je specijalan slučaj nivo krivulje funkcije dvije varijable.

Primjer 2. *Odredimo kombinaciju rada i kapitala Cobb-Douglasove funkcije*

$$P(L,K) = 200 \cdot L^{0,8}K^{0,2}$$

koja nam je potrebna da bismo proizveli 20000 *jedinica proizvoda te promotrimo što se događa kada želimo udvostručiti proizvodnju.*
Kombinaciju rada i kapitala odrediti ćemo iz jednadžbe

$$20000 = 200 \cdot L^{0,8}K^{0,2},$$

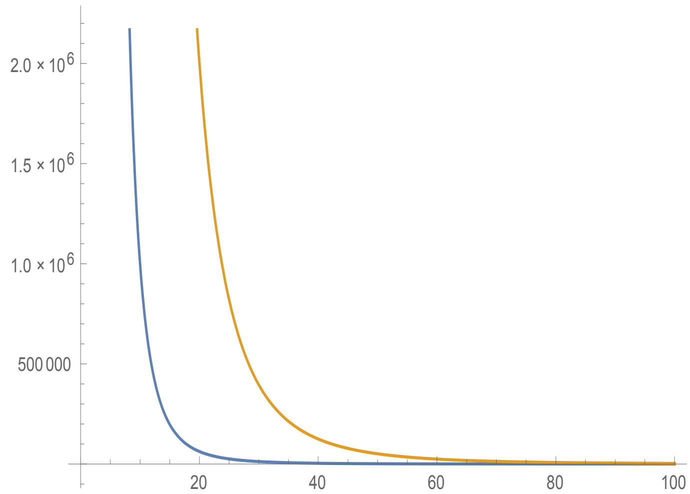
odakle nakon skraćivanja i potenciranja dobivamo $L^4K = 100^5$*, odnosno:*

$$K = \frac{100^5}{L^4}.$$

Svaka kombinacija rada i kapitala koja zadovoljava ovu jednadžbu omogućava nam proizvodnju 20000 *jedinica proizvoda.*
Ukoliko udvostručimo proizvodnju, tada imamo jednadžbu

$$40000 = 200 \cdot L^{0,8} K^{0,2}.$$

Bilo koja kombinacija rada i kapitala koja zadovoljava $K = \dfrac{200^5}{L^4}$ *omogućava nam proizvodnju* 40000 *jedinica proizvoda. Grafovi funkcije* K *u ovisnosti o* L *za oba slučaja prikazani su na sljedećoj slici:*



Slika 2: Graf funkcije $K = \dfrac{100^5}{L^4}$ (plav) i $K = \dfrac{200^5}{L^4}$ (narančast)

Primjedba 2.1. Cobb-Douglasovu funkciju možemo zapisati u obliku:

$$\ln \frac{P}{K} = \ln b + \alpha \ln \frac{L}{K}. \tag{3}$$

Dokažimo jednakost (3).
Logaritmiranjem obje strane jednakosti (2) imamo

$$\ln P = \ln(b \cdot L^{\alpha} \cdot K^{1-\alpha}).$$

Primjenom svojstva za logaritam umnoška dobivamo

$$\ln P = \ln b + \ln L^{\alpha} + \ln K^{1-\alpha}.$$

Sada primijenimo svojstvo logaritma za potencije:

$$\ln P = \ln b + \alpha \ln L + (1-\alpha) \ln K$$

pa sređivanjem dobivamo jednakost

$$\ln P - \ln K = \ln b + \alpha(\ln L - \ln K).$$

Još treba iskoristiti svojstvo za razliku logaritama pa dobivamo jednadžbu (3).

2.1 Homogenost

Iskažimo najprije definiciju homogene funkcije:

Definicija 2.1. Funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je homogena sa stupnjem homogenosti k ako vrijedi:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Pokažimo da je Cobb-Douglasova funkcija (1) homogena. Pišemo

$$P(\lambda L, \lambda K) = b(\lambda L)^\alpha (\lambda K)^\beta$$

pa raspisivanjem dobivamo

$$P(\lambda L, \lambda K) = b\lambda^\alpha L^\alpha \lambda^\beta K^\beta$$

te konačno:

$$P(\lambda L, \lambda K) = b\lambda^{\alpha+\beta} L^\alpha K^\beta = \lambda^{\alpha+\beta} P(L, K).$$

Zaključujemo da je Cobb-Douglasova funkcija homogena sa stupnjem homogenosti $\alpha + \beta$. To znači da ako veličine K i L uvećamo λ puta, količina proizvodnje će biti uvećana za $\lambda^{\alpha+\beta}$ puta.
Stroga Cobb-Douglasovova funkcija (2) ima stupanj homogenosti 1 pa kažemo da je linearno homogena. Kao što smo naveli u uvodu, ako uvećamo K i L λ puta, proizvodnja P će se povećati λ puta. Upravo je to razlog zašto su Cobb i Douglas pretpostavili da je $\alpha + \beta = 1$. Ukoliko je $\alpha + \beta < 1$ proizvodnja P pada, a ukoliko je $\alpha + \beta > 1$ proizvodnja P raste.

2.2 Kvazikonkavnost

U nastavku ćemo navesti nekoliko definicija i tvrdnji koje će nam biti potrebne da bismo dokazali kvazikonkavnost Cobb-Douglasove funkcije.

Definicija 2.2. Za skup $D \subseteq \mathbb{R}^n$ kažemo da je konveksan ako za bilo koje dvije točke $x_1, x_2 \in D$ sadrži i segment određen tim točkama, tj.

$$x_1, x_2 \in D \implies \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in D \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

Definicija 2.3. Neka je $D \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazan konveksan skup. Kažemo da je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ konveksna ako vrijedi :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \quad \forall x, y \in D, \ \ \forall \lambda \in [0, 1].$$

Funkcija f definirana na konveksnom skupu D je konkavna ako je funkcija $-f$ konveksna.

Definicija 2.4. Neka je $D \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazan konveksan skup. Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je kvazikonveksna na D ako vrijedi:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \max\{f(x_1), f(x_2)\} \ , \ \forall x_1, x_2 \in D, \ \ \forall \lambda \in [0, 1].$$

Funkcija f je kvazikonkavna ako je funkcija $-f$ kvazikonveksna.

Teorem 2.5. *Svaka konkavna funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ ujedno je i kvazikonkavna.*

Dokaz. Zbog konkavnosti funkcije f imamo :

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in D, \ \forall \lambda \in [0,1].$$

Pretpostavimo da smo izabrali x_1 i x_2 tako da vrijedi $f(x_1) \geq f(x_2)$, odnosno

$$\max\{f(x_1), f(x_2)\} = f(x_1).$$

Dobivamo

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \geq \lambda f(x_2) + (1-\lambda)f(x_2) = f(x_2)$$

pa je funkcija f kvazikonkavna. QED

Želimo pokazati da je svojstvo kvazikonkavnosti očuvano pri djelovanju neke monotone transformacije. Pretpostavimo da je g monotono rastuća transformacija od f, tj. $g = h \circ f$, gdje je h monotono rastuća funkcija (slično bismo imali za slučaj monotono padajuće transformacije). Nadalje pretpostavimo da je f kvazikonkavna. Uzmimo x_1 i x_2 tako da vrijedi $f(x_1) \geq f(x_2)$. Dobivamo:

$$g(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = (h \circ f)(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq (h \circ f)(x_2) = g(x_2)$$

pa je funkcija g kvazikonkavna.

Želimo pokazati da Cobb-Douglasovu funkciju uvijek možemo zapisati kao monotonu transformaciju konkavne funkcije. U tu svrhu važno je uočiti da je Cobb-Douglasova funkcija sa smanjenjem prosječne profitabilnosti konkavna. To najlakše pokažemo ako ju zapišemo u obliku:

$$G(L, K) = \ln(b) + \alpha \ln(L) + \beta \ln(K).$$

Općenito, funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je konkavna ako je $\dfrac{\partial f}{\partial x^2} < 0$ i ako vrijedi

$$det\, \mathrm{H} = \frac{\partial f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial y^2} - \frac{\partial f}{\partial x \partial y} > 0,$$

pri čemu je H Hesseova matrica funkcije f.

Pogledajmo kako izgledaju parcijalne derivacije drugog reda funkcije G:

$$\frac{\partial G}{\partial L^2} = -\frac{\alpha}{L^2}, \quad \frac{\partial G}{\partial K^2} = -\frac{\beta}{K^2}, \quad \frac{\partial G}{\partial L \partial K} = 0.$$

Obzirom da su α, β, L i K pozitivni realni brojevi, uvjeti konkavnosti su ispunjeni, odnosno funkcija G je konkavna. Funkcija G nije definirana za negativne L i K. Cobb-Douglasova funkcija se često prikazuje na ovaj način, tj. koristimo konkavnu funkciju da predstavimo funkciju koja je zapravo konveksna. No, to je zato što nas ne zanima očuvanje konkavnosti, već samo kvazikonkavnosti. Primijenimo sada monotono rastuću transformaciju na G, tj. na eksponencijalnu funkciju: $\exp(G(L, K)) = bL^\alpha K^\beta = P(L, K)$. Svaku Cobb-Douglasovu funkciju možemo napisati kao monotonu transformaciju konkavne (također Cobb-Douglasove) funkcije, što dokazuje da je funkcija kvazikonkavna. Upravo zbog toga što je kvazikonkavnost očuvana pri djelovanju neke monotone transformacije, možemo prebacivati eksponencijalnu u log-linearnu funkciju korisnosti i obrnuto, bez narušavanja njenih osnovnih svojstava.

3 Primjene diferencijalnog računa u proučavanju Cobb-Douglasove funkcije

3.1 Parcijalne derivacije i totalni diferencijal

Pogledajmo parcijalne derivacije funkcije (1):

$$\frac{\partial P}{\partial L} = b\alpha L^{\alpha-1}K^{\beta} = b\alpha\frac{L^{\alpha}}{L}K^{\beta} = \alpha\frac{P}{L}$$

$$\frac{\partial P}{\partial K} = b\beta L^{\alpha}K^{\beta-1} = b\beta L^{\alpha}\frac{K^{\beta}}{K} = \beta\frac{P}{K}.$$

Parcijalna derivacija $\frac{\partial P}{\partial L}$ funkcije P po varijabli L zove se granična (marginalna) produktivnost rada L i pokazuje kako se mijenja proizvodnja obzirom na promjenu količine rada. Parcijalna derivacija $\frac{\partial P}{\partial K}$ pokazuje kako se mijenja proizvodnja obzirom na promjenu kapitala i zovemo je granična (marginalna) produktivnost kapitala K. Stoga Cobb i Douglas pretpostavljaju sljedeće:

a. Ako nestane ili rad ili kapital, nestat će i proizvodnja;

b. Granična (marginalna) produktivnost rada proporcionalna je količini proizvodnje po jedinici rada;

c. Granična (marginalna) produktivnost kapitala proporcionalna je količini proizvodnje po jedinici kapitala.

Kako je proizvodnja po jedinici rada jednaka $\frac{P}{L}$, pretpostavka **b** da je marginalna produktivnost faktora rada proporcionalna količini proizvodnje po jedinici rada govori nam da vrijedi:

$$\frac{\partial P}{\partial L} = \alpha \cdot \frac{P}{L} \tag{4}$$

za neku konstantu α. Ako je K konstanta tj. $K = K_0$, onda parcijalna diferencijalna jednadžba (4) postaje obična diferencijalna jednadžba koju nije teško riješiti. Integriranjem obje strane jednakosti dobijemo

$$\int \frac{dP}{P} = \alpha \cdot \int \frac{dL}{L}$$

pa slijedi da

$$\ln(P) = \alpha \cdot \ln(cL).$$

Koristeći svojstva logaritma dobivenu jednadžbu možemo zapisati na sljedeći način:

$$\ln(P) = \ln(c_1 \cdot L^{\alpha}).$$

Konačno imamo

$$P(L, K_0) = C_1(K_0) \cdot L^{\alpha}, \tag{5}$$

gdje je $C_1(K_0)$ konstanta integracije koja ovisi o K_0.
Slično, pretpostavka **c** da je marginalna produktivnost kapitala proporcionalna količini proizvodnje po jedinici kapitala nam daje sljedeće:

$$\frac{\partial P}{\partial K} = \beta \cdot \frac{P}{K}.$$

Koristeći se istom metodom rješavanja običnih diferencijalnih jednadžbi kao kod jednadžbe (4), dobivamo:

$$P(L_0, K) = C_2(L_0) \cdot K^{\beta}. \tag{6}$$

Kombiniranjem (5) i (6) dobivamo (1):

$$P(L, K) = bL^{\alpha}K^{\beta},$$

gdje je b konstanta koja ne ovisi niti o L, niti o K. Iz pretpostavke **a** vidimo da je $\alpha > 0$ i $\beta > 0$.

Primjedba 3.1. Cobb-Douglasova funkcija (1) zadovoljava jednadžu

$$L \cdot \frac{\partial P}{\partial L} + K \cdot \frac{\partial P}{\partial K} = (\alpha + \beta) \cdot P.$$

Pokažimo da to vrijedi.
U lijevu stranu jednakosti koju treba dokazati uvrstimo parcijalne derivacije

$$\frac{\partial P}{\partial L} = b \cdot \alpha \cdot L^{\alpha-1} \cdot K^{\beta}$$

i

$$\frac{\partial P}{\partial K} = b \cdot \beta \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta-1}.$$

Slijedi:

$$L \cdot \frac{\partial P}{\partial L} + K \cdot \frac{\partial P}{\partial K} = L \cdot b \cdot \alpha \cdot L^{\alpha-1} \cdot K^{\beta} + K \cdot b \cdot \beta \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta-1} = \alpha \cdot b \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta} + \beta \cdot b \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta}.$$

Kako je $P = b \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta}$, dobivamo

$$L \cdot \frac{\partial P}{\partial L} + K \cdot \frac{\partial P}{\partial K} = \alpha \cdot P + \beta \cdot P = (\alpha + \beta) \cdot P,$$

što je i trebalo dokazati.

Totalni diferencijal prvog reda funkcije dvije varijable jednak je zbroju prvih parcijalnih derivacija, odnosno u našem slučaju

$$dP = \frac{\partial P}{\partial L} dL + \frac{\partial P}{\partial K} dK.$$

Prethodno smo izračunali parcijalne derivacije po varijablama L i K pa uvrštavanjem u prethodnu jednakost dobivamo:

$$dP = \alpha \frac{P}{L} dL + \beta \frac{P}{K} dK.$$

Sada ćemo objasniti ekonomsko značenje totalnog diferencijala. Znamo da je ukupna promjena količine proizvodnje ΔP približno jednaka dP za male promjene rada i kapitala. Ukoliko želimo zadržati istu količinu proizvodnje, tada vrijedi $dP = 0$, odnosno,

$$\frac{\partial P}{\partial L} dL + \frac{\partial P}{\partial K} dK = 0.$$

Sređivanjem dobivamo:

$$\frac{dK}{dL} = -\frac{\frac{\partial P}{\partial L}}{\frac{\partial P}{\partial K}} = -\frac{\alpha \frac{P}{L}}{\beta \frac{P}{K}} = -\frac{\alpha}{\beta} \frac{K}{L}. \tag{7}$$

Jednakost (7) je izrazito važna jer nam pokazuje kako odrediti faktore proizvodnje, odnosno rad i kapital, a da to ne utječe na razinu proizvodnje. Vrijednost razlomka $\frac{dK}{dL}$, koja je približno jednaka $\frac{\Delta K}{\Delta L}$, naziva se marginalna stopa tehničke supstitucije. Marginalna stopa supstitucije nam govori da ukoliko jedan faktor proizvodnje povećamo za određeni postotak, tada drugi faktor proizvodnje možemo smanjiti za određeni postotak, tako da vrijedi jednakost (7). Marginalna stopa supstitucije je negativna jer ako je ΔK pozitivan, tada, da bi ostali na istom nivou proizvodnje, ulaganje u rad možemo smanjiti pa je ΔL negativno i vrijedi (7).

3.2 Ekstremi funkcije

Ukupna proizvodnja P određenog proizvoda ovisi o količini utrošenog rada L i kapitala K. Ako je cijena jedinice rada jednaka m, cijena jedinice kapitala jednaka n, a tvrtka može potrošiti p novčanih jedinica ukupnog budžeta, maksimiziranje proizvoda P ovisi o ograničenju

$$mL + nK = p.$$

Odredimo optimalnu kombinaciju ulaganja u rad i kapital koja će nam pri danom budžetu omogućiti maksimalan mogući nivo proizvodnje. Koristeći se teorijom diferencijalnog računa za funkcije više varijabli, odrediti ćemo maksimum stroge Cobb-Douglasove funkcije uz uvjet $mL + nK = p$. Definiramo Lagrangeovu funkciju

$$F(L, K, \lambda) = P(L, K) + \lambda g(L, K),$$

gdje je $g(L, K) = mL + nK - p$, tj.

$$F(L, K, \lambda) = bL^{\alpha} K^{1-\alpha} + \lambda(mL + nK - p) \tag{8}$$

Parcijalne derivacije funkcije F su:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial L} &= b\alpha L^{\alpha-1}K^{1-\alpha}+\lambda m && (9)\\ \frac{\partial F}{\partial K} &= b(1-\alpha)L^{\alpha}K^{-\alpha}+\lambda n && (10)\\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= mL+nK-p. && (11)\end{aligned}$$

Izjednačimo ih sa nulom pa dobivamo sustav jednadžbi čije je rješenje stacionarna točka

$$S=\left(\frac{\alpha p}{n},\frac{(1-\alpha)p}{m}\right).$$

Pogledajmo da li se u toj točki postiže maksimum. Potrebne su na parcijalne derivacije drugog reda:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial L^2}=b\alpha(\alpha-1)L^{\alpha-2}K^{1-\alpha}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2}=-b\alpha(1-\alpha)L^{\alpha}K^{-\alpha-1}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial L\partial K}=b\alpha(1-\alpha)L^{\alpha-1}K^{-\alpha},$$

te parcijalne derivacije prvog reda funkcije - uvjeta $g(L,K)$:

$$\frac{\partial g}{\partial L}=m$$

$$\frac{\partial g}{\partial K}=n.$$

Općenito, Hesseova matrica Lagrangeove funkcije F u točki $T=(K_0,L_0)$ izgleda ovako:

$$HF(T)=\begin{bmatrix}0 & \frac{\partial g}{\partial L}(K_0,L_0) & \frac{\partial g}{\partial K}(K_0,L_0)\\ \frac{\partial g}{\partial L}(K_0,L_0) & \frac{\partial^2 F}{\partial L^2}(K_0,L_0) & \frac{\partial^2 F}{\partial L\partial K}(K_0,L_0)\\ \frac{\partial g}{\partial K}(K_0,L_0) & \frac{\partial^2 F}{\partial L\partial K}(K_0,L_0) & \frac{\partial^2 F}{\partial K^2}(K_0,L_0)\end{bmatrix}.$$

Koristeći se dovoljnim uvjetima za postojanje uvjetnih ekstrema potrebno je izračunati $n-m$ zadnjih vodećih glavnih minora $\Delta_k, k=2m+1,\ldots,n+m$ Hesseove matrice $HF(S)$ Lagrangeove funkcije F u stacionarnoj točki S, pri čemu je m broj funkcija - uvjeta (u našem slučaju $m=1$), a n je broj varijabli funkcije koju maksimiziramo (u našem slučaju $n=2$). Ukoliko je $(-1)^{k+m}\Delta_k>0 \quad \forall k=2m+1,\ldots,n+m$, onda funkcija P ima uvjetni maksimum u točki S.
U našem slučaju, $k=3=n+m$ pa je dovoljno izračunati Δ_3. Uvrštavanjem točke S u Hesseovu matricu, dobivamo da je $(-1)^4\Delta_3>0$ pa je točka $S\Big(\frac{\alpha p}{n},\frac{(1-\alpha)p}{m}\Big)$ točka u kojoj se postiže uvjetni maksimum Cobb-Douglasove funkcije i on iznosi

$$P=b\left(\frac{\alpha p}{m}\right)^{\alpha}\left(\frac{(1-\alpha)p}{n}\right)^{1-\alpha}.$$

Promotrimo sada obrnuti slučaj, odnosno, pretpostavimo da je proizvodnja konstantna i jednaka Q, tj. $b \cdot L^\alpha \cdot K^{1-\alpha} = Q$. Odredimo vrijednosti L i K koje minimiziraju funkciju troška $C(L,K) = mL + nK$. Odgovarajuća Lagrangeova funkciju izgleda ovako:

$$F(L,K,\lambda) = mL + nK + \lambda(bL^\alpha K^{1-\alpha} - Q).$$

Računanjem parcijalnih derivacija prvog reda i izjednačavanjem s nulom, dobivamo

$$\frac{\partial F}{\partial L} = m + \lambda b\alpha L^{\alpha-1}K^{1-\alpha} = 0 \tag{12}$$

$$\frac{\partial F}{\partial K} = n + \lambda b(1-\alpha)L^{\alpha}K^{-\alpha} = 0 \tag{13}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = bL^{\alpha}K^{1-\alpha} - Q = 0. \tag{14}$$

Rješavanjem ovog sustava dobivamo stacionarnu točku:

$$S = \left(\frac{Q}{b} \cdot \left(\frac{m(1-\alpha)}{n\alpha}\right)^{\alpha-1}, \frac{Q}{b} \cdot \left(\frac{m(1-\alpha)}{n\alpha}\right)^{\alpha}\right).$$

Slično kao u prethodnom optimizacijskom problemu, potrebno je ispitati dovoljne uvjete za postojanje uvjetnih ekstrema funkcija C. Da bi C imala uvjetni minimum u točki S, ovaj put mora vrijediti $(-1)^m \Delta_k > 0\ \forall k = 2m+1, \ldots, n+m$. Nakon formiranja pripadne Hesseove matrice funkcije F i uvrštavanja točke S dobivamo da je $-\Delta_3 > 0$ pa je S točka uvjetnog minimuma funkcije C i on iznosi

$$C = m\frac{Q}{b} \cdot \left(\frac{m(1-\alpha)}{n\alpha}\right)^{\alpha-1} + n\frac{Q}{b} \cdot \left(\frac{m(1-\alpha)}{n\alpha}\right)^{\alpha}.$$

4 Poteškoće sa Cobb-Douglasovom funkcijom

Trenutno postoje različita mišljenja o točnosti Cobb-Douglasove funckije u raznim granama industrije i u različitim vremenskim periodima. Cobb i Douglas su bili pod utjecajem statističkog dokaza tvrdnje da su udjeli rada i kapitala u razvijenim zemljama u ukupnoj količini proizvodnje konstantni. Danas ipak postoji sumnja da Cobb-Douglasova funkcija nema konstantnu vrijednost tijekom duljeg vremenskog perioda.

Ni Cobb ni Douglas nisu dali teoretski razlog zašto bi koeficijenti α i β bili održivi kroz duže vrijeme ili isti u raznim sektorima ekonomije. Sjetimo se da priroda kapitalnih dobara (K) varira ovisno o različitim vremenskim razdobljima, a i u odnosu na to što se proizvodi. Slično vrijedi i za efikasnost rada (L).

Cobb-Douglasova funkcija proizvodnje nije razvijena na temelju znanja iz strojarstva, tehnologije ili upravljanjem procesima proizvodnje. Umjesto toga, razvijena je jer je imala atraktivne matematičke karakteristike poput opadajućih marginalnih (graničnih) prinosa svakom faktoru proizvodnje. Najvažnije, za to nema mikro-temelja. U modernoj eri, ekonomisti su inzistirali na tome da se mikrologika svakog većeg procesa mora objasniti. Cobb-Douglasova funkcija proizvodnje pada na ovom testu.

Uzmimo u obzir dva sektora koji imaju istu Cobb-Douglasovu tehnologiju.
Ako za sektor 1 vrijedi

$$P_1 = bL_1^{\alpha} K_1^{\beta},$$

a za sektor 2

$$P_2 = bL_2^{\alpha} K_2^{\beta},$$

tada općenito ne vrijedi da

$$P_1 + P_2 = b(L_1 + L_2)^{\alpha}(K_1 + K_2)^{\beta}.$$

No, vrijediti će samo uz $\frac{L_1}{L_2} = \frac{K_1}{K_2}$ i $\alpha + \beta = 1$, odnosno za tehnologiju konstantnog prinosa. Stoga je matematički pogrešno pretpostaviti da se Cobb-Douglasova funkcija primjenjuje na mikrorazini samo zbog toga što se primjenjuje na makrorazini.

5 Biografije

Paul Howard Douglas (March 26, 1892 – September 24, 1976) bio je američki političar i ekonomist. Rođen je u gradu Salem u Massachusetts. Nakon smrti majke u četvrtoj godini života njegov otac se ponovno oženio. Zbog nasilnog ponašanja njegovog oca, odlazi sa majkom i starijim bratom živjeti u Onawu, Maine, gdje provodi ostatak djetinstva sve do odlaska na fakultet. Diplomirao je na Bowdain Collegu 1913., a magistrirao ekonomiju dvije godine kasnije na Sveučilištu Kolumbija. Po završetku magisterija oženio se sa Dorothy Wolff. Uspješno je izgradio karijeru profesora na mnogim sveučilištima u Americi, od kojih je najpoznatije sveučilište u Chicagu na kojem je počeo raditi 1919. godine. Zbog posla svoje supruge seli se iz Chicaga zajedno sa obitelji, ali nakon razvoda 1930. godine Paul se vraća na sveučilište u Chicagu. Sljedeće godine upoznaje i ženi Emily Taft. Osim uspješne karijere profesora, bio je izrazito politički aktivan. Bio je član Demokratske stranke te istaknuti član liberalne koalicije tijekom svoje osamnaestogodišnje karijere u Senatu. Bez obzira na njegovu uspješnu karijeru u mnogim područjima, najpoznatiji je kao koautor Cobb-Douglasove funkcije proizvodnje. Tijekom 1950-tih sa razvojem teorije ekonomskog rasta, Cobb-Douglasova funkcija postala je jedinstven izraz proizvodnog procesa ekonomije kao cjeline. Cobb-Douglasova funkcija je u dugom vremenskom periodu pružala dobar materijal za znanstveni rad mnogih ekonomista.

Charles Wiggins Cobb (1875–1949) bio je američki matematičar i ekonomist. Diplomirao je 1912. godine na Sveučilištu u Michiganu. Bio je redoviti profesor na Amherst College. Objavio je mnogo radova iz područja matematike i ekonomije. Dok je pripremao doktorsku disertaciju iz područja matematike, 1913. godine, objavio je knjigu pod nazivom "The asymptotic development for a certain integral function of zero order". Međutim, ipak je najpoznatiji po razvoju Cobb-Douglasove funkcije proizvodnje.

6 Literatura

[1] J. Stewart, *Calculus 7th Edition* , McMaster University and University of Toronto,Brooks/Cole, Cengage Learning, Belmont, 2008.

[2] R. Scitovski, N. Truhar, Z. Tomljanović, *Metode optimizacije*, Svučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek, 2014.

[3] Š. Ungar, *Matematička analiza 3*, Prirodoslovno-matematički fakultet – Matematički odjel, Zagreb, 2002.

[4] `https://en.wikipedia.org/wiki/Charles_Cobb_(economist)`

[5] `https://en.wikipedia.org/wiki/Paul_Douglas`