Funkcije i njihovi grafovi

Pavlović, Valerija

Master's thesis / Diplomski rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, School of Applied Mathematics and Informatics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Fakultet primijenjene matematike i informatike**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:179773

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-11-08**

Repository / Repozitorij:

Repository of School of Applied Mathematics and Informatics

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike

Diplomski sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Funkcije i njihovi grafovi

Diplomski rad

Mentor:
prof.dr.sc. Ivan Matić

Student:
Valerija Pavlović

Osijek, 2024.

Sadržaj

1 | Uvod

Cilj ovog diplomskog rada je pružiti sveobuhvatan pregled teme funkcija u matematici, počevši od osnovnih definicija i karakteristika funkcija do analize njihovih svojstava. Nadalje, rad se bavi metodologijom crtanja grafova funkcija i transformacija grafova funkcija, uz kratak osvrt na funkcije u kurikulumu.

Prvo poglavlje pod naslovom "Funkcije" obuhvaća definiranje pojma funkcije kao pravila koje svakom elementu iz domene pridružuje točno jedan element iz kodomene. Razmatraju se načini zadavanja funkcija i definiraju se karakteristike preslikavanja funkcija poput injekcije, surjekcije i bijekcije, te se uvodi pojam grafa funkcije.

U drugom poglavlju "Svojstva funkcije" opisuju se njezina svojstva koja nam pomažu u razumijevanju njihovog ponašanja i grafičkog prikaza. Ta svojstva uključuju parnost, periodičnost, monotonost te omeđenost. Kroz odabrane primjere ilustrira se kako ova svojstva utječu na njihove grafičke prikaze.

U poglavlju "Crtanje grafa funkcije" fokusira se na metodologiju crtanja grafova funkcija, objašnjavaju se postupci za određivanje asimptota, ekstrema, intervala monotonosti, te konveksnosti i konkavnosti funkcija, kako bi se u potpunosti razumjelo ponašanje funkcije prije crtanja njezina grafa. Također, u ovom odlomku obrađuje se graf inverzne funkcije te rješavanje jednadžbi pomoću grafičkog prikaza.

Poglavlje "Transformacije grafa funkcije" uključuje translaciju, kontrakciju ili dilataciju, te zrcaljenje grafa.

U završnom poglavlju pod nazivom "Funkcije u kurikulumu" prolazi se domena kurikuluma pod nazivom "Algebra i funkcije", s naglaskom na funkcije, kroz razrede osnovne i srednje škole. Poglavlje završava nekim miskoncepcijama i primjerima vezanim uz kvadratnu funkciju.

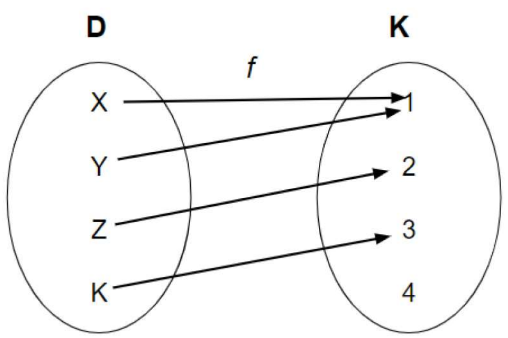
2 | Funkcije

Definicija 1. *(vidjeti [4] str. 58) Neka su D i K dva neprazna skupa i f pravilo koje svakom elementu skupa D pridružuje točno jedan element skupa K. Uređenu trojku (D, K, f) nazivamo funkcija sa skupa D u skup K i označavamo $f : D \to K$.*
Skup D nazivamo domena ili područje definicije funkcije, skup K kodomena ili područje vrijednosti funkcije, a f pravilo pridruživanja.

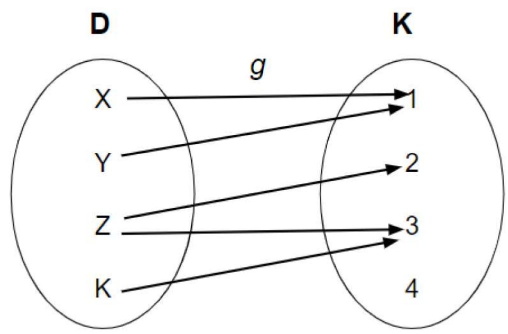
Načini zadavanja funkcije:

1. Tablično.
2. Grafički.
3. Formulom.
   (a) Eksplicitno $(y = f(x))$.
   (b) Implicitno $(F(x, y) = 0)$.
   (c) Parametarski $(x = \phi(t), y = \gamma(t))$.
4. Opisno.

Pogledajmo kako možemo pomoću definicije provjeriti jesu li sljedeće relacije funkcije.



(a) $f : D \to K$ je funkcija. Svakom elementu skupa D pridružen je točno jedan element skupa K.



(b) $g : D \to K$ nije funkcija. Elementu Z skupa D pridružena su dva elementa skupa K.

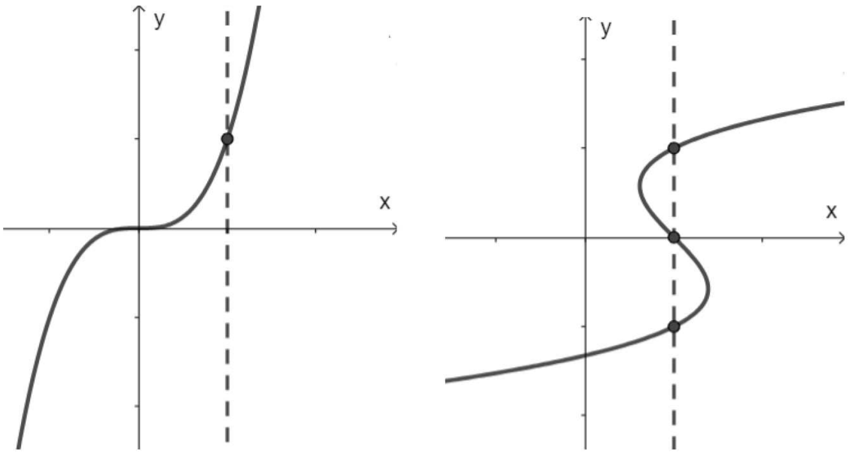
Funkcija se može definirati kao skup uređenih parova (x, y). Kada primijenimo definiciju funkcije, to znači da svakoj x-koordinati mora biti pridružena točno jedna y-koordinata, odnosno ta x-koordinata ne može biti uparena s više različitih y-koordinata.

Primjer 1. *Je li sljedeća relacija funkcija?* $\{(a,1),\ (b,2),\ (c,2)\}$

Rješenje. Ova relacija je funkcija, jer različitim x-koordinatama pridružuje točno jednu y-koordinatu. Za razliku od ovog primjera, relacija $\{(a,1),(b,2),(a,2)\}$ ne bi bila funkcija jer se x-koordinati a, pridružuju dvije vrijednosti, 1 i 2.

Definicija 2. (*vidjeti* [4] *str. 61*) *Neka je* $f : D \to K$ *funkcija. Skup* Γ_f=$\{(x, f(x)) : y = f(x), x \in D\}$ *nazivamo graf funkcije* f.

Osim na prethodnim primjerima definiciju funkcije možemo primijeniti i na grafovima kako bi provjerili predstavlja li dani grafički prikaz graf funkcije, te na taj način dolazimo do pojma vertikalni test.
Vertikalni test tvrdi da ako nije moguće povući pravac okomit na x-os koji sječe krivulju u više od jedne točke, tada je dana krivulja graf neke funkcije.
Primijetimo da je vertikalan test primjena definicije funkcije na grafičke prikaze, te odgovara onome što smo prethodno ustanovili kod funkcije definirane kao skup uređenih parova (x, y), te njime zapravo provjeravamo da niti jednoj x-koordinati nije pridruženo više od jedne y-koordinate. Na sljedećim primjerima pogledajmo primjenu vertikalnog testa na danim krivuljama.



(a) Ovo je graf funkcije. Svaki pravac okomit na x-os sječe ovu krivulju u točno jednoj točki.

(b) Ovo nije graf funkcije, jer postoji pravac okomit na x-os koji siječe ovu krivulju u tri točke.

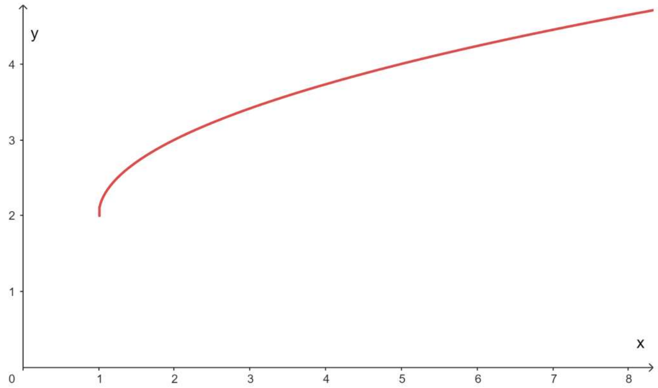
Slika 2.2: Primjena vertikalnog testa

Definicija 3. (*vidjeti* [3] *str. 28*) *Neka je zadana funkcija* $f : D \to K$. *Skup* $Imf = \{y : y = f(x), x \in D\} \subseteq K$ *nazivamo slika funkcije* f.

Primjer 2. *Odredimo domenu i sliku funkcije:* $g(x) = \sqrt{x-1} + 2$.

Rješenje. Zbog izraza pod korijenom slijedi da je $x - 1 \geq 0$, tj. $x \geq 1$. Za domenu funkcije tada vrijedi: $D_g = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$.
Sliku funkcije računamo: kako su vrijednosti ispod korijena uvijek veće ili jednake nuli vrijedi $\sqrt{x-1} \geq 0$, ako prethodnom izrazu dodamo dva, moramo ga dodati

i s desne strane nejednakosti pa imamo $\sqrt{x-1}+2 \geq 2$, stoga su funkcijske vrijednosti $g(x) \geq 2$, tj. $Img = [2, \infty\rangle$.
Pogledajmo Sliku 2.3 grafa ove funkcije. Uočimo kako vrijednosti x-koordinate idu od 1 do beskonačno, dok vrijednosti y-koordinate idu od 2 do beskonačno, što odgovara dobivenim intervalima za domenu i sliku ove funkcije.



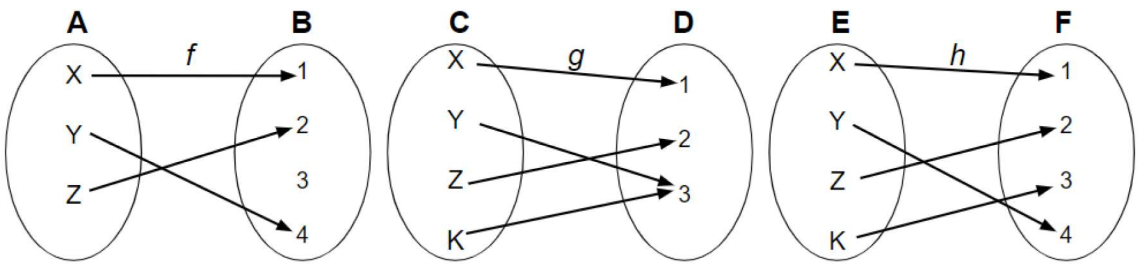
Slika 2.3: Graf funkcije $g(x) = \sqrt{x-1}+2$

Definicija 4. *(vidjeti [3] str. 35 i 36) Neka je zadana funkcija $f : D \to K$.*

1. *Za funkciju f koja različitim elementima domene pridružuje različite elemente kodomene kažemo da je injekcija.*

2. *Za funkciju f za koju vrijedi $Imf = K$ kažemo da je surjekcija.*

3. *Za funkciju f koja je injekcija i surjekcija kažemo da je bijekcija.*



Slika 2.4: Injekcija, surjekcija, bijekcija

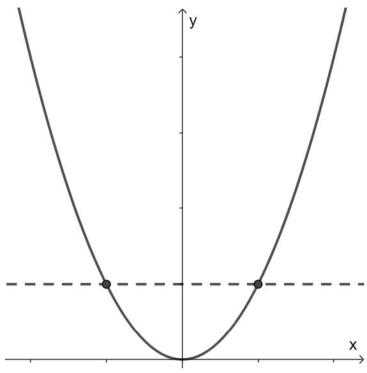
Pogledajmo Sliku 2.4: Funkcija $f : A \to B$ je injekcija jer je svakom elementu domene A pridružen različit element kodomene B, tj. $\{(X, 1), (Y, 4), (Z, 2)\}$, ali nije surjekcija jer element 3 kodomene B nije pridružen niti jednom elementu domene A, pa slika ove funkcije nije jednaka njezinoj kodomeni. Funkcija $g : C \to D$ je surjekcija jer je kodomena jednaka slici funkcije, ali nije injekcija jer je element 3 kodomene D pridružen dvama elementima Y i K, domene C. Naposljetku, funkcija $h : E \to F$ je injekcija (različitim elementima domene E su pridruženi različiti elementi kodomene F) i surjekcija (slika je jednaka kodomeni F), pa slijedi da je funkcija h bijekcija.

Primjer 3. *Je li funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ bijekcija?*

Rješenje. Domena i kodomena kvadratne funkcije je skup realnih brojeva. Ova funkcija nije injekcija jer različitim elementima domene pridružuje jednake elemente kodomene, $f(x_1) = f(x_2) \not\Rightarrow x_1 = x_2$, npr. $2 \mapsto 4$ i $(-2) \mapsto 4$. Ovo možemo lako uočiti i promatrajući graf kvadratne funkcije Slika 2.5.

Napomena 1. *Graf injekcije nikad ne može biti osnosimetričan s obzirom na neki pravac koji je paralelan s y-osi.*

Iz ove napomene slijedi tzv. horizontalni test, koji tvrdi da ako pravac paralelan s x-osi siječe graf funkcije u više od jedne točke, tada funkcija nije injekcija.



Slika 2.5: Primjena horizontalnog testa

Uočimo kako bi horizontalni test pokazivao injektivnost kada bi promatrali $x \in [0, \infty >$, tj. kada bi imali funkciju $f : [0, \infty > \to \mathbb{R}$.

Definicija 5. (*vidjeti* [6] *str. 10*) *Neka je $f : A \to B$ funkcija, i neka je $S \subseteq A$. Tada je restrikcija funkcije f na skup S funkcija koja se označava s $f|_S$ i vrijedi:*

$$f|_S : S \to B,$$

$$f|_S(x) = f(x), \quad \text{za svaki } x \in S.$$

Funkcija f je proširenje funkcije $f|_S$.

Dakle, restrikcija funkcije f na S je funkcija koja uzima elemente iz podskupa S i vraća iste vrijednosti koje bi vraćala funkcija f za te elemente. Na ovaj način, funkcija $f|_S$ je zapravo "ista" funkcija kao f, ali s domenom ograničenom na S.

Je li kvadratna funkcija surjekcija? Slika ove funkcije je $Imf = [0, \infty\rangle$, što nije jednako kodomeni funkcije koja je skup realnih brojeva. Uočimo kako bi ova funkcija bila surjekcija kada bi imali zadanu funkciju $f : \mathbb{R} \to [0, \infty\rangle$.
Dakle, funkcija $f(x) = x^2$ nije bijekcija za $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ali ako napravimo restrikciju, na domeni i kodomeni, ove funkcije, tj. ako promatramo $f : [0, \infty\rangle \to [0, \infty\rangle$, tada ova funkcija postaje bijekcija.

3 | Svojstva funkcije

Svojstva funkcije su karakteristike koje nam pomažu razumjeti ponašanje funkcije i njezin graf. Ova svojstva uključuju parnost i neparnost, periodičnost, monotonost i omeđenost. Osim algebarskim izračunom ova svojstva možemo uočiti i promatrajući graf funkcije.

Definicija 6. *(vidjeti [3] str. 40) Neka je zadana funkcija $f : D \to K$. Za funkciju f kažemo da je:*

a) *parna ako vrijedi*
$$f(x) = f(-x),$$
za svaki $x \in D$ takav da je i $(-x) \in D$. Graf parne funkcije simetričan je obzirom na y-os.

b) *neparna ako vrijedi*
$$f(-x) = -f(x),$$
za svaki $x \in D$ takav da je i $(-x) \in D$. Graf neparne funkcije simetričan je obzirom na ishodište koordinatnog sustava.

c) *niti parna niti neparna ako ne zadovoljava svojstva parnosti i neparnosti, tj. ako vrijedi*
$$f(x) \neq f(-x), f(-x) \neq -f(x),$$
za svaki $x \in D$ takav da je i $(-x) \in D$.

Napomena 2. *Dobro je znati:*

1. $\sin(-x) = -\sin(x)$, *tj. funkcija sinus je neparna.*

2. $\cos(-x) = \cos(x)$, *tj. funkcija kosinus je parna.*

3. $|-x| = |x|$, *tj. funkcija apsolutne vrijednosti je parna.*

4. *Ako je $f(x) = x^n$, gdje je n prirodan broj, tada je $f(x)$ parna ako je n paran, a neparna ako je n neparan.*

Primjer 4. *Ispitajmo je li sljedeća funkcija parna, neparna ili niti parna niti neparna.*

a) $g(x) = \frac{|x|}{(|2x|+1)}$

b) $h(x) = (3x^2 + 5x)^2$

Rješenje.

a)

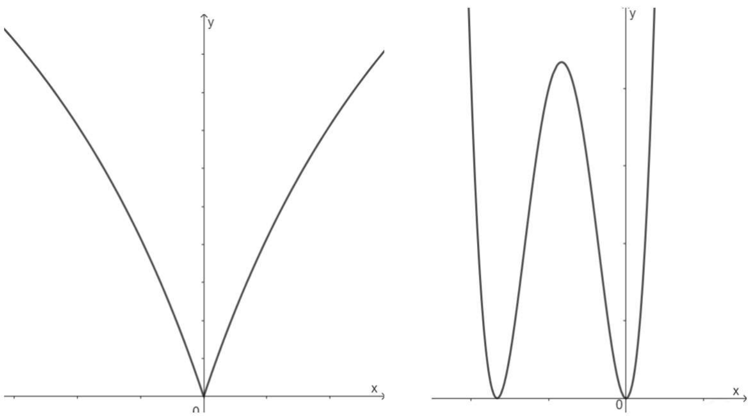
$$
\begin{aligned}
g(-x) &= \frac{|-x|}{(|2(-x)|+1)} \\
&= \frac{|-x|}{(|-2x|+1)} \quad \text{(primijenimo svojstvo } |x| = |-x|\text{)} \\
&= \frac{|x|}{(|2x|+1)}
\end{aligned}
$$

Vidimo da vrijedi $g(x) = g(-x)$, tj. ova funkcija je parna.

b)

$$
\begin{aligned}
h(-x) &= (3(-x)^2 + 5(-x))^2 \\
&= (3(x)^2 - 5(x))^2 \\
&= (3x^2 - 5x)^2 \\
-h(x) &= -(3x^2 + 5x)^2
\end{aligned}
$$

Uočimo kako vrijedi $h(x) \neq h(-x)$, $h(-x) \neq -h(x)$, tj. ova funkcija je niti parna niti neparna.
Promotrimo grafove ovih funkcija na slici 3.1.



(a) Graf je simetričan obzirom na y-os, što nam govori da je funkcija parna.

(b) Graf funkcije nije simetričan obzirom na ishodište, ali nije simetričan niti obzirom na y-os, što nam govori da je funkcija niti parna niti neparna.

Slika 3.1: Funkcije iz primjera 4

Definicija 7. (*vidjeti* [3] *str. 49*) *Funkcija* $f : D \to K$ *je periodična s periodom* $\tau > 0$ *ako vrijedi:*

1. $x \in D \Rightarrow x + \tau \in D$,

2. $f(x+\tau) = f(x)$, *za svaki* $x \in D$.

Najmanji $\tau > 0$ *nazivamo osnovni (temeljni) period funkcije* f.

Dakle, periodične funkcije su one funkcije koje se ponavljaju u pravilnim intervalima duž x-osi. Neke od poznatijih periodičnih funkcija su trigonometrijske funkcije.

1. Sinus i kosinus su funkcije s periodom $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, odnosno temeljnim periodom 2π.

2. Tangens i kotangens su funkcije s periodom $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, odnosno temeljnim periodom π.

Napomena 3. *Općenito, složena funkcija oblika* $f(x) = A \cdot sin(bx+c)$ *ili* $f(x) = A \cdot cos(bx+c)$ *je periodična funkcija s temeljnim periodom*

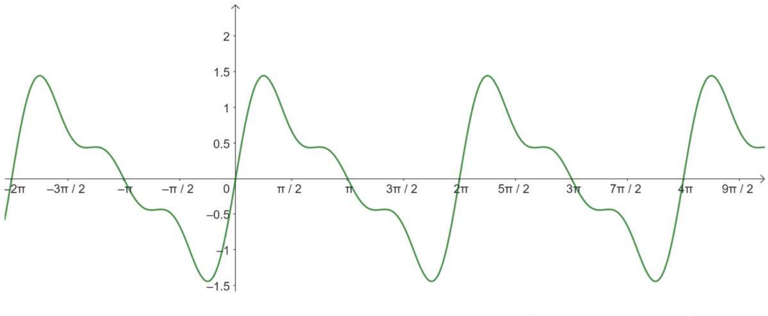
$$\tau = \frac{2\pi}{|b|}.$$

Složena funkcija oblika $f(x) = A \cdot tg(bx+c)$ *ili* $f(x) = A \cdot ctg(bx+c)$ *je periodična funkcija s temeljnim periodom*

$$\tau = \frac{\pi}{|b|}.$$

Primjer 5. *Odredimo osnovni period funkcije* $g(x) = sin(x) + \frac{1}{2}sin(2x) + \frac{1}{5}sin(3x)$.

Rješenje. Prvo pogledajmo pojedinačne periode funkcija unutar zadane funkcije. Primjenjujući prethodnu napomenu dolazimo do temeljnih perioda ovih funkcija.
Temeljni period funkcije $sin(x)$ je $\tau_1 = 2\pi$.
Temeljni period funkcije $\frac{1}{2}sin(2x)$ je $\tau_2 = \pi$.
Temeljni period funkcije $\frac{1}{5}sin(3x)$ je $\tau_3 = \frac{2}{3}\pi$.
Temeljni period zadane funkcije je najmanji zajednički višekratnik ovih perioda, tj. $\tau = NZV(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = 2\pi$.
Promotrimo graf ove funkcije na slici 3.2. Uočimo kako se funkcija zaista periodično ponavlja s periodom $2k\pi$, od kojih je najmanji pozitivan baš 2π, tj. potrebna je udaljenost 2π na x-osi između dva susjedna ponavljanja ciklusa funkcije.
Dodatno, gledajući graf možemo uočiti da je funkcija simetrična obzirom na ishodište koordinatnog sustava, što nam govori da je funkcija neparna.



Slika 3.2: Graf funkcije $g(x) = sin(x) + \frac{1}{2}sin(2x) + \frac{1}{3}sin(3x)$

Napomena 4. *Konstantna funkcija $f(x) = c$ je periodična funkcija, pri čemu je njezin period τ bilo koji pozitivan broj, budući da vrijedi $f(x + \tau) = f(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ i $\tau > 0$.*

Promotrimo graf funkcije sa slike 3.2, može se uočiti kao da postoje horizontalne granice koje graf funkcije ne prelazi, preciznije gledano to su pravci $y = 1.4$ i $y = -1.4$, što nas dovodi do pojma omeđenosti funkcije.

Definicija 8. *(vidjeti [3] str. 46) Neka je zadana funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Za funkciju f kažemo da je*

a) omeđena odozdo ako postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da za svaki x iz domene vrijedi:

$$a \leq f(x).$$

b) omeđena odozgo ako postoji $b \in \mathbb{R}$ takav da za svaki x iz domene vrijedi:

$$f(x) \leq b.$$

Općenito, kažemo da je funkcija omeđena ako postoje a,b $\in \mathbb{R}$ takvi da za svaki x iz domene vrijedi:

$$a \leq f(x) \leq b.$$

Promatrajući ovo svojstvo na grafu, omeđena funkcija će imati sve svoje vrijednosti unutar horizontalnih pravaca $y = a$ i $y = b$, tj. možemo reći kako je slika ove funkcije interval čije su rubne točke a i b.

Trigonometrijske funkcije $f(x) = Asin(x)$ i $f(x) = Acos(x)$ su omeđene na intervalu $[-A, A]$.

Primjer 6. *Promotrimo omeđenost sljedećih funkcija na slici 3.3.*

Omeđenost funkcije je važna jer nam daje informacije o tome koliko funkcija može narasti ili pasti.

Definicija 9. *(vidjeti [4] str. 90) Za funkcija $f : D \to K$, $I \subseteq D$ kažemo da je:*

a) stogo rastuća [padajuća] na intervalu I, ako za sve $x_1, x_2 \in I$ takve da $x_1 < x_2$, vrijedi

$$f(x_1) < f(x_2)[f(x_1) > f(x_2)].$$

Funkcije koje zadovoljavaju ovo svojstvo nazivamo strogo monotone funkcije na intervalu I.

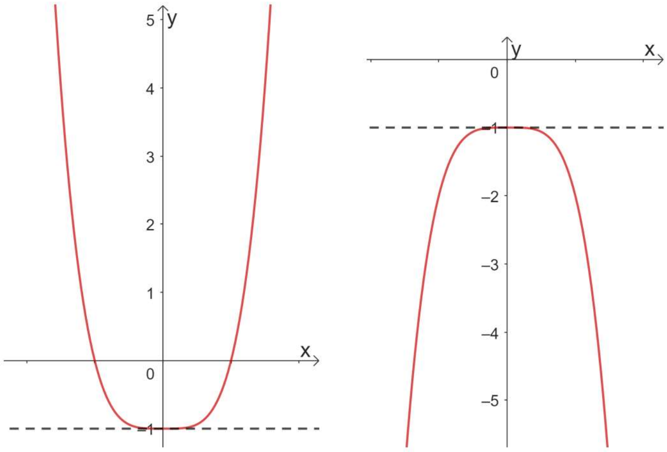
b) rastuća [padajuća] na intervalu I, ako za sve $x_1, x_2 \in I$ takve da $x_1 < x_2$, vrijedi

$$f(x_1) \leq f(x_2)[f(x_1) \geq f(x_2)].$$

Funkcije koje zadovoljavaju ovo svojstvo nazivamo monotone funkcije na intervalu I.

c) konstantna na intervalu I, ako za sve $x_1, x_2 \in I$ vrijedi

$$f(x_1) = f(x_2).$$



(a) Funkcija je omeđena odozdo pravcem $y = -1$, tj. $-1 \leq f(x)$.

(b) Funkcija je omeđena odozgo pravcem $y = -1$, tj. $g(x) \leq -1$.

Slika 3.3: Graf funkcija $f(x) = x^4 - 1$ i $g(x) = -x^4 - 1$

Promotrimo grafove funkcija sa slike 3.3. Funkcija pod a) pada na intervalu $\langle -\infty, 0 \rangle$, a raste na intervalu $\langle 0, \infty \rangle$. Funkcija pod b) raste na intervalu $\langle -\infty, 0 \rangle$, a pada na intervalu $\langle 0, \infty \rangle$.

Međutim, nemamo uvijek graf funkcije iz kojeg lako očitavamo monotonost. Računski do odgovora o monotonosti funkcije na određenim intervalima dolazimo primjenom sljedećeg teorema.

Teorem 1. *(vidjeti [3] str. 170) Neka je I jedan od skupova :* $[a, b]$, $\langle a, b \rangle$, $[a, b\rangle$ *ili* $\langle a, b]$. *Neka je* $f : I \subseteq D \to K$ *derivabilna na* $\langle a, b \rangle$.

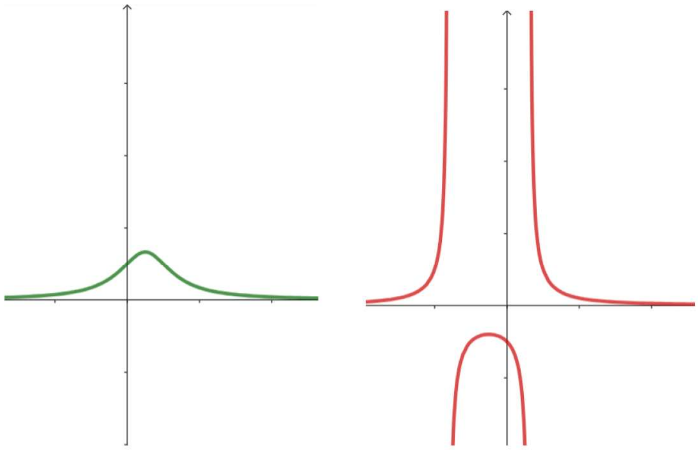
a) Funkcija f monotono raste na skupu I onda i samo onda ako je $f'(x) \geq 0$, *za svaki x* $\in \langle a, b \rangle$. *Ako je* $f'(x) > 0$ *za svaki* $x \in \langle a, b \rangle$, *onda funkcija f strogo raste na skupu I.*

b) Funkcija f monotono pada na skupu I onda i samo onda ako je $f'(x) \leq 0$, *za svaki x* $\in \langle a, b \rangle$. *Ako je* $f'(x) < 0$ *za svaki* $x \in \langle a, b \rangle$, *onda funkcija f strogo pada na skupu I.*

Dokaz. Dokaz se može pronaći u [3] str. 171. $\square$

4 | Crtanje grafa funkcije

Postupak crtanja grafova način je prijenosa formula i podataka u geometrijski oblik. Funkciju je moguće najlakše vizualizirati i geometrijski prikazati pomoću grafa. Promotrimo grafove sljedeće dvije funkcije.



(a) $f(x) = \frac{1}{x^2-x+1}$ (b) $g(x) = \frac{1}{x^2+x-1}$

Razlika u ponašanju ovih dviju funkcija može se uočiti i iz njihovih formula, koje su na prvu vrlo slične. Međutim, ako se pogledaju njihovi grafovi, ta se razlika odmah uočava. Kad god je potrebno objasniti opće ponašanje funkcije, pronaći njezine distinktivne značajke, graf je nezamjenjiv zbog svog vizualnog karaktera. Atributi funkcije kao što su domena, slika, asimptote, ekstremi, rast, pad i krajnje ponašanje funkcije jednako su grafički prikazi koliko i algebarski izračuni.

Asimptote funkcije su pravci kojima se graf funkcije približava, ali ih nikada ne dodiruje. Važnost asimptota prilikom crtanja grafova funkcija je u tome što nam omogućuju preciznije skiciranje grafova funkcija, posebno u područjima gdje se funkcije približavaju beskonačnosti ili nekim vrijednostima. Tri osnovne vrste asimptota su vertikalna, kosa i horizontalna.

Definicija 10. (*vidjeti* [3] *str. 131*) (*Asimptote funkcije*)

a) *Pravac* $x = a$ *nazivamo vertikalnom asimptotom funkcije* f *ako je barem jedan od limesa* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ *jednak ili* ∞ *ili* $-\infty$.

b) *Pravac* $y = kx + l$ *nazivamo kosom asimptotom funkcije* f *ako je:*

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k$,
2. $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx) = l$.

Napomena 5. *Iz kose asimptote za $k = 0$, odnosno kada je nagib pravca nula, dobivamo horizontalnu asimptotu, tj. pravac y=l je horizontalna asimptota funkcije f ako je $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$.*

Promotrimo sljedeći primjer gdje imamo već zadane asimptote i točke kroz koje krivulja prolazi. Potrebno je pronaći jednadžbu krivulje.

Primjer 7. *Krivulja $g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ prolazi točkom $T(1,3)$ i ima asimptote $x = 2$, $y = 1$. Odredimo parametre a, b, c, d.*

Rješenje. $x = 2$ vertikalna asimptota, vrijedi:

$$\lim_{x\to 2} \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{2a+b}{2c+d} = \infty \text{ tj. } 2c + d = 0, d = -2c,$$

kako $y = 1$ horizontalna asimptota vrijedi:

$$y = 1 = \lim_{x\to\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} \text{ tj. } a = c,$$

kako $T(1,3) \in g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ vrijedi:

$$g(1) = \frac{a+b}{c+d} = \frac{c+b}{c-2c} = \frac{c+b}{-c} = 3,$$

$\Rightarrow c + b = -3c \Rightarrow b = -4c.$

$$g(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{cx-4c}{cx-2c} = \frac{x-4}{x-2},$$
$$\Rightarrow a = 1, b = -4, c = 1, d = -2.$$

Kao što smo već spomenuli, postoje funkcije koje nisu monotono rastuće ili monotono padajuće na cijeloj svojoj domeni, nego su po dijelovima monotone. Odnosno na pojedinim dijelovima su padajuće, a na pojedinim rastuće. Kako bi došli do odgovora gdje funkcija prelazi iz rasta u pad, ili iz pada u rast, potrebno je odrediti ekstreme funkcije.
Stacionarna točka je točka u kojoj je tangenta na krivulju paralelna s osi x.

Definicija 11. (*vidjeti* [3] *str. 165) Neka je funkcija $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$ derivabilna u točki $c \in D$. Ako je $f'(c) = 0$, tada točku c nazivamo stacionarnom točkom funkcije f.*

Stacionarna točka ne mora nužno biti ekstrem. Potrebno je provjeriti mijenja li funkcija monotonost u toj točki, tj. prelazi li iz područja rasta u područje pada i obratno.

Definicija 12. (*vidjeti* [3] *str. 45*) *Kažemo da funkcija* $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ *u točki* $x_0 \in \langle a, b\rangle$ *postiže lokalni minimum ako postoji okolina* $O(x_0)$ *broja* x_0 *takva da je*

$$f(x) \geq f(x_0), \text{ za svaki } x \in O(x_0).$$

Funkcija f *u točki* $x_0 \in \langle a, b\rangle$ *postiže lokalni maksimum ako postoji okolina* $O(x_0)$ *broja* x_0 *takva da je*

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ za svaki } x \in O(x_0).$$

Ukoliko za $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$, *vrijede stroge nejednakosti, kažemo da se radi o strogom lokalnom minimumu, odnosno strogom lokalnom maksimumu.*
Lokalni minimum ili lokalni maksimum funkcije nazivamo lokalnim ekstremima funkcije.

Provjerimo koji uvjeti moraju biti ispunjeni kako bi neka točka bila ekstrem funkcije.

Napomena 6. (*vidjeti* [3] *str. 177-180*)

A) (*Nužan uvjet lokalnog ekstrema*)
Ako u točki $x_0 \in D_f$ *derivabilna funkcija* f *postiže lokalni ekstrem, onda je* $f'(x_0) = 0$.

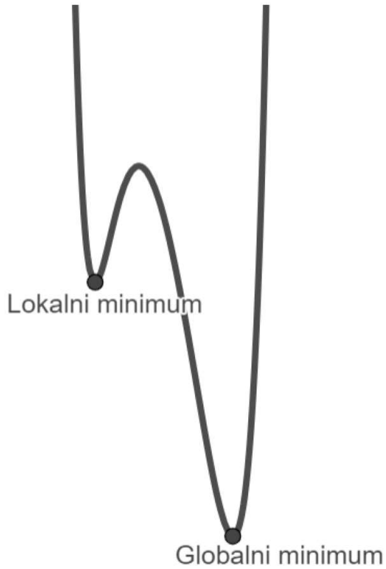
B1) (*Dovoljan uvjet lokalnog ekstrema*)
U točki $x_0 \in D_f$ *derivabilna funkcija f postiže lokalni ekstrem ako derivacija* f' *prolazeći kroz* x_0 *mijenja predznak. Ako se predznak mijenja iz negativnog u pozitivni, tada je* x_0 *točka lokalnog minimuma, ako se predznak mijenja iz pozitivnog u negativni, tada je* x_0 *točka lokalnog maksimuma.*

B2) (*Dovoljan uvjet lokalnog ekstrema*)
Neka je f *dva puta neprekidno derivabilna funkcija. Tada* f *postiže lokalni ekstrem u točki* $x_0 \in D_f$ *ako vrijedi* $f'(x_0) = 0$ *i* $f''(x_0) \neq 0$. *Ako je* $f''(x_0) > 0$, x_0 *je točka lokalnog minimuma, a ako je* $f''(x_0) < 0$, x_0 *je točka lokalnog maksimuma.*
U slučaju ako je $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, *uvjet B2*) *ne možemo koristiti, ostaje još uvjet B1*).

Ukoliko želimo odrediti u kojoj točki funkcija postiže najmanju ili najveću vrijednost na nekom zatvorenom intervalu, ili cijeloj svojoj domeni, onda govorimo o globalnim ekstremima. Promotrimo sliku 4.2 gdje jasno možemo vidjeti razliku između lokalnog i globalnog ekstrema neke funkcije. Uočimo, funkcija ima lokalni maksimum, ali nema globalni maksimum jer graf funkcija ide u beskonačnost.

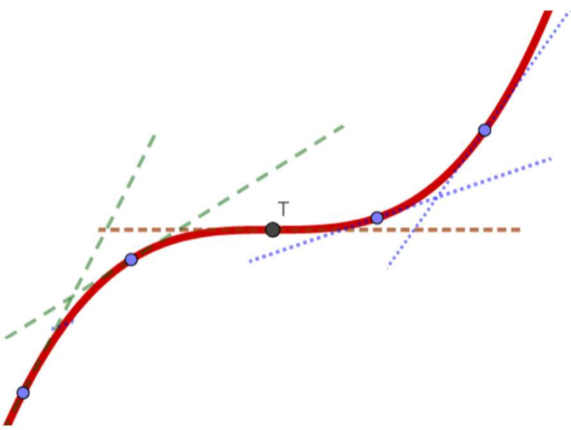
Definicija 13. (*vidjeti* [3] *str. 49*) *Kažemo da funkcija* $f : D \to \mathbb{R}$ *u točki* $x_0 \in D$ *postiže globalni minimum [maksimum] ako je* $f(x_0) \leq f(x)$ $[f(x_0) \geq f(x)]$ *za svaki* $x \in D$.
Ukoliko za svaki $x \neq x_0$ *vrijede stroge nejednakosti, govorimo o strogom globalnom ekstremu.*

Zakrivljenost krivulje u određenoj točki određena je drugom derivacijom funkcije u toj točki. Kada je funkcija konveksna (pozitivna zakrivljenost), tangenta u toj



Slika 4.2: Globalni i lokalni ekstrem funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

točki bit će ispod krivulje. Suprotno tome, kada je funkcija konkavna (negativna zakrivljenost), tangenta će biti iznad krivulje. Promotrimo sliku 4.3, tangente označene zelenom bojom nalaze se iznad krivulje tj. funkcija je konkavna na tom dijelu, tangente označene plavom bojom nalaze se ispod krivulje, tj. funkcija je konveksna na tom dijelu. U točki T tangenta je paralelna s x osi jer krivulja mijenja smjer zakrivljenosti, takva točka naziv se točka pregiba.
Promotrimo nagibe tangenti, za konkavni dio funkcije nagib tangente u nekoj točki se smanjuje kako se povećava x koordinata te točke, a kako je nagib tangente zapravo prva derivacija te funkcije, znači da prva derivacija padajuća funkcija na tom području, odnosno njena derivacija, koja je ujedno druga derivacija funkcije, je manja od nule. Analogno, zaključujemo zašto je funkcija konveksna kada joj je druga derivacija veća od nule.



Slika 4.3: Zakrivljenost krivulje

Definicija 14. (*vidjeti* [3] *str. 41*) *Neka je $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$. Točku $c \in D$ nazivamo točkom infleksije (pregiba) funkcije f ako postoji realan broj $\delta > 0$ takav da je f strogo* *konveksna na* $\langle c-\delta, c\rangle$ *i strogo konkavna na* $\langle c, c+\delta\rangle$ *ili da je* f *strogo konkavna na* $\langle c-\delta, c\rangle$ *i strogo konveksna na* $\langle c, c+\delta\rangle$

Teorem 2. (*vidjeti* [3] *str. 184*) *Neka je* $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ *dva put neprekidno derivabilna na* $\langle a, b\rangle$.

a) *Funkcija* f *je konveksna na* $\langle a, b\rangle$ *onda i samo onda ako je* $f''(x) \geq 0$ *za svaki* $x \in \langle a, b\rangle$.

b) *Funkcija* f *je konkavna na* $\langle a, b\rangle$ *onda i samo onda ako je* $f''(x) \leq 0$ *za svaki* $x \in \langle a, b\rangle$.

c) *Točka* $x_0 \in \langle a, b\rangle$ *je točka infleksije funkcije* f *onda i samo onda ako funkcija* f' *ima strogi ekstrem u* x_0.

U sljedećoj napomeni objedinit ćemo sve što je potrebno kako bi se dobio tijek funkcije u svrhu crtanja grafa funkcije.

Napomena 7. *Koraci pri crtanju grafa funkcije*

1) *Područje definicije funkcije.*

2) *Sjecišta s koordinatnim osima.*

3) *Parnost funkcije.*

4) *Periodičnost funkcije.*

5) *Asimptote funkcije.*

   a) *Vertikalna asimptota je pravac* $x = a$ *ako vrijedi:*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty,$$

   gdje je a točka u kojoj funkcija nije definirana.

   b) *Kosa asimptota je pravac* $y = kx + l$ *ako vrijedi:*

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k \\ \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx) = l. \end{cases}$$

   c) *Horizontalna asimptota je pravac* $y = l$ *ako vrijedi:*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l.$$

6) *Ekstremi funkcije.*

7) *Intervali monotonosti i intervali konveksnosti i konkavnosti funkcije.*

8) *Tablica tijeka funkcije.*

9) *Graf funkcije.*

Pogledajmo primjer crtanja grafa funkcije pomoću ovih koraka.

Primjer 8. *Nacrtajmo graf funkcije* $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$

Rješenje.

1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

2)
$$\frac{x}{x^2-1} = 0, x \neq \{-1, 1\}$$

$x = 0$, tj. točka u kojoj graf sječe koordinatne osi je $N(0,0)$.

3)
$$f(-x) = \frac{-x}{x^2-1} = -\left(\frac{x}{x^2-1}\right) = -f(x)$$

Funkcija je neparna.

4) Funkcija nije periodična.

5) a)
$$\lim_{x \to -1} \frac{x}{x^2-1} = \frac{-1}{0} = \infty \Rightarrow x = -1 \text{ vertikalna asimptota.}$$
$$\lim_{x \to 1} \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{0} = \infty \Rightarrow x = 1 \text{ vertikalna asimptota.}$$

b)
$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^3-x} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow k = 0, \text{ dobit ćemo horizontalnu asimptotu.}$$

c)
$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2-1} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ horizontalna asimptota.}$$

6)
$$f'(x) = \frac{x^2-1-x(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$$

Stacionarne točke:
$$\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} = 0 \Rightarrow x^2 = -1, x \notin \mathbb{R} \text{ tj. nema realnih rješenja.}$$

Nema stacionarnih točaka, pa ni ekstrema.

7)

$$f''(x) = \left(-\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}\right)' = \frac{-2x\cdot(x^2-1)^2 + 2\cdot(x^2+1)\cdot(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4}$$
$$= \frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}.$$

Točke pregiba:

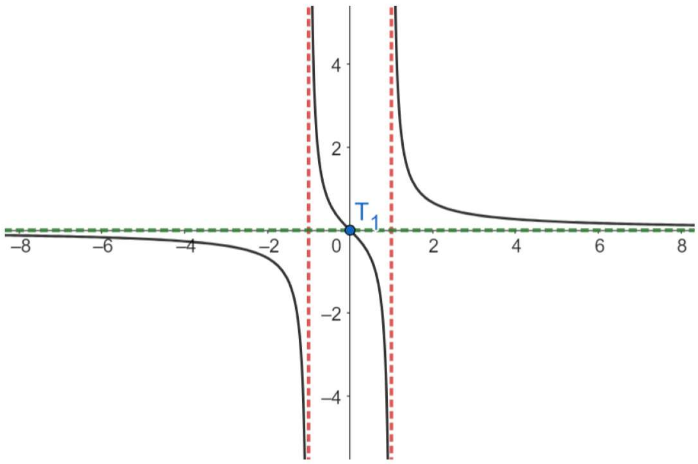
$$\frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3} = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2^2 = -3 \Rightarrow T_1(0, f(0)) = T_1(0,0), x_2 \notin \mathbb{R}.$$

8) Pogledajmo tablicu 4.1

x	$x \in \langle -\infty, -1\rangle$	$x \in \langle -1, 0\rangle$	$x \in \langle 0, 1\rangle$	$x \in \langle 1, +\infty\rangle$
f'	$-$	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
f	$\searrow$ konkavna	$\searrow$ konveksna	$\searrow$ konkavna	$\searrow$ konveksna

Tablica 4.1: Tablica tijeka funkcije $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$

9) Pogledajmo graf funkcije na slici 4.4.



Slika 4.4: Graf funkcije $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$

4.1 Graf inverzne funkcije

Inverzna funkcija točki u slici funkcije pridružuje polaznu točku domene. Drugim riječima, što god funkcija radi, inverzna funkcija to poništava.

Definicija 15. (*vidjeti* [3] *str.* 36) *Neka je $f : D \to K$ bijekcija. Tada postoji funkcija $f^{-1} : K \to D$ definirana formulom $f^{-1}(y) := x$, gdje je $x \in D$ jedinstveni element takav da je $f(x) = y$. Funkciju f^{-1} nazivamo inverzna funkcija funkcije f te vrijedi:*

1. $(f \circ f^{-1})u = u$, *za svaki* $u \in K$,
2. $(f^{-1} \circ f)v = v$, *za svaki* $v \in D$.

Iz definicije inverzne funkcije jasno je da ako je f^{-1} inverzna funkcija funkcije f, onda je i f inverzna funkcija funkcije f^{-1}.

Napomena 8. (*vidjeti* [3] *str.* 38) *Jednadžbu* $f(x) = y, y \in K$, *gdje je* $x = f^{-1}(y)$ *rješavamo po* x. *Ako za neki* $y \in K$:

i) *rješenje ne postoji, onda* f *nije surjekcija.*

ii) *rješenje nije jedinstveno, onda* f *nije injekcija.*

iii) *rješenje postoji i jedinstveno je, onda je* f *bijekcija i* f^{-1} *je inverz od* f.

Iz grafova dviju funkcija, možemo utvrditi jesu li one inverzne jedna drugoj.

Napomena 9. *Ako su grafovi dvije funkcije simetrični u odnosu na pravac* $y = x$, *tada kažemo da su dvije funkcije inverzne jedna drugoj.*

To je zbog činjenice da ako (x, y) pripada grafu funkcije, tada (y, x) pripada grafu njoj inverzne funkcije. Dokažimo to u sljedećem teoremu.

Teorem 3. (*vidjeti* [4] *str.* 294.) *Neka je* $f : X \to Y$ *bijektivna funkcija, a* $g : Y \to X$ *njezina inverzna funkcija. Tada za svaki* $(x, y) \in X \times Y$ *vrijedi:* $(x, y) \in \Gamma_f \iff (y, x) \in \Gamma_g$.

Dokaz. Kako je funkcija g inverzna funkcija funkcije f tada za $(x, y) \in X \times Y$ vrijedi

$$y = f(x) \Longrightarrow g(y) = g(f(x)) = x \Longrightarrow g(y) = x,$$

$$g(y) = x \Longrightarrow y = f(g(y)) = f(x) \Longrightarrow y = f(x).$$

Iz čega zaključujemo:

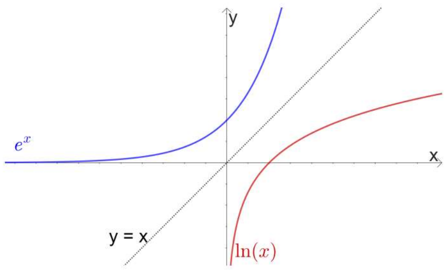
$$y = f(x) \iff x = g(y).$$

Sada je:

$$y = f(x) \iff (x, y) \in \Gamma_f \text{ i } x = g(y) \iff (y, x) \in \Gamma_g.$$

□

Na sljedećem grafu na slici 4.5 promotrimo odnos dvije krivulje.



Slika 4.5: Odnos funkcije $f(x) = \ln x$ i $g(x) = e^x$

Promatrajući graf ove dvije krivulje, uočavamo kako su zapravo jedna drugoj inverzne jer vidimo da su simetrične obzirom na pravac $x = y$.

Primjeri još nekih funkcija i njezinih inverza:

1. $f(x) = x^3$ i $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$,
2. $f(x) = e^{-x}$ i $f^{-1}(x) = \ln \frac{1}{x}$,
3. $f(x) = x^2, x \geq 0$ i $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$,
4. $f(x) = \sin x, \frac{-\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ i $f^{-1}(x) = \arcsin x$,
5. $f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}$ i $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$,
6. $f(x) = log_a(x)$ i $f^{-1}(x) = a^x$.

4.2 Rješavanje jednadžbi pomoću grafa funkcije

Rješavanje jednadžbe nije samo algebarski izračun, moguće je pronaći rješenje, ili barem približno rješenje, služeći se grafom. Ponekad rješenja jednadžbe nije lako pronaći algebarskim izračunom, ali služeći se grafičkim prikazima taj postupak postaje puno brži i lakši.

Napomena 10. *Jednadžbu oblika $f(x) = g(x)$ rješavamo tako da u istom koordinatnom sustavu nacrtamo krivulju $y = f(x)$, a zatim krivulju $y = g(x)$. Rješenje jednadžbe $f(x) = g(x)$ pronađemo određivanjem x-vrijednosti bilo koje točke presjeka ovih dviju krivulja.*

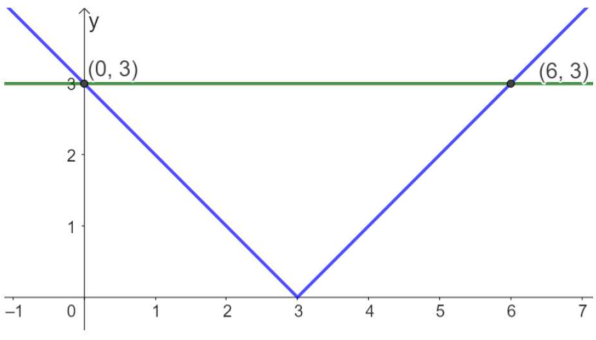
Promotrimo sljedeće primjere.

Primjer 9. *Riješimo jednadžbu $|x - 3| = 3$.*

Rješenje. Algebarski bi ovo vrlo jednostavno riješili na sljedeći način.

$$|x - 3| = 3 \iff -3 = x - 3 = 3 \iff 0 = x - 3 = 6.$$

Odnosno rješenja su $x_1 = 0$ i $x_2 = 6$.
Primijenimo gore opisanu metodu za rješavanje pomoću grafa. Prvo nacrtamo graf funkcije $f(x) = |x - 3|$, a zatim pravac $y = 3$.



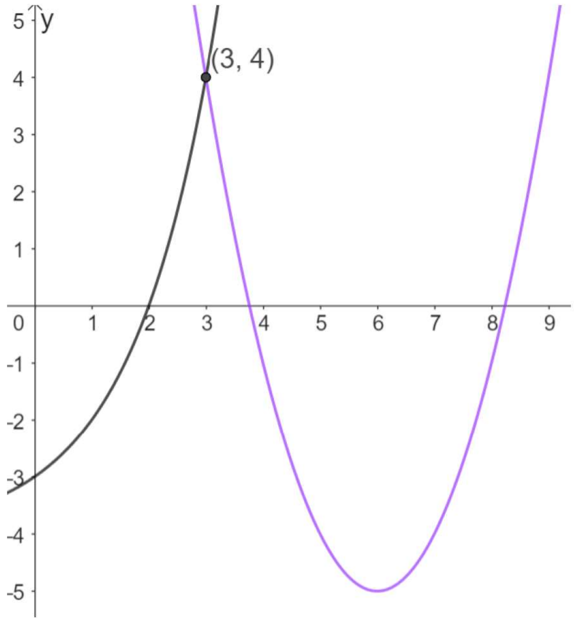
Slika 4.6: Graf funkcije $f(x) = |x - 3|$ i $y = 3$

Pomoću slike 4.6 uočimo kako se ove dvije funkcije sijeku u točkama $(0, 3)$ i $(6, 3)$.

Kako gledamo samo vrijednosti x koordinate, rješenja jednadžbe su $x_1 = 0$ i $x_2 = 6$, što smo dobili i algebarskim izračunom. Pogledajmo ovu metodu na malo složenijem primjeru.

Primjer 10. *Riješimo jednadžbu* $(x-6)^2 - 5 = 2^x - 4$.

Rješenje. Rješavanje ove jednadžbe algebarski je vrlo izazovno. Probajmo je riješiti pomoću grafa. Prvi korak je nacrtati graf funkcije $f(x) = (x-6)^2 - 5$ i $g(x) = 2^x - 4$. Pogledajmo graf na slici 4.7.



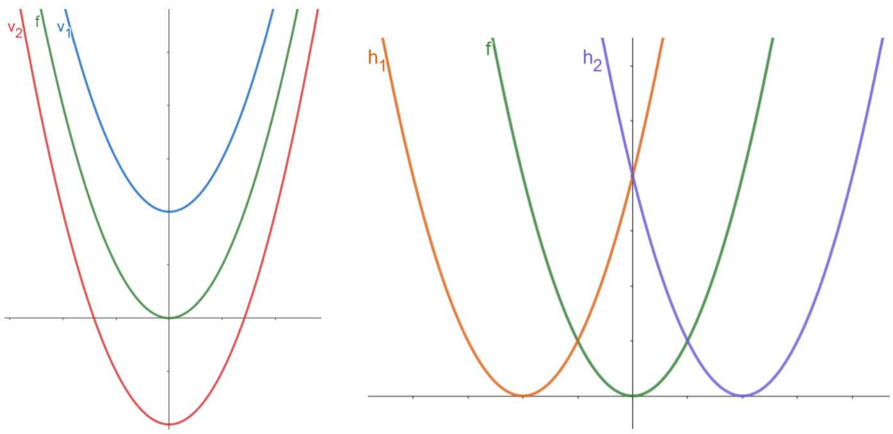
Slika 4.7: Graf funkcije $f(x) = (x-6)^2 - 5$ i $g(x) = 2^x - 4$

Uočimo kako se ove dvije krivulje sijeku u točki $(3, 4)$, što se lako može iščitati iz grafa, odnosno rješenje ove jednadžbe je $x = 3$.

5 | Transformacije grafa funkcije

Transformacije grafa funkcije odnose se na različite načine na koje se graf funkcije može promijeniti ili "transformirati" primjenom različitih matematičkih operacija. Ove transformacije omogućuju promjenu oblika, položaja i orijentacije grafa bez promjene osnovnih svojstava funkcije. Razumijevanje ovih transformacija omogućuje jednostavnije analiziranje i crtanje funkcija te prilagodbu grafa kako bi odgovarao specifičnim potrebama u matematičkoj analizi i primjeni.

Započnimo s translacijom grafa funkcije. Graf funkcije možemo pomicati vertikalno i horizontalno. Pogledajmo na primjeru slike 5.1.



(a) Grafovi funkcija: $f(x) = x^2$, $v_1(x) = x^2 + 2$ i $v_2(x) = x^2 - 2$.

(b) Grafovi funkcija: $f(x) = x^2$, $h_1(x) = (x+2)^2$ i $h_2(x) = (x-2)^2$.

Slika 5.1: Vertikalni i horizontalni pomak

Definicija 16. (*vidjeti* [5] *str.* 11) *Graf funkcije $F(x) = f(x) + h, h \in \mathbb{R}$, možemo dobiti iz grafa funkcije $y = f(x)$ koji se mijenja dodavanjem konstante h na sljedeći način:*

a) Ako je $h > 0$ graf funkcije $y = f(x)$ pomiče se prema gore za h.

b) Ako je $h < 0$ graf funkcije $y = f(x)$ pomiče se prema dolje za $|h|$.

Ova transformacija naziva se vertikalni pomak ili translacija grafa u smjeru y-osi.

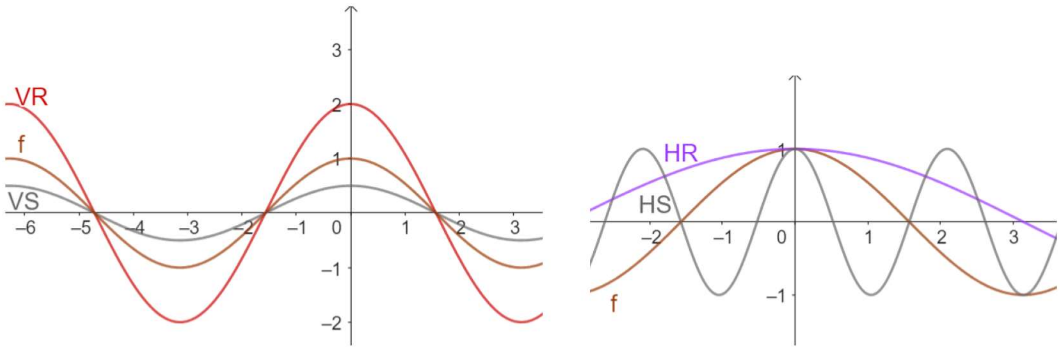
Definicija 17. (*vidjeti* [5] *str.* 11) *Graf funkcije $F(x) = f(x + v), v \in \mathbb{R}$, možemo dobiti iz grafa funkcije $y = f(x)$ koji se mijenja dodavanjem konstante v na sljedeći način:*

a) *Ako je $v > 0$ graf funkcije $y = f(x)$ pomiče se prema lijevo za v.*

b) *Ako je $v < 0$ graf funkcije $y = f(x)$ pomiče se prema desno za $|v|$.*

Ova transformacija naziva se horizontalni pomak ili translacija grafa u smjeru x-osi.

Osim translacije grafa, još jedna moguća transformacija je rastezanje (dilatacija) ili stezanje (kontrakcija). Pogledajmo na primjeru slika 5.2.



(a) Grafovi funkcija: $f(x) = \cos(x)$, $VR(x) = 2\cos(x)$ i $VS(x) = \frac{1}{2}\cos(x)$.

(b) Grafovi funkcija: $f(x) = \cos(x)$, $HR(x) = \cos(\frac{1}{2}x)$ i $HS(x) = \cos(3x)$.

Slika 5.2: Rastezanje (dilatacija) i stezanje (kontrakcija) grafa

Definicija 18. *(vidjeti [5] str. 12) Graf funkcije $F(x) = kf(x), k \in \mathbb{R}$, možemo dobiti iz grafa funkcije $y = f(x)$ koji se mijenja množenjem konstantom k na sljedeći način:*

a) *Ako je $0 < k < 1$ graf funkcije $y = f(x)$ se steže u smjeru y-osi.*

b) *Ako je $k > 1$ graf funkcije $y = f(x)$ se rasteže u smjeru y-osi.*

Ova transformacija naziva se rastezanje (dilatacija) ili stezanje (kontrakcija) grafa u smjeru y-osi.

Definicija 19. *(vidjeti [3] str. 89) Graf funkcije $F(x) = f(lx), l \in \mathbb{R}$, možemo dobiti iz grafa funkcije $y = f(x)$ koji se mijenja množenjem konstantom l na sljedeći način:*

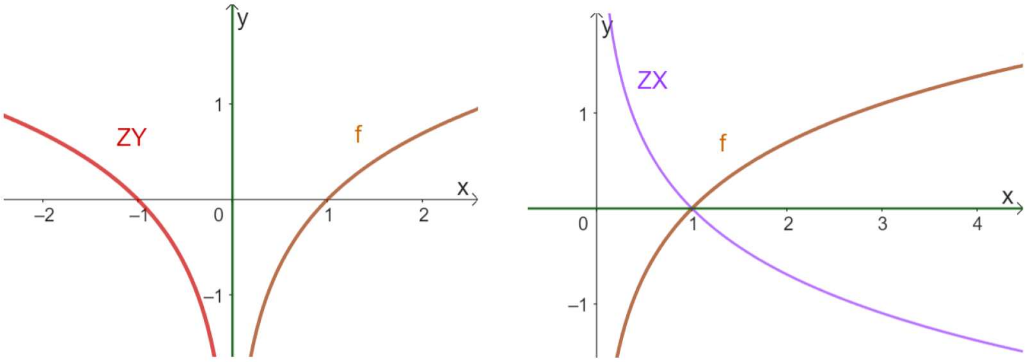
a) *Ako je $0 < l < 1$ graf funkcije $y = f(x)$ se rasteže u smjeru x-osi.*

b) *Ako je $l > 1$ graf funkcije $y = f(x)$ se steže u smjeru x-osi.*

Ova transformacija naziva se rastezanje (dilatacija) ili stezanje (kontrakcija) grafa u smjeru x-osi.

Promatrajući prethodnu definiciju vidimo da nije definirana za slučaj kada su faktori manji od nule, odnosno kada im je predznak minus. U tom slučaju dolazi do zrcaljenja grafa. Pogledajmo primjer na slici 5.3.

Definicija 20. *(vidjeti [5] str. 13) Graf funkcije $F(x) = f(-x)$ dobijemo osnom simetrijom grafa $y = f(x)$ obzirom na os y. Ovo preslikavanje naziva se zrcaljenje ili refleksija grafa obzirom na os y.*
Graf funkcije $F(x) = -f(x)$ dobijemo osnom simetrijom grafa $y = f(x)$ obzirom na os x. Ovo preslikavanje naziva se zrcaljenje ili refleksija grafa obzirom na os x.



(a) Grafovi funkcija: $f(x) = \ln(x)$ i $ZY(x) = \ln(-x)$.

(b) Grafovi funkcija: $f(x) = \ln(x)$ i $ZX(x) = -\ln(x)$.

Slika 5.3: Zrcaljenje ili refleksija grafa

Objedinimo sve transformacije unutar jedne tablice zbog bolje preglednosti. Pogledajmo tablicu 5.1. Transformacije su podijeljene na one "izvan" i "unutar" početne funkcije $f(x)$.

Nova funkcija	Promjena koordinata grafa $f(x)$	Vizualna promjena grafa
$f(x)+c, c>0$	$(a,b) \mapsto (a, b+c)$	Pomak prema gore za c
$f(x)-c, c>0$	$(a,b) \mapsto (a, b-c)$	Pomak prema dolje za c
$df(x), d>1$	$(a,b) \mapsto (a, db)$	Vertikalna dilatacija za d
$\frac{1}{d}f(x), d>1$	$(a,b) \mapsto (a, \frac{1}{d}b)$	Vertikalna kontrakcija za $\frac{1}{d}$
$-f(x)$	$(a,b) \mapsto (a, -b)$	Zrcaljenje oko osi x
$f(x+c), c>0$	$(a,b) \mapsto (a-c, b)$	Pomak u lijevo za c
$f(x-c), c>0$	$(a,b) \mapsto (a+c, b)$	Pomak u desno za c
$f(dx), d>1$	$(a,b) \mapsto (\frac{1}{d}a, b)$	Horizontalna kontrakcija za $\frac{1}{d}$
$f(\frac{1}{d}x), d>1$	$(a,b) \mapsto (da, b)$	Horizontalna dilatacija za d
$f(-x)$	$(a,b) \mapsto (-a, b)$	Zrcaljenje oko osi y

Tablica 5.1: Tablica transformacije funkcije $f(x)$

Kad imamo više transformacija odjednom trebamo se pridržavati pravila koja će osigurati da dođemo do točnog grafa transformirane funkcije. Transformacije funkcije poštuju pravilo da se prvo sređuju izrazi u zagradama. Pogledajmo korake crtanja funkcije

$$F(x) = -af(-bx+c)+d$$

1.) Unutar funkcije $f(x)$ (horizontalne promjene):

1. Faktor c utječe na horizontalni pomak, lijevo ili desno.

2. Predznak $''-''$ zrcali graf oko osi y.

3. Faktor b utječe na horizontalnu dilataciju ili kontrakciju.

2.) Izvan funkcije $f(x)$ (vertikalne promjene):

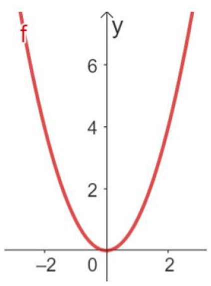
1. Predznak $''-''$ zrcali graf oko osi x.

2. Faktor a utječe na vertikalnu dilataciju ili kontrakciju.

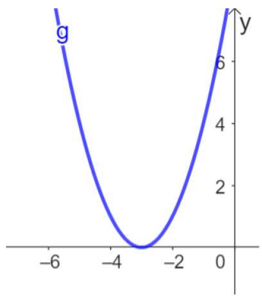
3. Faktor d utječe na vertikalni pomak, prema gore ili dolje.

Primjer 11. *Nacrtajmo graf funkcije* $F(x) = -2(-\frac{1}{2}x + 3)^2 - 1$.

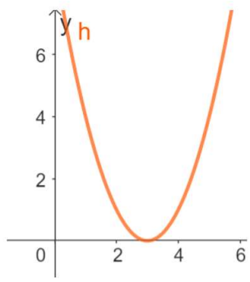
Rješenje. Na početku je bitno odrediti osnovnu funkciju, tj. onu polaznu. U ovom zadatku je to funkcija $f(x) = x^2$. Pratimo korake crtanja funkcije. Pomoću sljedećih grafičkih prikaza promotrimo kako se dolazi do rješenja ovog primjera.



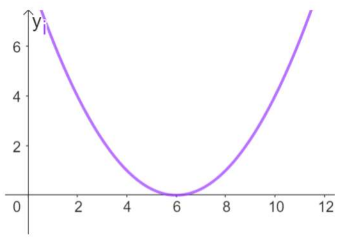
(a) Osnovna funkcija $f(x) = x^2$.



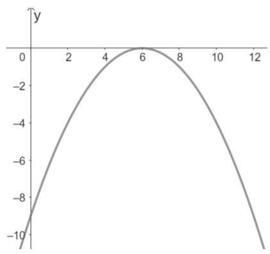
(b) Horizontalni pomak funkcije u lijevo za 3. Funkcija $f(x) = (x+3)^2$.



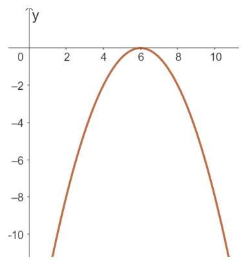
(c) Zrcaljenje oko osi y. Funkcija $f(x) = (-x+3)^2$.



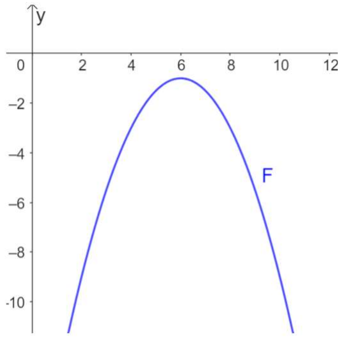
(d) Horizontalna dilatacija za 2. Funkcija $f(x) = (-\frac{1}{2}x + 3)^2$.



(e) Zrcaljenje oko osi x. Funkcija $f(x) = -(-\frac{1}{2}x + 3)^2$.



(f) Vertikalna dilatacija za 2. Funkcija $f(x) = -2(-\frac{1}{2}x + 3)^2$.



(g) Graf funkcije $F(x)$.

6 | Funkcije u kurikulumu

Svrha predmeta matematika u obrazovanju je razviti logičko i kritičko mišljenje, vještine rješavanja problema, te pružiti praktične alate za svakodnevni život. Matematika je temelj za daljnje obrazovanje i karijeru. U kurikulumu, domene predmeta Matematika imaju sljedeću podjelu: "Brojevi", "Algebra i funkcije", "Oblik i prostor", "Mjerenje" te "Podatci, statistika i vjerojatnost".

U ovom poglavlju proći ćemo domenu "Algebra i funkcije", s naglaskom na funkcijama. Kurikulum nastavnog predmeta matematika biti će glavni izvor ovog poglavlja (vidjeti [8]).

Unutar domene "Algebra i funkcije", učenici koriste različite vrste prikaza kao što su algebarski izrazi, tablice i grafovi kako bi generalizirali, interpretirali i rješavali problemske situacije. Uočavaju nepoznanice i rješavaju jednadžbe i nejednadžbe pomoću odgovarajućih algebarskih postupaka, grafičkih metoda i tehnologije, kako bi otkrili njihove vrijednosti i razumjeli ih u zadanom kontekstu. Također, koriste algebarske postupke za primjenu formula i provjeru pretpostavki.

U osnovnoškolskom obrazovanju u domeni "Algebra i funkcije", veći je naglasak na algebri. Pojam funkcije gradi se postupno kroz osnovnu školu. Učenici najprije prepoznaju i nastavljaju nizove te uočavaju pravilnosti nizanja, što se povezuje s različitim predmetima. Kasnije kreiraju nizove i objašnjavaju njihove pravilnosti, određuju vrijednosti nepoznatih članova jednakosti te koriste slova kao oznake za brojeve. Kako napreduju, učenici rješavaju zadatke s nepoznatim članom, razlikuju jednakosti i nejednakosti te računaju vrijednosti nepoznatih veličina. U višim razredima osnovne škole rješavaju i primjenjuju linearne jednadžbe, koriste matematičke simbole za prikaz skupova i odnosa među njima te računaju s algebarskim izrazima. U sedmom razredu osnovne škole uče prepoznavati proporcionalnost i primjenjivati linearnu ovisnost, te kao dio proširenog sadržaja povezuju linearnu ovisnost s pojmom linearne funkcije. Međutim, s formalnom definicijom funkcije ne susreću se do srednjoškolskog obrazovanja.

Kurikulum nastavnog predmeta matematika u srednjoj školi podijeljen je na gimnazije i strukovne škole, razlikuju se u opsegu sadržaja i godišnjoj satnici. U nastavku ćemo proći odgojno-obrazovne ishode vezane uz funkciju u gimnazijama.

1. razred srednje škole:

- Povezuje različite prikaze linearne funkcije. Učenici uče kako prikazati zadanu linearnu funkciju tablično i grafički, opisati utjecaj koeficijenata na položaj grafa, definirati i odrediti nultočku. Također, iz grafa čitaju argumente i vrijednosti, određuju koeficijente i funkciju iz zadanih elemenata. Crtaju graf funkcije apsolutne vrijednosti (prošireni sadržaj za gimnazije s godišnjom satnicom od 105 sati godišnje).
- Primjenjuje linearnu funkciju pri rješavanju problema. Učenici prepoznaju linearnu ovisnost u problemskim situacijama, zapisuju je kao linearnu funkciju i primjenjuju za analizu problema. Analiziraju probleme iz grafičkog prikaza.

2. razred srednje škole:

- Analizira funkciju. Učenici uče kako računati funkcijske vrijednosti zadane funkcije uvrštavanjem brojeva (za sve satnice), ili algebarskih izraza (gimnazije s godišnjom satnicom od 175 i 210 sati). Također, određuju funkciju iz zadane funkcijske vrijednosti algebarskog izraza i kompoziciju funkcija (gimnazije s godišnjom satnicom od 175 i 210 sati). Računski određuju domenu racionalnih i iracionalnih funkcija te sliku funkcije za linearne i kvadratne primjere funkcije. Znaju prepoznati primjere bijekcije između skupova prikazanih Vennovim dijagramima (gimnazije s godišnjom satnicom od 105 i 140 sati). Daju primjere bijekcije (gimnazije s godišnjom satnicom od 175 i 210 sati).
- Analizira grafički prikaz funkcije. Učenici grafički prikazuju funkcije, određuju domenu, kodomenu i sliku funkcije iz zadanog grafa te utvrđuju i objašnjavaju bijektivnost. Također, skiciraju inverznu funkciju.
- Primjenjuje kvadratnu funkciju. Učenici određuju nultočke, sjecište s ordinatom, tjeme, os simetrije i tijek kvadratne funkcije. Grafički prikazuju kvadratnu funkciju, očitavaju točke s grafa (vrijedi za sve gimnazije) i objašnjavaju oblik kvadratne funkcije u ovisnosti o diskriminanti i vodećem koeficijentu (gimnazije s godišnjom satnicom od 140, 175 i 210 sati). Također, određuju funkciju iz grafa (prošireni sadržaj za gimnazije s godišnjom satnicom od 105 sati).

3. razred srednje škole:

- Analizira eksponencijalnu i logaritamsku funkciju. Učenici određuju domenu, kodomenu, sliku, rast, pad i inverznu funkciju eksponencijalne i logaritamske funkcije te crtaju njihove grafove. Također, primjenjuju prirodni logaritam (prošireni sadržaj za gimnazije s godišnjom satnicom od 105 i 140 sati godišnje).
- Primjenjuje eksponencijalnu i logaritamsku funkciju. Učenici modeliraju problemske situacije koristeći eksponencijalne i logaritamske funkcije, određuju i provjeravaju rješenja te utvrđuju njihovu smislenost.

- Primjenjuje svojstva trigonometrijskih funkcija. Učenici definiraju trigonometrijske funkcije broja na brojevnoj kružnici, otkrivaju njihova svojstva i koriste ih za računanje vrijednosti trigonometrijskih funkcija.

- Primjenjuje trigonometrijske identitete (prošireni sadržaj za gimnazije s godišnjom satnicom od 105, 140 i 175 sati). Učenici računaju vrijednosti trigonometrijskih funkcija koristeći osnovne trigonometrijske identitete. Primjenjuju i povezuju osnovne trigonometrijske identitete, adicijske poučke, funkcije dvostrukog i polovičnog (prošireni sadržaj za gimnazije s godišnjom satnicom od 210 sati) broja.

- Analizira graf trigonometrijske funkcije. Učenici prepoznaju i opisuju grafove osnovnih trigonometrijskih funkcija te ih grafički prikazuju.

- Primjenjuje trigonometrijske funkcije. Učenici analiziraju probleme opisane trigonometrijskom funkcijom i koriste trigonometrijske funkcije za modeliranje problema.

4. razred srednje škole:

- Analizira svojstva funkcija. Učenici nabrajaju elementarne funkcije i navode njihova svojstva, uključujući domenu, kodomenu, sliku, parnost/neparnost, periodičnost, monotonost, ograničenost i asimptote (asimptote ne rade gimnazije s godišnjom satnicom od 96 i 128 sati). Objašnjavaju svojstva funkcija na grafu (vrijedi za sve gimnazije) i određuju ih iz različitih zapisa (vrijedi za sve gimnazije, osim onih s godišnjom satnicom od 96 sati).

- Tumači značenje limesa funkcije u točki. Učenici opisuju i grafički prikazuju funkcije koje su neprekidne i koje nisu te objašnjavaju pojam limesa funkcije. Određuju limes funkcije (vrijedi za sve gimnazije) i povezuju ga s pojmom asimptote (gimnazije s godišnjom satnicom od 160, 192 i 224 sata).

- Povezuje definiciju derivacije funkcije u točki s problemom tangente i brzine. Učenici grafički prikazuju i objašnjavaju problem tangente, označavaju prirast varijable i prirast funkcije te povezuju s pojmom limesa. Objašnjavaju vezu derivacije i trenutne brzine, te iskazuju definiciju derivacije funkcije u točki.

- Primjenjuje derivaciju funkcije u problemskim zadatcima. Učenici izvode derivaciju po definiciji, navode pravila deriviranja zbroja, umnoška i kvocijenta. Određuju derivaciju složene funkcije, tangentu (vrijedi za sve gimnazije) i normalu (gimnazije s godišnjom satnicom od 192 i 224 sati) na grafu funkcije te rješavaju problemske zadatke koristeći derivaciju. Prošireni sadržaj uključuje određivanje derivacije implicitno zadane funkcije (gimnazije s godišnjom satnicom od 192 i 224 sata godišnje).

- Povezuje derivaciju funkcije i crtanje grafa funkcije. Učenici određuju domenu, nultočke, stacionarne točke, intervale pada i rasta funkcije, konveksnost/konkavnost, ekstreme i asimptote. Određuju tijek funkcije i crtaju graf.

- Primjenjuje integral u problemskim zadatcima (gimnazije s godišnjom satnicom od 224 sata godišnje). Određuju površinu ispod grafa funkcije i obujam rotacijskog tijela pomoću integrala.

6.1 Kvadratna funkcija

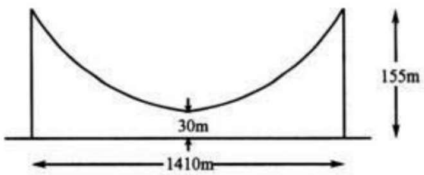
U ovom dijelu proći ćemo kroz neke primjere i miskoncepcije vezane za kvadratnu funkciju, kao jedne od funkcija koje se obrađuju u srednjoj školi. Nakon što se stekne znanje o grafovima linearnih funkcija, sljedeći korak su grafovi kvadratnih funkcija. Graf funkcije $y = x^2$ možemo spomenuti kad se raspravlja o drugim korijenima brojeva koji nisu cijeli brojevi, jer graf ove kvadratne funkcije pruža uvid u približno rješenje jednadžbe za određenu vrijednost y. Nadalje, potrebno je stvoriti vezu između grafa funkcije i rješenja kvadratne jednadžbe, te faktorizacije kvadratnog trinoma.

Definicija 21. (*vidjeti* [5] *str.* 36) *Kvadratna funkcija (polinom drugog stupnja) je funkcija* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *zadana formulom* $f(x) = ax^2 + bx + c$, *gdje su* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *koeficijenti takvi da je* $a \neq 0$.

Graf kvadratne funkcije je parabola $y = ax^2 + bx + c$. Njezin izgled ovisi o koeficijentima a, b, c. Kvadratni koeficijent a daje informaciju o tome na koju stranu je okrenuta parabola te o njezinoj širini. Linearni koeficijent b služi za određivanje položaja osi simetrije, te tjemena parabole. Konstantni koeficijent c određuje vertikalni pomak, tj. gdje parabola siječe os y (točka $(0, c)$).

Uvijek je dobro povezati matematiku s primjerima iz stvarnog života jer zanimljivi zadatci olakšavaju učenje i pospješuju dugoročno pamćenje.

Primjer 12. *Slika 6.1. grafički prikazuje približne mjere mosta Humber. Pronađi funkciju koja opisuje zadani graf.* (*vidjeti* [1] *str. 90*)



Slika 6.1: Mjere mosta Humber

Rješenje. Ako za ishodište koordinatnog sustava uzmemo središnju točku linije koja spaja dva stupa mosta, vrijedi da je $x = 0$ za $y = 30$, tj. tražena točka je $(0, 30)$. Uočimo da je ta točka ujedno i tjeme parabole, a os $x = 0$ je os simetrije parabole. Slijedi da je linearni koeficijent $b = 0$, odnosno parabola će imati kvadratnu funkciju oblika $y = ax^2 + c$. Kako vrijedi da je $x = 0$ za $y = 30$, iz $y = ax^2 + c$ zaključujemo da je konstantni koeficijent $c = 30$. Budući da je udaljenost dva stupa $2x = 1410$ metara, a njihova visina je $y = 155$ metara, rješavamo jednadžbu $155 = a705^2 + 30$, iz koje dobivamo da je $a = \frac{1}{4000}$. Dakle, kvadratna funkcija kojom možemo opisati parabolu mosta Humber je $y = \frac{1}{4000}x^2 + 30$.

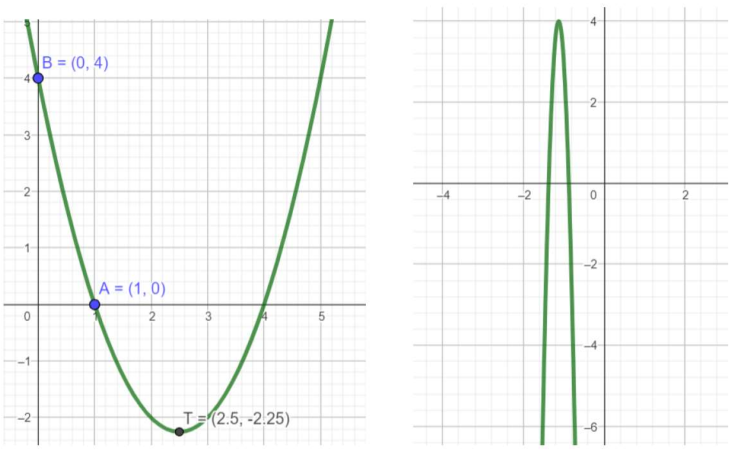
Pri rješavanju zadataka vezanih uz kvadratnu funkciju miskoncepcije u učenju otežavaju rješavanje. Poznavanje uobičajenih miskoncepcija može unaprijediti planiranje nastave, pomoći učenicima u razvijanju dubljeg razumijevanja te omogućiti precizniju procjenu njihovog napretka. U nastavku ćemo proći kroz neke primjere miskoncepcija.

Primjer 13. *Koje od sljedećih funkcija imaju isti graf funkcije kao funkcija* $f(x) = x^2 - 2x - 5$? *Objasnite svoj odgovor.*

1. $f_1(x) = 2x^2 - 4x - 10$,
2. $f_2(x) = 3x^2 - 6x - 15$,
3. *obje,*
4. *niti jedna od navedenih.*

Neki od učenika mogli bi zaokružiti jedan od prva tri odgovora. Učenici mogu za dvije različite funkcije tvrditi da imaju isti graf jer smatraju da će dijeljenjem zajedničkim faktorom dobiti polaznu funkciju. Drugi razlog može biti jer funkcije imaju iste nultočke, tj. točke presjeka s osi x. Naime, učenici shvaćaju kvadratnu funkciju kao kvadratnu jednadžbu.

Primjer 14. *U grafičkom prikazu Slika 6.2. (a) nacrtana je parabola. Točka $T(2.5, -2.25)$ je tjeme parabole. Točke $A(1,0)$ i $B(0,4)$ nalaze se na paraboli. Točka $C(0.5,2)$ je polovište dužine AB. Nalazi li se točka C na paraboli? Objasnite svoj odgovor.*



(a) (b)

Slika 6.2: Parabole

Učenici bi trebali ovaj zadatak riješiti tako da pronađu formulu funkcije koristeći zadane točke parabole, zatim uvrštavanjem koordinata točke C provjere nalazi li se ona na paraboli. Drugi način je da učenici zaključe ako se točke A, B, C nalaze na istom pravcu, a točke A i B su točke parabole pa zbog njezine zakrivljenosti C nikako ne može biti na paraboli, jer ona nije linearna. Međutim, učenici mogu pripisati linearnost kvadratnoj funkciji pa zanemariti njezinu zakrivljenost na umanjenom grafičkom prikazu. Jedan od razloga prepisivanja linearnosti kvadratnoj funkciji proizlazi iz općenitog zapisa kvadratne $(f(x) = ax^2 + bx + c)$ i linearne funkcije $(f(x) = ax + c)$. Naime, učenici zapis iz kvadratne funkcije $bx + c$ poistovjećuju sa zapisom $ax + c$ linearne funkcije, pa joj zato prepisuju linearnost. Drugi razlog je sklonost korištenja ravnih linija, umjesto zakrivljenih, za spajanje točaka koje pripadaju paraboli kada crtaju/skiciraju parabolu.

Primjer 15. *Ako se parabola sa Slike 6.2. (b) produži u beskonačnost, hoće li ikad presjeći os y?*

Cilj zadatka je da učenici koristite svoje konceptualno razumijevanje općih karakteristika kvadratnih funkcija, posebice beskonačne domene kvadratne funkcije. Za svaku x-koordinatu u paraboli postoji y-koordinata, a beskonačno proširenje parabole implicira da njezina domena uključuje slučaj kada je x jednak nuli. Stoga, parabola mora sjeći y-os. Međutim, neki učenici grafom smatraju samo dio prikazan na slici. Na taj način ignoriraju opće karakteristike funkcije, tj. da njene vrijednosti mogu težiti prema beskonačnosti, jer je domena funkcije cijeli $\mathbb{R}$ i gledaju samo ono što je prikazano na slici.

Još jedna dosta zastupljena miskoncepcija je ta da učenici gledaju samo jednu koordinatu kad određuju neke specifične točke funkcije. Primjerice, tvrde kako funkcije $f(x) = ax^2 + bx + 2$ i $f(x) = ax^2 + bx + 9$ imaju isto tjeme jer je koordinata x jednaka. Kao razlog navode da je os simetrije kod obje parabole jednaka, ne uzimajući u obzir y-koordinatu.

Miskoncepcije je vrlo važno uzeti u obzir prilikom poučavanja učenika. Iskusni nastavnici, iako posjeduju izvrsno znanje o predmetu, ali ne uzimaju u obzir razmišljanja svojih učenika o tom predmetu, često imaju poteškoća u podučavanju sadržaja.

Literatura

[1] D. French, *Teaching and learning algebra*, Bookcraft (Bath) Ltd, Great Britain, 2002.

[2] I. M. Gelfand, E.G. Glagoleva, E.E. Shnol, *Functions and graphs*, Quinn-Woodbine. Woodbine. New Jersey., 1990.

[3] D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika I* , STUDIO HS Internet d.o.o., Osijek, 2017.

[4] R. Mayer, *Calculus I.*, dostupno na https://people.reed.edu/~mayer/math111.html/math111.pdf.

[5] J. Nicholas, J. Hunter, J. Hargreaves, *Functions and graphs*, dostupno na https://www.sydney.edu.au/content/dam/students/documents/mathematics-learning-centre/functions-and-graphs.pdf

[6] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika I*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

[7] K. Wortman, *Graph Transformations*, dostupno na https://www.math.utah.edu/~wortman/1050-text-gt.pdf.

[8] Ministarstvo znanosti i obrazovanja, *Kurikulumi nastavnih predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije i Matematika za srednje strukovne škole na razini 4.2*, dostupno na https://skolazazivot.hr/wp-content/uploads/2020/07/MAT_kurikulum_1_71.pdf.

Sažetak

U ovom diplomskom radu istražuju se koncepti i svojstva realne funkcije realne varijable. Definira se pojam funkcije i karakteristike poput injekcije, surjekcije i bijekcije te prikaza njihovih grafova. Nadalje, analiziraju se svojstva funkcija kao što su parnost, periodičnost, monotonost i omeđenost kroz primjere koji ilustriraju njihov utjecaj na grafički prikaz. Proučava se metodologija crtanja grafova funkcija, analizira se graf inverzne funkcije, rješavanje jednadžbi pomoću grafičkog prikaza te transformacije grafa funkcija. Također, rad se bavi integracijom funkcija u Kurikulum nastavnog predmeta Matematika kroz osnovnoškolsko i srednjoškolsko obrazovanje, s naglaskom na primjere i miskoncepcije vezane uz kvadratnu funkciju.

Ključne riječi

funkcija, graf funkcije, inverz funkcije, transformacije grafa funkcije, svojstva funkcije.

Functions and Their Graphs

Summary

This master's thesis explores the concepts and properties of real functions of a real variable. It defines the concept of a function and characteristics such as injectivity, surjectivity, and bijectivity, as well as the representation of their graphs. Furthermore, it analyzes properties such as parity, periodicity, monotonicity, and boundedness through examples illustrating their impact on graphical representation. The methodology for drawing function graphs is examined, along with the analysis of the inverse function graph, solving equations using graphical representations, and transformations of function graphs. Additionally, the thesis addresses the integration of functions into the Mathematics curriculum in elementary and secondary education, with a focus on examples and misconceptions related to quadratic functions.

Keywords

function, function graph, inverse function, transformations of function graph, function properties.

Životopis

Rođena sam 13. kolovoza 1995. godine u Slavonskom Brodu. Pohađala sam Osnovnu školu Josip Kozarac u Soljanima, a zatim sam upisala I. gimnaziju u Osijeku. Nakon završenog srednjoškolskog obrazovanja upisala sam preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku u Osijeku, sada Fakultet primijenjene matematike i informatike. Preddiplomski studij završavam sa završnim radom na temu "Osnovni teorem o reziduumima i primjena na računanje realnih integrala". Godine 2022. upisala sam diplomski sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na istom fakultetu.