Strateške igre

Rechner, Matej

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike

Sveučilišni diplomski studij matematike
modul: financijska matematika i statistika

Strateške igre

Diplomski rad

Mentor:
prof. dr. sc. Dragana Jankov Maširević

Student:
Matej Rechner

Osijek, 2024.

Sadržaj

1 Uvod **1**

2 Uvod u teoriju odlučivanja **3**
- 2.1 Osnovni pojmovi 3
- 2.2 Ordinalna korisnost 4
- 2.3 Linearna korisnost 7

3 Strateške igre **13**
- 3.1 Uvod u strateške igre 13
- 3.2 Nashov ekvilibrij u strateškim igrama 15
- 3.3 Igre nulte sume za dva igrača 19
- 3.4 Miješane strategije u konačnim igrama 22
- 3.5 Bimatrične igre 24
- 3.6 Matrične igre 26

Literatura **31**

Sažetak **33**

Summary **35**

Životopis **37**

1 | Uvod

Bez obzira da li bismo htjeli više pobjeđivati u monopoliju ili poboljšati interakcije s drugim ljudima, kooperativno ili kompetitivno, teorija igara nam može pomoći. Kao studija matematičkih modela u strateškim situacijama, teorija igara ima široku primjenu u socijalnim znanostima, ekonomiji, logici, računarstvu i dalje. Počevši od igara nulte sume za dva igrača, teorija igara se kasnije proširila na proučavanje igara ne-nul sume i na brojne druge igre, uključujući ponovljene igre, evolucijsku teoriju igara, kooperativne igre i brojne druge.

Moderna teorija igara počinje s idejom ekvilibrija miješane strategije u igri nulte sume za dva igrača i njegovim dokazom koji je pružio John von Neumann. Nakon toga, von Neumann je 1944. godine napisao "Theory of Games and Economic Behavior" [5] zajedno sa Oskarom Morgensternom. Druga verzija tog rada je uvela aksiomatsku teoriju očekivane korisnosti, koja je omogućila statističarima i ekonomistima da promatraju donošenje odluka u uvjetima nesigurnosti. Nakon toga, teorija igara se razvila u 1950-ima, a u 1970-ima se široko koristila u objašnjavanju evolucije.

U ovom radu će nam osnova biti teorija odlučivanja, jer se ona bavi donošenjem odluka u kontekstu racionalnog pojedinca nasuprot nesigurne prirode, što ćemo koristiti da dalje promatramo racionalnog pojedinca nasuprot drugog racionalnog pojedinca. Najprije ćemo definirati neke osnovne pojmove, zatim ćemo proučiti najprije ordinalnu te potom linearnu korisnost. Nakon toga ćemo se baviti strateškim igrama i Nashovim ekvilibrijima u njima. Nadalje ćemo raditi sa igrama nulte sume, koje ćemo proširiti miješanim strategijama (barem u konačnim igrama). Za kraj, promatramo takve igre u obliku pogodnom za analizu, kao što su bimatrične i matrične igre.

2 | Uvod u teoriju odlučivanja

2.1 Osnovni pojmovi

U ovom poglavlju napravit ćemo kratak uvod u matematičku teoriju odlučivanja za probleme sa jednim *donositeljem odluke*, tj. u jedan dio *teorije odlučivanja*. S time ćemo postaviti osnovu za razvoj matematičke teorije odlučivanja za situacije gdje nekoliko donositelja odluke imaju međusobne interakcije, tj. osnovu za razvoj teorije igara.
Binarne relacije su neke od osnovnih elemenata teorije odlučivanja. Ako je dan skup A, svaki podskup R od $A \times A$ je binarna relacija na A. Za sve $a, b \in A$, označavamo $(a, b) \in R$ kao aRb, te slično označavamo $(a, b) \notin R$ kao $a\not{R}b$.
Teorija odlučivanja, kako bi ime sugeriralo, se bavi problemima odlučivanja. U problemu odlučivanja imamo *donositelja odluke* koji mora odabrati jednu ili više *alternativa* iz skupa A. Skup alternativa se najčešće uzima kao konačan skup, iako će većina tvrdnji u ovom radu vrijediti i za beskonačan skup alternativa. Donositelj odluke ima *preferencije* na A, koje su obično modelirane preko binarnih relacija $\succeq$ na $A \times A$, zvanih *relacije preferencije* u ovom kontekstu. Za sve $a, b \in A, a \succeq b$ se interpretira kao "donositelj odluke ili preferira a nad b ili je indiferentan između a i b". Dva standardna zahtjeva na $\succeq$ su:

1. $\succeq$ je *kompletna*, tj. za sve $a, b \in A$, vrijedi $a \succeq b$ ili $b \succeq a$ ili oboje,

2. $\succeq$ je *tranzitivna*, tj. za sve $a, b, c \in A$, ako $a \succeq b$ i $b \succeq c$, onda $a \succeq c$.

Kompletna i tranzitivna binarna relacija na skupu A naziva se *slaba preferencija* na A.

Definicija 1. ***Problem odlučivanja*** *je par $(A, \succeq)$, gdje je A skup alternativa, a relacija $\succeq$ je* ***slaba preferencija*** *na A.*

Korisno je uvesti još dvije binarne relacije za svaki dani problem odlučivanja $(A, \succeq)$: *stroga preferencija* $\succ$ i *indiferentnost* $\sim$. One su definirane za sve $a, b \in A$, na sljedeći način

- $a \succ b$ ako i samo ako $b \not\succeq a$,

- $a \sim b$ ako i samo ako $a \succeq b$ i $b \succeq a$.

Postoje i druga standardna svojstva koja su bitna kada radimo sa binarnim relacijama te ćemo ih u nastavku pobliže upoznati. Binarna relacija R na skupu A je:

- *refleksivna* ako za svaki $a \in A$, vrijedi aRa,
- *simetrična* ako za sve $a, b \in A$, aRb implicira bRa,
- *asimetrična* ako za sve $a, b \in A$, aRb implicira $b\not{R}a$,
- *antisimetrična* ako za sve $a, b \in A$, aRb i bRa zajedno impliciraju $a = b$.

Sljedeća propozicija prezentira neka bitna svojstva relacije stroge preferencije i indiferentnosti povezane sa problemom odlučivanja.

Propozicija 1. *Neka je $(A, \succeq)$ problem odlučivanja. Tada vrijedi:*

1. *stroga preferencija $\succ$ je asimetrična i tranzitivna,*
2. *indiferentnost $\sim$ je* relacija ekvivalencije, *tj. refleksivna je, simetrična i tranzitivna.*

Nadalje, za sve $a, b, c \in A$, vrijedi:

3. *ako $a \succ b$ i $b \succ c$, onda $a \succ c$,*
4. *ako $a \sim b$ i $b \sim c$, onda $a \sim c$,*
5. *ili $a \succ b$ ili $b \succ a$ ili $a \sim b$ (vrijedi jedno i samo jedno).*

Dokaz ovog teorema može se pronaći u [2].
Nadalje pokazujemo da, za svaki problem odlučivanja $(A, \succeq)$, možemo pridružiti jedan novi čija je slaba preferencija antisimetrična. Za svaki $a \in A$, neka je

- $I(a) := \{b \in A : b \sim a\}$. Takav skup nazivamo klasa indiferentnosti.

Uzmimo $(A/\sim, \succeq_a)$, gdje je $A/\sim := \{I(a) : a \in A\}$ particija od A definirana preko $\sim$, te je $\succeq_a$ dana za sve $I, J \in A/\sim$, sa

- $I \succeq_a J$ ako i samo ako, za svaki $a \in I$ i svaki $b \in J$, vrijedi $a \succeq b$.

Dakle $(A/\sim, \succeq_a)$ je dobro definiran problem odlučivanja (u smislu da je $\succeq_a$ kompletna i tranzitivna), te također je $\succeq_a$ antisimetrična.
Rad sa relacijama preferencije generalno može biti dosta težak. Zbog toga, često se koriste neke alternativne reprezentacije. U nastavku ovog poglavlja ćemo proučavati dvije takve, koje se nazivaju ordinalna korisnost i linearna korisnost.

2.2 Ordinalna korisnost

Definicija 2. *Neka je $(A, \succeq)$ problem odlučivanja.* ***Funkcija korisnosti*** *za relaciju $\succeq$ je funkcija $u : A \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava da za sve $a, b \in A$ vrijedi $a \succeq b$ ako i samo ako $u(a) \geq u(b)$.*

Primijetimo da je jednak uvjet za u da bude funkcija korisnosti za relaciju $\succeq$ sljedeći: za sve $a, b \in A$, $a \succ b$ ako i samo ako $u(a) > u(b)$. Osim toga, ako je u funkcija korisnosti za relaciju $\succeq$, onda za sve $a, b \in A$, $a \sim b$ ako i samo ako $u(a) = u(b)$.
Postavlja se pitanje, pod kojim uvjetom se može slaba preferencija problema odlučivanja prikazati pomoću funkcije korisnosti? Sljedeći rezultat daje odgovor.

Propozicija 2. *Neka je A prebrojiv skup i $(A, \succeq)$ problem odlučivanja. Postoji funkcija korisnosti za relaciju $\succeq$.*

Dokaz. S obzirom da je A prebrojiv skup, imamo $A = \{a_1, a_2, ...\}$. Za sve $i, j \in \mathbb{N}$, definiramo

$$h_{ij} := \begin{cases} 1, a_i, a_j \in A \text{ i } a_i \succ a_j \\ 0, \text{inače.} \end{cases}$$

Za svaki $a_i \in A$, definiramo $u(i) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} h_{ij}$. S obzirom da je $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} < \infty$, u je dobro definirana i štoviše, ona je funkcija korisnosti za relaciju $\succeq$. □

Nadalje, pripremamo potrebne tvrdnje za nužan i dovoljan uvjet postojanja funkcije korisnosti za danu relaciju preferencije.

Definicija 3. *Neka je $(A, \succeq)$ problem odlučivanja. Skup $B \subset A$ je **istovremeno uređen i gust** (nadalje u radu ćemo pisati **uređeno gust**) u A ako, za sve $a_1, a_2 \in A$ gdje je $a_2 \succ a_1$, postoji $b \in B$ takav da $a_2 \succeq b \succeq a_1$.*

Definicija 4. *Neka je $(A, \succeq)$ problem odlučivanja. Neka su $a_1, a_2 \in A$, tako da $a_2 \succ a_1$. Tada, (a_1, a_2) je **praznina** ako za svaki $b \in A$ vrijedi ili $b \succeq a_2$ ili $a_1 \succeq b$. Ako je (a_1, a_2) praznina, onda su a_1 i a_2 **ekstremi praznine** (pri čemu je "viši ekstrem" supremum skupa, a "niži ekstrem" infimum skupa.). Neka je A^* skup svih ekstrema praznine od A.*

Lema 1. *Neka je $(A, \succeq)$ problem odlučivanja. Pretpostavimo da je $\succeq$ antisimetrična.*

i) Ako postoji prebrojiv skup $B \subset A$ koji je uređeno gust u A, onda je A^* prebrojiv.

ii) Ako postoji funkcija korisnosti za relaciju $\succeq$, onda je A^* prebrojiv.

Dokaz. i) Neka su A_1^* i A_2^* skupovi supremuma i infimuma praznina, te neka je $B \subset A$ prebrojiv uređeno gust skup u A. Ako je (a_1, a_2) praznina, kako je $\succeq$ antisimetrična, onda postoji $b \in B$ takav da je $b = a_1$ ili $b = a_2$. Stoga, postoji bijekcija iz $A_1^* \backslash B$ u podskup od B (preslikavamo svaki infimum a_1 koji nije u B u odgovarajući supremum $a_2 = b$, koji mora biti u B). Stoga, $A_1^* \backslash B$ je prebrojiv skup. Analogno $A_2^* \backslash B$ je također prebrojiv skup. Dakle, $A^* = (A_1^* \backslash B) \cup (A_2^* \backslash B) \cup (A^* \cap B)$ je prebrojiv skup.

ii) Neka je u funkcija korisnosti za relaciju $\succeq$. Primijetimo, da za svaku prazninu (a_1, a_2), postoji $q \in \mathbb{Q}$ takav da $u(a_2) > q > u(a_1)$. Stoga, A^* je prebrojiv skup.

□

Teorem 1. *Neka je $(A, \succeq)$ problem odlučivanja i pretpostavimo da je $\succeq$ antisimetrična. Tada postoji funkcija korisnosti za relaciju $\succeq$ onda i samo onda ako postoji prebrojiv skup $B \subset A$ koji je uređeno gust u A.*

Dokaz. Neka je $B \subset A$ prebrojiv uređeno gust u A. Kažemo da je a prvi (zadnji) element u A ako ne postoji $\bar{a} \in A$, $\bar{a} \neq a$, takav da $\bar{a} \succeq a$ ($a \succeq \bar{a}$). Primijetimo da prvi ili zadnji elementi u A ne moraju postojati, no ako postoje, jedinstveni su.

Neka je $\bar{B}$ skup koji sadrži B i prvi i zadnji element od A (ako postoji). Prema lemi 1, A^* je prebrojiv i stoga, skup $B^* = \bar{B} \cup A^*$ je prebrojiv. Prema propoziciji 2, postoji funkcija korisnosti $\bar{u}$ za relaciju $\succeq$ u B^*. Za svaki $a \in A$, definiramo $u(a)$ na sljedeći način:

$$u(a) := \sup\{\bar{u}(b) : b \in B^*, a \succeq b\}.$$

Sada pokazujemo da je u dobro definirana. Neka je $a \in A$. Ako $a \in B^*$, onda $u(a) = \bar{u}(a)$. Ako $a \notin B^*$, onda postoje $a_1, a_2 \in A$ takvi da $a_2 \succeq a \succeq a_1$. S obzirom da je B uređeno gust u A i $a \notin B^*$, onda postoje $b_1, b_2 \in B$ takvi da $a_2 \succeq b_2 \succ a \succ b_1 \succeq a_1$. Stoga je skup $\{\bar{u}(b) : b \in B^*, a \succeq b\}$ neprazan ($\bar{u}(b_1)$ je u njemu) i omeđen je od gore (sa $\bar{u}(b_2)$), pa onda ima supremum. Dakle, za svaki $a \in A$, $u(a)$ je dobro definiran.
Sada trebamo provjeriti da je u funkcija korisnosti za relaciju $\succeq$ u A. Neka su $a_1, a_2 \in A$ takvi da $a_2 \succeq a_1$. Tvrdimo da postoje $b_1, b_2 \in B^*$ takvi da $a_2 \succeq b_2 \succ b_1 \succeq a_1$. Ako $a_1, a_2 \in B^*$, onda $b_1 = a_1$ i $b_2 = a_2$. Ako $a_1 \notin B^*$, s obzirom da je B uređeno gust u A, onda postoji $b \in B$ takav da $a_2 \succeq b_2 \succ a_1$. Kako (a_1, b_2) ne može biti praznina, postoji $\tilde{a} \in A$ takav da $b_2 \succ \tilde{a} \succ a_1$. Stoga, postoji $b_1 \in B$ takav da $\tilde{a} \succeq b_1 \succ a_1$. Ako $a_2 \notin B^*$, možemo doći do analognog zaključka. Kako je $u(a_2) \geq \bar{u}(b_2) > \bar{u}(b_1) \geq u(a_1)$, onda je $u(a_2) > u(a_1)$. Ovo drugo također implicira da, za sve $a_1, a_2 \in A$ za koje vrijedi $u(a_2) > u(a_1)$, imamo $a_2 \succ a_1$ (prisjetimo se da je $\succeq$ antisimetrična).
Dokažimo sada drugi smjer. Pretpostavimo da postoji funkcija korisnosti u za relaciju $\succeq$ u A. Neka je $\bar{\mathbb{Q}}^2$ podskup od $\mathbb{Q}^2$ definiran sa:

$$\bar{\mathbb{Q}}^2 := \{(q_1, q_2) \in \mathbb{Q}^2 : \text{ postoji } a \in A \text{ takav da } q_2 > u(a) > q_1\}.$$

Neka je $g : \mathbb{Q}^2 \to A$ preslikavanje takvo da, za svaki par $(q_1, q_2) \in \mathbb{Q}^2$, imamo $q_2 > u(g(q_1, q_2)) > q_1$. Skup $\bar{B} := g(\bar{\mathbb{Q}}^2)$ je prebrojiv pa prema lemi 1 slijedi da je skup $B := A^* \cup \bar{B}$ prebrojiv. Tvrdimo da je B uređeno gust u A. Neka su $a_1, a_2 \in A$ takvi da je $a_2 \succ a_1$ i pretpostavimo da (a_1, a_2) nije praznina (inače bi uzeli $b = a_1$ ili $b = a_2$). Nadalje, imamo $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ i $\bar{a} \in A$ takav da $a_2 \succ \bar{a} \succ a_1$ i $u(a_2) > q_2 > u(\bar{a}) > q_1 > u(a_1)$. Stoga, $(q_1, q_2) \in \mathbb{Q}^2$ i mora postojati $b \in B$ takav da $q_2 > u(b) > q_1$, pa onda vrijedi $a_2 \succ b \succ a_1$. Dakle, B je uređeno gust u A. □

Korolar 1. *Neka je $(A, \succeq)$ problem odlučivanja. Onda postoji funkcija korisnosti za relaciju $\succeq$ ako i samo ako postoji prebrojiv skup $B \subset A$ koji je uređeno gust u A.*

Dokaz. Pogledajmo problem odlučivanja $(A/\sim, \succeq_a)$ i prisjetimo se da je $\succeq_a$ antisimetrična. Onda postoji funkcija korisnosti za relaciju $\succeq$ ako i samo ako postoji funkcija korisnosti za relaciju $\succeq_a$. Lako je provjeriti da postoji prebrojiv podskup od A koji je uređeno gust u A (s obzirom na $\succeq$) ako i samo ako postoji prebrojiv podskup od $A/\sim$ koji je uređeno gust u $A/\sim$ (s obzirom na $\succeq_a$). Stoga, rezultat slijedi iz teorema 1. □

Da završimo ovo poglavlje, prikazat ćemo rezultat koji tvrdi da je funkcija korisnosti za relaciju slabe preferencije jedinstvena do na strogo rastuće transformacije.

Propozicija 3. *Neka je $(A, \succeq)$ problem odlučivanja i pretpostavimo da je u funkcija korisnosti za relaciju $\succeq$. Tada je $\bar{u}$ druga funkcija korisnosti za relaciju $\succeq$ ako i samo ako postoji strogo rastuća funkcija $f : u(A) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da, za svaki $a \in A$, $\bar{u}(a) = f(u(a))$.*

Prijašnji rezultat prikazuje zašto je ovo poglavlje nazvano ordinalna korisnost. Unutar trenutnog okvira, za dani problem odlučivanja $(A, \succeq)$, za danu funkciju korisnosti za relaciju $\succeq$ i par alternativa $a, b \in A$, razlika $|u(a) - u(b)|$ je beznačajna, tj. $u(a) - u(b)$ nam govori, preko svog predznaka, relativni poredak od a i b i ništa više. U idućem poglavlju ćemo proučiti okruženje u kojem će, uz nekoliko dodatnih pretpostavki, funkcije korisnosti sadržavati kvantitativne informacije o intenzitetu preferencija.

2.3 Linearna korisnost

U ovom poglavlju pobliže ćemo se upoznati sa *konveksnim problemima odlučivanja*. Konveksni problem odlučivanja je problem odlučivanja $(X, \succeq)$ takav da je X konveksan podskup konačnodimenzionalnog realnog vektorskog prostora.

Definicija 5. *Neka je $(X, \succeq)$ konveksan problem odlučivanja.* ***Linearna funkcija korisnosti*** *za relaciju $\succeq$ je funkcija $\bar{u} : X \to \mathbb{R}$ koja za svaki $x, y \in X$, zadovoljava sljedeća dva uvjeta:*

i) $x \succeq y$ *ako i samo ako* $\bar{u}(x) \geq \bar{u}(y)$, *tj.* $\bar{u}$ *je funkcija korisnosti za relaciju* $\succeq$,

ii) *za svaki* $t \in [0, 1]$, $\bar{u}(tx + (1-t)y) = t\bar{u}(x) + (1-t)\bar{u}(y)$.

Nastavljajući se na prethodno poglavlje, linearna funkcija korisnosti ne otkriva samo relativni poredak svakog para alternativa, nego i prenosi informaciju o tome koliko su različite. U ovom poglavlju opisat ćemo pretpostavke koje konveksni problem odlučivanja mora zadovoljiti kako bi se njegova relacija preferencije mogla prikazati preko linearne funkcije korisnosti.
Navedimo najprije dva svojstva koja će morati zadovoljiti relacija preferencije povezana sa konveksnim problemom odlučivanja.

Definicija 6. *Neka je $(X, \succeq)$ konveksan problem odlučivanja. Kažemo da je relacija $\succeq$* ***nezavisna*** *ako, za sve $x, y, z \in X$ i za svaki $t \in (0, 1]$, vrijedi $x \succeq y$ ako i samo ako $tx + (1-t)z \succeq ty + (1-t)z$.*

Definicija 7. *Neka je $(X, \succeq)$ konveksan problem odlučivanja. Kažemo da je relacija $\succeq$* ***neprekidna*** *ako, za sve $x, y, z \in X$ takve da je $x \succeq y \succeq z$, postoji $t \in (0, 1)$ za koji je $y \sim tx + (1-t)z$.*

Oba prethodna svojstva su jasna, pa nećemo dodatno komentirati njihovu interpretaciju. Primijetimo da, u kontekstu nezavisnosti, vrijedi $t \neq 0$, inače definicija ne bi imala smisla.
Nadalje, pokazat ćemo da su nezavisnost i neprekidnost nužni i dovoljni uvjeti za postojanje linearne funkcije korisnosti. Ustvari, jednostavno se provjeri da ako u konveksnom problemu odlučivanja $(X, \succeq)$ postoji linearna funkcija korisnosti za relaciju $\succeq$, onda je $\succeq$ nezavisna i neprekidna. Dovoljnost, s druge strane, nije

tako očita i trebaju nam neki pomoćni rezultati. Prvo primijetimo da ako je $\succeq$ nezavisna, onda izraz u definiciji nezavisnosti vrijedi i ako zamijenimo $\succeq$ sa $\succ$ ili $\sim$.

Propozicija 4. *Neka je $(X, \succeq)$ konveksan problem odlučivanja. Pretpostavimo da je relacija $\succeq$ nezavisna i da postoje $x, y \in X$ takvi da je $y \succ x$. Nadalje, neka su $s, t \in [0,1]$, $s > t$. Tada vrijedi, $sy + (1-s)x \succ ty + (1-t)x$.*

Dokaz. Prvo, primijetimo da je $t < 1$. Kako je $\succeq$ nezavisna, imamo

$$\frac{s-t}{1-t}y + \frac{1-s}{1-t}x \succ \frac{s-t}{1-t}x + \frac{1-s}{1-t}x = x.$$

S druge strane,

$$sy + (1-s)x = ty + (1-t)\left(\frac{s-t}{1-t}y + \frac{1-s}{1-t}x\right).$$

Koristeći nezavisnost od $\succeq$, ponovno,

$$ty + (1-t)\left(\frac{s-t}{1-t}y + \frac{1-s}{1-t}x\right) \succ ty + (1-t)x,$$

što vodi do tražene tvrdnje. □

Korolar 2. *Neka je $(X, \succeq)$ konveksan problem odlučivanja. Pretpostavimo da je $\succeq$ nezavisna i neprekidna. Onda, za sve $x, y, z \in X$ takve da je $x \succ y \succ z$, postoji **jedinstven** $t \in (0,1)$ takav da je $y \sim tx + (1-t)z$.*

Spremni smo dokazati glavni rezultat vezan uz linearne funkcije korisnosti.

Teorem 2. *Neka je $(X, \succeq)$ konveksan problem odlučivanja. Pretpostavimo da je $\succeq$ nezavisna i neprekidna. Tada, postoji linearna funkcija korisnosti $\bar{u}$ za relaciju $\succeq$. Štoviše, funkcija $\bar{u}$ je jedinstvena do na pozitivne afine transformacije, tj. $\hat{u}$ je druga funkcija korisnosti za relaciju $\succeq$ ako i samo ako postoje $a \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{R}$, takve da, za svaki $x \in X$, $\hat{u}(x) = a\bar{u}(x) + b$.*

Dokaz. Za sve $x, y \in X$, $x \sim y$, rezultat trivijalno vrijedi (uzmimo $r \in \mathbb{R}$ i za svaki $x \in X$, definiramo $u(x) := r$). Stoga, pretpostavimo da imamo $x_1, x_2 \in X$ takve da $x_2 \succ x_1$. Neka je $[x_1, x_2] := \{x \in X : x_2 \succeq x \succeq x_1\}$ i definiramo
$u : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ sa:

$$u(x) := \begin{cases} 0, & x \sim x_1 \\ 1, & x \sim x_2 \\ \text{jedinstven } t \in (0,1) \text{ td. } x \sim tx_2 + (1-t)x_1, & \text{inače,} \end{cases}$$

pri čemu kod izbora prethodnog parametra t moramo paziti da je zadovoljeno svojstvo $i)$ iz definicije 5.
Prema korolaru 2, u je dobro definirana. Prema definiciji 5, u je funkcija korisnosti

za relaciju $\succeq$ na $[x_1, x_2]$. Tvrdimo da je u linearna. Neka su $x, y \in [x_1, x_2]$ i $t \in [0, 1]$. S obzirom da je $\succeq$ nezavisna, onda vrijedi

$$tx + (1-t)y \sim t(u(x)x_2 + (1-u(x))x_1) + (1-t)(u(y)x_2 + (1-u(y))x_1),$$

pri čemu je desna strana jednaka

$$(tu(x) + (1-t)u(y))x_2 + (t(1-u(x)) + (1-t)(1-u(y)))x_1.$$

Neka je $\bar{t} := tu(x) + (1-t)u(y)$. Tada, imamo $tx + (1-t)y \sim \bar{t}x_2 + (1-\bar{t})x_1$, stoga, $u(tx + (1-t)y))\bar{t} = tu(x) + (1-t)t(y)$. Sada ćemo prikazati jedinstvenost u na $[x_1, x_2]$. Svaka pozitivna afina transformacija od u je linearna korisnost za relaciju $\succeq$. Obratno, neka je $\bar{u}$ linearna funkcija korisnosti za relaciju $\succeq$. Definiramo još jednu funkciju korisnosti, $\tilde{u}$, koja je također linearna funkcija korisnosti za relaciju $\succeq$. Za svaki $x \in [x_1, x_2]$, neka je

$$\tilde{u}(x) := \frac{\bar{u}(x)}{\bar{u}(x_2) - \bar{u}(x_1)} - \frac{\bar{u}(x_1)}{\bar{u}(x_2) - \bar{u}(x_1)}. \tag{2.1}$$

Kako je $\tilde{u}(x_2) = 1$ i $\tilde{u}(x_1) = 0$, imamo da je, za svaki $x \in [x_1, x_2]$,

$$\tilde{u}(x) = \tilde{u}(u(x)x_2 + (1-u(x))x_1) = u(x)\tilde{u}(x_2) + (1-u(x))\tilde{u}(x_1) = u(x).$$

Ako raspišemo $\tilde{u}$ u (2.1), dobivamo $\bar{u}(x) = (\bar{u}(x_2) - \bar{u}(x_1))u(x) + \bar{u}(x_1)$, tj. $\bar{u}$ je pozitivna afina transformacija od u.
Da završimo dokaz trebamo proširiti u na cijeli skup X. Neka je $x \in X \backslash [x_1, x_2]$, te $[y_1, y_2] \subset X$ takav da $x \in [y_1, y_2]$ i $[x_1, x_2] \subset [y_1, y_2]$. Neka je u^* linearna funkcija korisnosti za relaciju $\succeq$ na $[y_1, y_2]$ definirano kao u iznad, onda, za svaki $y \in [y_1, y_2]$, definiramo $\bar{u}(y)$ sa:

$$\bar{u}(y) := \frac{u^*(y) - u^*(x_1)}{u^*(x_2) - u^*(x_1)}.$$

Tako definirana, $\bar{u}$ je linearna funkcija korisnosti za relaciju $\succeq$ na $[y_1, y_2]$ i stoga na $[x_1, x_2]$. Primijetimo da je $\bar{u}(x_2) = u(x_2) = 1$ i $\bar{u}(x_1) = u(x_1) = 0$. Onda, prema *jedinstvenosti u*, u i $\bar{u}$ se podudaraju na $[x_1, x_2]$. Sada ćemo pokazati da je proširenje od u na X nezavisno od odabranoga *intervala*, tj. nezavisno od $[y_1, y_2]$. Neka je $[z_1, z_2]$ različit od $[y_1, y_2]$, takav da $x \in [z_1, z_2]$ i $[x_1, x_2] \subset [z_1, z_2]$. Neka je $\hat{u}$ proširenje od u na $[z_1, z_2]$ definirano kao iznad. Pretpostavimo, bez smanjenja općenitosti, da je $x_1 \succ x$. Onda su $\bar{u}$ i $\hat{u}$ linearne funkcije korisnosti na $[x, x_2]$ sa jednakim vrijednostima u x_1 i x_2. Stoga, one su jednake na $[x, x_2]$. Dakle, definiramo $u(x) := \bar{u}(x)$. (Slučaj $x \succ x_2$ je analogan, ali se $[x, x_2]$ zamjenjuje sa $[x_1, x]$) Da je u linearna funkcija korisnosti na X, primijetimo da, za sve $x, y \in X$, u je linearna funkcija korisnosti na $[\bar{x}, \bar{y}]$ i $[x_1, x_2] \subset [\bar{x}, \bar{y}]$. Konačno, jedinstvenost na X se može provjeriti na isti način kao jedinstvenost na $[x_1, x_2]$ (kada definiramo novu funkciju $\bar{u}$, također imamo da, za svaki $x \notin [x_1, x_2]$, $\tilde{u}(x) = u(x)$). □

Vrijedi napomenuti razliku između izjave jedinstvenosti u propoziciji 3 i u onoj unutar teorema 2. U izjavi unutar teorema 2, za danu linearnu funkciju korisnosti

za relaciju $\succeq$ koja je dio problema odlučivanja $(X, \succeq)$, moramo napraviti veću restrikciju na vrstu rastućih transformacija koje se smiju primijeniti na funkciju korisnosti.
Za daljnju analizu će nam trebati definicija lutrije, pa ju navodimo ovdje.

Definicija 8. ***Lutrija*** *je vjerojatnosna distribucija*

$$l = \langle x_1, a_1; x_2, a_2; ...; x_n, a_n \rangle,$$

gdje s $x_i \geq 0$, *označavamo vjerojatnost izabiranja alternative (dobivanja vrijednosti)* a_i, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ *te vrijedi* $\sum_{i=1}^{n} x_n = 1$.

Linearna korisnost igra veliku ulogu u teoriji igara zato što je teoretska podloga koja omogućava definiranje miješanih strategija (vidi poglavlje 3.4). Kada igrač odabere miješanu strategiju, on izabire lutriju nad ostatkom njegovog skupa strategija, te je stoga rezultat njegovog izbora nasumičan. To znači, da bismo definirali miješanu strategiju, trebamo znati kako donositelji odluke stvaraju njihove preferencije u prisustvu rizika, pa će stoga linearna korisnost igrati veliku ulogu. Sada ćemo objasniti zašto je tako.
Neka je A skup alternativa te neka je ΔA skup lutrija na A. Formalno,

$$\Delta A := \{x : A \to [0, 1] : \sum_{a \in A} x(a) = 1\};$$

to jest, ΔA je skup vjerojatnosnih distribucija na A. Za svaki $a \in A$, neka je $e_a \in \Delta A$ lutrija definirana sa $e_a(a) := 1$ i za svaki $\bar{a} \in A \backslash \{a\}$, $e_a(\bar{a}) = 0$. Koncept *von Neumann i Morgenstern funkcije korisnosti* je posebno koristan za konveksne probleme odlučivanja čiji je skup alternativa oblika ΔA za neki A. Uvodimo ovaj koncept u sljedećoj definiciji.

Definicija 9. *Neka je* $(\Delta A, \succeq)$ *konveksan problem odlučivanja. Funkcija* $u : A \to \mathbb{R}$ *je* ***von Neumann i Morgenstern funkcija korisnosti*** *za relaciju* $\succeq$ *ako, za sve* $x, y \in \Delta A$,

$$x \succeq y \Leftrightarrow \sum_{a \in A} u(a)x(a) \geq \sum_{a \in A} u(a)y(a).$$

Glavna prednost von Neumann i Morgenstern funkcija korisnosti je da su one definirane na A, ne na ΔA, te one predstavljaju preferencije donositelja odluke na ΔA. Stoga, one su jako koristan alat za predstavljanje preferencija donositelja odluka u rizičnim okruženjima. Međutim, koja je poveznica između von Neumann i Morgenstern funkcija korisnosti i linearnih funkcija korisnosti? Odgovor je dan u idućoj propoziciji.

Propozicija 5. *Neka je* $(\Delta A, \succeq)$ *konveksan problem odlučivanja. Onda, postoji von Neumann i Morgenstern funkcija korisnosti za relaciju* $\succeq$ *ako i samo ako postoji linearna funkcija korisnosti za relaciju* $\succeq$.

Dokaz. Pretpostavimo da je u von Neumann i Morgenstern funkcija korisnosti za relaciju $\succeq$ i definiramo $\bar{u} : \Delta A \to \mathbb{R}$, za svaki $x \in \Delta A$, kao

$$\bar{u}(x) := \sum_{a \in A} u(a)x(a).$$

Tako definirana, $\bar{u}$ je linearna funkcija korisnosti za relaciju $\succeq$.
Obratno, neka je $\bar{u}$ linearna funkcija korisnosti za $\succeq$ i definiramo $u : A \to \mathbb{R}$, za svaki $a \in A$, sa $u(a) := \bar{u}(e_a)$. Kako se svaki $x \in \Delta A$ može zapisati kao $\sum_{a \in A} x(a)e_a$, u je von Neumann i Morgenstern funkcija korisnosti za relaciju $\succeq$. $\square$

Von Neumann i Morgenstern funkcije korisnosti su također poznate kao objektivne očekivane korisnosti ili kardinalne funkcije korisnosti, tj. donositelj odluke pripisuje nekakav poredak preferencija različitim alternativama (različitim alternativama pridružuje preferencije koje možemo "mjeriti", tj. opisati kvantitativno) i onda izvodi svoje preferencije na lutrijama računajući njihovu očekivanu vrijednost.

3 | Strateške igre

3.1 Uvod u strateške igre

Strateška igra je model koji opisuje interaktivne situacije između više igrača. U ovome modelu, svi igraču donose odluke u isto vrijeme, neovisno jedni o drugima. Strateške igre su karakterizirane strategijama koje su dostupne igračima te njihovim funkcijama isplate. Funkcija isplate može predstavljati razne oblike korisnosti za igrače, radilo se o nečemu relativno opipljivom kao novcu ili nečem neobičnom, poput nesebičnosti.
Kroz rad ćemo pretpostavljati da je svaki igrač racionalan, tj. da pokušava maksimizirati svoju isplatu. Također, za racionalnog igrača nećemo pretpostavljati da postoji ograničenje u mogućnostima za kompleksnost njegovih kalkulacija ili strategija.
Za početak, formalno ćemo uvesti koncept strateške igre.
Skup igrača označit ćemo sa $N := \{1, ..., n\}$.

Definicija 10. ***Strateška igra*** *s n igrača, preciznije sa skupom igrača N je uređeni par* $G := (A, u)$ *čiji su elementi:*

- ***Skupovi strategija***: *Za svaki* $i \in N$, A_i *je neprazan skup strategija igrača i te je* $A := A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ *skup strateških profila.*
- ***Funkcije isplate***: *Za svaki* $i \in N$, $u_i : A \to \mathbb{R}$ *je funkcija isplate igrača i te* $u := u_1 \times u_2 \times ... \times u_n$; u_i *pridružuje svakom strateškom profilu* $a \in A$ *isplatu koju igrač i dobije ako se odigra a.*

Napomena 1. *U igri G, svaki igrač* $i \in N$ *bira, istovremeno i neovisno, strategiju* $a_i \in A_i$. *Onda, svaki igrač i dobije isplatu* $u_i(a)$. *Možemo zamisliti da, prije igranja igre, igrači mogu komunicirati jedni s drugima. U tom slučaju, tijekom te komunikacije mogu napraviti jedino neobvezujuće dogovore jedni s drugima.*

Napomena 2. *U interaktivnim situacijama koje strateške igre modeliraju, sljedeći elementi su implicitno uključeni:*

- $\{A_i\}_{i \in N}$, *skup strategija igrača,*
- R, *skup mogućih ishoda,*
- *funkcija* $f : A \to R$ *koja svakom strateškom profilu* $a \in A$ *pridružuje njegovu odgovarajuću isplatu,*

- $\{\succeq_i\}_{i\in N}$, *preferencije igrača na ishode iz R; za njih se pretpostavlja da su kompletne, tranzitivne i da se mogu prikazati kroz funkciju korisnosti,*
- $\{U_i\}_{i\in N}$, $U_i : R \to \mathbb{R}$ *funkcije korisnosti igrača, koje prikazuju njihove preferencije na R.*

Zbog ovoga, strateška igra je "pojednostavljenje" u kojem, za svaki $i \in N$ i svaki $a \in A$, $u_i(a) = U_i(f(a))$.

Nadalje slijedi nekoliko primjera.

Primjer 1 (Zatvorenikova dilema)**.** *Dva osumnjičenika optužena za manju krađu i teži zločin su stavljeni u odvojene ćelije. Policija zna da su krivi za krađu, ali nemaju nikakve dokaze za počinjeni teži zločin. Obojica dobiju priliku da priznaju. Ako obojica priznaju, dobit će 5 godina zatvora. Ako samo jedan prizna, on će poslužiti kao svjedok protiv drugoga, koji će provesti 8 godina u zatvoru, dok će osumnjičenik koji je svjedočio proći nekažnjeno. Ako nijedan ne prizna zločin, bit će stavljeni u zatvor na 1 godinu zbog manje krađe. Šutnju ćemo nadalje označiti kao "suradnja" (S), dok ćemo priznanje označavati kao "izdaja" (I) (U smislu, šutnja označava suradnju između osumnjičenih, dok priznanje tretiramo kao izdaju). Onda je zatvorenikova dilema strateška igra (A, u) u kojoj je:*

- $A_1 = A_2 = \{S, I\}$,
- $u_1(S, S) = -1$, $u_1(S, I) = -8$, $u_1(I, S) = 0$, *te* $u_1(I, I) = -5$,
- $u_2(S, S) = -1$, $u_2(S, I) = 0$, $u_2(I, S) = -8$, *te* $u_2(I, I) = -5$.

Tablica 3.1 je malo pogodniji prikaz ove igre, te je standardan način za prikazivanje igre na konačnim i malim skupovima strategija.

	S	I
S	-1, -1	-8, 0
I	0, -8	-5, -5

Tablica 3.1: Zatvorenikova igra

Zatvorenikova dilema je klasičan primjer iz teorije igara. Koristi se ne samo u matematičkoj teoriji, nego i u primjeni unutar sociologije i ekonomije ponašanja. "Suradljiv" ishod $(-1, -1)$ *je dosta dobar za oba igrača, ima najmanju "ukupnu kaznu". No, primijetimo da ako svaki igrač gleda svoju korist, strategija I donosi bolju isplatu nego strategija S, bez obzira za koju strategiju se drugi igrač odluči. Zbog toga, svaki racionalan igrač bi trebao odabrati strategiju I. Nadalje, ako se oba igrača ponašaju racionalno, dobit će isplate* $(-5, -5)$*, što je puno gore nego u suradljivom slučaju. Brojne životne situacije se mogu modelirati zatvorenikovom igrom. Na primjer, tijekom nuklearne utrke između SAD-a i SSSR-a tijekom Hladnog rata, obje zemlje biraju hoće li ili ne proizvoditi nuklearna oružja, te bi u toj situaciji isplate bile slične poput onih u tablici 3.1.*

3.2 Nashov ekvilibrij u strateškim igrama

Idući korak je predložiti koncept rješenja koji objašnjava kako bi se racionalni igrači trebali ponašati. Najbitniji koncept rješenja za strateške igre je Nashov ekvilibrij. John Nash je uveo taj koncept u svome radu 1951. i zbog njegovog doprinosa u ekonomiji i teoriji igara, John Nash je osvojio Nobelovu nagradu za ekonomiju 1994. godine.
Nashov ekvilibrij strateške igre je jednostavno strateški profil takav da nijedan igrač ništa ne dobiva ako odstupa od njega u bilo kojem smjeru.
Ako je dana igra $G = (A, u)$ i strateški profil $a \in A$, onda ćemo sa $(a_{-i}, \hat{a}_i)$ označavati profil $(a_1, ..., a_{i-1}, \hat{a}_i, a_{i+1}, ..., a_n)$.

Definicija 11. *Neka je $G = (A, u)$ strateška igra.* ***Nashov ekvilibrij*** *od G je strateški profil $a^* \in A$ takav da, za svaki $i \in N$ i za svaki $\hat{a}_i \in A_i$,*

$$u_i(a^*) \geq u_i(a^*_{-i}, \hat{a}_i).$$

Nadalje, proučit ćemo Nashov ekvilibrij u kontekstu strateške igre iz prethodnog poglavlja i nekoliko novih primjera.

Primjer 2. *Jedini Nashov ekvilibrij u Zatvorenikovoj dilemi je $a^* = (I, I)$. Kako smo već komentirali, to je jedino racionalno ponašanje u nesuradljivom okruženju.*

Primjer 3 (Par-nepar). *Igrači 1 i 2 biraju, u isto vrijeme, neovisno jedan od drugoga, prirodan broj (najčešće se igra sa jednom rukom, pa možemo gledati da biraju broj iz skupa $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, kao koliko prstiju će pokazati, primjer se ne mijenja). Ako je suma izabranih brojeva paran broj, igrač 1 pobjeđuje (što ćemo označiti sa $(1, -1)$, kao igrač 1 pobjeđuje, igrač 2 gubi), a ako je suma neparan broj, igrač 2 pobjeđuje (što ćemo označiti sa $(-1, 1)$). Strateški gledano, sve što je bitno u ovoj igri je je li igrač bira paran (P) ili neparan broj (N). Strateška igra koja modelira ovu situaciju dana je u tablici 3.2. Ova igra nema nijedan Nashov ekvilibrij.*

	P	N
P	1, -1	-1, 1
N	-1, 1	1, -1

Tablica 3.2: Par-nepar

Primjer 4 (Sokol i grlica). *Dvije životinje se bore oko plijena. Svaka se može ponašati kao "sokol" (S) ili kao "grlica" (G). Životinja najbolje prolazi ako se ona ponaša kao sokol, a druga životinja kao grlica (u smislu, ako je prva životinja agresivna, a druga popustljiva), no najgore prolaze ako se obje ponašaju kao sokoli (u smislu agresivno, potuku se oko plijena i nitko ne dobije skoro ništa zbog ozljeda u borbi). Svaka životinja želi biti poput grlice ako je protivnik sokol, a preferira biti sokol ako je protivnik grlica. Ova igra je prikazana u tablici 3.3, te ima dva Nashova ekvilibrija, (G, S) i (S, G).*

Primjer 5 (Prodavači sladoleda na plaži). *Igrači 1 i 2 su prodavači sladoleda na plaži duljine 1 kilometar. Međusobno se dogovore da će prvi prodavač biti na "lijevoj strani" plaže, dok će drugi prodavač biti na "desnoj strani". Formalno, naša plaža će biti skup $[0, 1]$, a elementi igre opisani su na sljedeći način:*

	G	S
G	$4,4$	$2,5$
S	$5,2$	$1,1$

Tablica 3.3: Sokol i grlica

- $A_1 = \{a_1 : a_1 \in [0, 0.5]\}$, *gdje je* a_1 *pozicija na plaži,*
- $A_2 = \{a_2 : a_2 \in [0.5, 1]\}$, *gdje je* a_2 *pozicija na plaži,*
- $u_1(a_1, a_2) = \frac{a_1+a_2}{2}$,
- $u_2(a_1, a_2) = 1 - \frac{a_1+a_2}{2}$.

Funkcije korisnosti u_1 *i* u_2 *proizlaze iz činjenica da postoji točka* S *ravno između prodavača, gdje će ljudi lijevo od nje ići do prodavača 1, dok će ljudi desno od nje ići do prodavača 2;* u_1 *predstavlja udaljenost lijevog kraja plaže (točka* 0*), do* S*, a* u_2 *udaljenost od desnog kraja (točka* 1*) do* S*.*
1. dan prodavači se dogovore da svatko bude na sredini svoje polovice plaže, tj. $a_1 = 0.25$, $a_2 = 0.75$*, pa onda vrijedi* $u_1 = u_2 = 0.5$*. Primijetimo da se u tom slučaju ljudi nalaze najviše 250 metara od bilo kojeg prodavača sladoleda. Ovo se naziva "socijalno optimalno rješenje", iako se time nećemo dalje baviti u ovome radu jer proučavamo probleme isključivo iz nekooperativne perspektive.*
2. dan se prodavač 2 pomakne 100 metara bliže sredini plaže, pa onda imamo $a_1 = 0.25$, $a_2 = 0.65$*, te* $u_1 = 0.45$, $u_2 = 0.55$*.*
3. dan se prodavač 1 pomakne 200 metara bliže sredini, dok je prodavač 2 na istoj poziciji kao prethodni dan, dakle $a_1 = 0.45$, $a_2 = 0.65$*, te* $u_1 = 0.55$, $u_2 = 0.45$*.*
4. dan prodavač 2 odluči stati ravno na sredinu plaže, dok je prodavač 1 gdje je bio i jučer. Onda imamo $a_1 = 0.25$, $a_2 = 0.5$*, te* $u_1 = 0.475$, $u_2 = 0.525$*.*
5. dan prodavač 1 staje na istu poziciju kao i prodavač 2, dakle vrijedi $a_1 = 0.5$, $a_2 = 0.5$*, te* $u_1 = 0.5$, $u_2 = 0.5$*. Prodavači opet imaju istu vrijednost kao 1. dan, no za razliku od tada, sada ne mogu "popraviti" svoju poziciju, da zarade više, tj. postigli su Nashov ekvilibrij. Primijetimo da iako oni imaju istu isplatu kao prvi dan, ljudima na plaži je značajno gore jer sada moraju hodati do 500 metara.*
Pronađimo sada formalno Nashov ekvilibrij. Po definiciji, Nashov ekvilibrij ove igre biti će par $(a_1^*, a_2^*) \in A_1 \times A_2$ *takav da i) za svaki* $\hat{a}_1 \in A_1$, $u_1(a_1^*, a_2^*) \geq u_1(\hat{a}_1, a_2^*)$ *i ii) za svaki* $\hat{a}_2 \in A_2$, $u_1(a_1^*, a_2^*) \geq u_1(a_1^*, \hat{a}_2)$*. To računamo tako da izračunamo ekstreme funkcija* u_1 *po* a_1 *i* u_2 *po* a_2*. Kako se radi o linearnim funkcijama, trebamo gledati njihov rub koji je maksimum;* u_1 *je rastuća linearna funkcija (koeficijent smjera je* $\frac{1}{2}$*), pa će njen maksimum biti u desnom kraju, u točki* 0.5*, dok je* u_2 *padajuća linearna funkcija (koeficijent smjera je* $-\frac{1}{2}$*), pa će maksimum biti u lijevom kraju, u točki 0.5. Dakle, točka* $(0.5, 0.5)$ *je jedinstven Nashov ekvilibrij ove igre.*

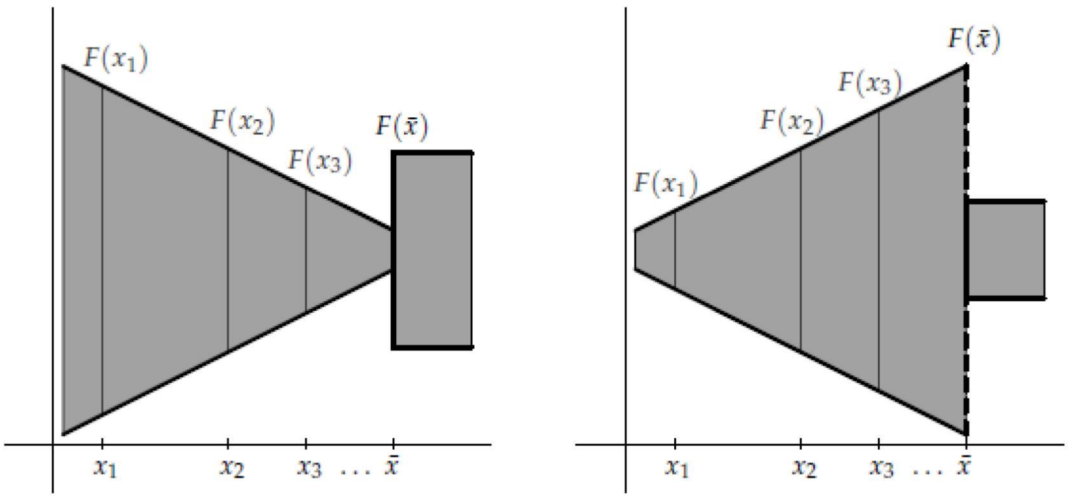
Nadalje, pogledajmo Nashov teorem, koji daje dovoljan uvjet postojanja Nashovog ekvilibrija u strateškoj igri. Za njegov iskaz i dokaz, trebaju nam neki prethodni koncepti i pojam korespondencije.
Neka je $X \subset \mathbb{R}^n$ i $Y \subset \mathbb{R}^m$. *Korespondencija* F iz X u Y je preslikavanje $F : X \to 2^Y$. Korespondencija F je sa *nepraznim*, *zatvorenim* ili *konveksnim vrijednostima* ako je za

svaki $x \in X$, $F(x)$ neprazan, zatvoren ili konveksan podskup od Y. Kako bi se pobliže upoznali s pojmom korespondencije, prvo nam trebaju dvije definicije koje su generalizacije definicije neprekidnosti funkcije.

Definicija 12. *Korespondencija F je **gornje hemineprekidna** ako, za svaki niz $\{x_k\} \subset X$ koji konvergira u $\bar{x} \in X$ i svaki otvoreni skup $Y^* \subset Y$ takav da je $F(\bar{x}) \subset Y^*$, postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da, za svaki $k \geq k_0$, $F(x_k) \subset Y^*$.*

Definicija 13. *Korespondencija F je **donje hemineprekidna** ako, za svaki niz $\{x_k\} \subset X$ koji konvergira u $\bar{x} \in X$ i svaki otvoreni skup $Y^* \subset Y$ takav da je $F(\bar{x}) \cap Y^* \neq \emptyset$, postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da, za svaki $k \geq k_0$, $F(x_k) \cap Y^* \neq \emptyset$.*

Za konvergentni niz u domeni korespondencije, gornja hemineprekidnost dopušta "eksplozije" u limesu, dok donja hemineprekidnost dopušta "implozije", što možemo intuitivno pojmiti gledajući $F(\bar{x})$ na slici 3.1, preuzetoj iz [1].



Slika 3.1: Dvije korespondencije sa $\mathbb{R}$ na $2^{\mathbb{R}}$: lijeva je gornje hemineprekidna ali ne i donje neprekidna, desna je donje hemineprekidna, ali ne i gornje hemineprekidna.

Teorem 3 (Kakutanijev teorem o fiksnoj točki)**.** *Neka je $X \subset \mathbb{R}^n$ neprazan, konveksan i kompaktan skup, te neka je $F : X \to X$ korespondencija sa nepraznim, zatvorenim i konveksnim vrijednostima. Tada, postoji $\bar{x} \in X$ takav da $\bar{x} \in F(\bar{x})$, tj. F ima fiksnu točku.*

Dokaz Kakutanijevog teorema o fiksnoj točki je tehnički zahtjevan i slabo vezan uz teoriju igara, pa ga nećemo ovdje navoditi, no može se pronaći na engleskom u [1].

Definicija 14. *Neka je $G = (A, u)$ strateška igra takva da, za svaki $i \in N$:*

i) postoji $m_i \in \mathbb{N}$ takav da je A_i neprazan i kompaktan podskup od $\mathbb{R}^{m_i}$,

ii) u_i je neprekidna.

Onda, za svaki $i \in N$ ***korespondencija najboljeg odgovora igrača*** *i, $\mathrm{BR}_i : A_{-i} \to A_i$, je definirana za svaki $a_{-i} \in A$ sa*

$$\mathrm{BR}_i(a_{-i}) := \{a_i \in A_i : u_i(a_{-i}, a_i) = \max_{\tilde{a}_i \in A_i} u_i(a_{-i}, \tilde{a}_i)\}.$$

Neka je $\mathrm{BR} : A \to A$ definirana, za svaki $a \in A$, sa

$$\mathrm{BR}(a) := \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{BR}_i(a_{-i}).$$

Definicija 15. *Neka je $m \in \mathbb{N}$ i $A \subset \mathbb{R}^m$ konveksan skup. Funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ je* ***kvazi-konkavna*** *ako za svaki $r \in \mathbb{R}$, skup $\{a \in A : f(a) \geq r\}$ je konveksan ili ekvivalentno, za sve $a, b \in A$ i svaki $\alpha \in [0, 1]$, $f(\alpha a + (1 - \alpha)b) \geq \min\{f(a), f(b)\}$.*

Propozicija 6. *Neka je $G = (A, u)$ strateška igra takva da, za svaki $i \in N$:*

i) A_i je neprazan i kompaktan podskup od $\mathbb{R}^{m_i}$ za neki $m_i \in \mathbb{N}$,

ii) u_i je neprekidna,

iii) za svaki a_i, $u_i(a_{-i}, \cdot)$ je kvazi-konkavna na A_i.

Tada, za svaki $i \in N$, BR_i je gornje hemineprekidna korespondencija sa nepraznim, zatvorenim i konveksnim vrijednostima. Stoga, BR također zadovoljava prijašnja svojstva.

Dokaz ovog teorema može se pronaći u [1].
Sada predstavljamo glavni rezultat ovog poglavlja, čiji je rezultat direktna posljedica Kakutanijevog teorema o fiksnoj točki i propozicije 6.

Teorem 4 (Nashov teorem)**.** *Neka je $G = (A, u)$ strateška igra, takva da, za svaki $i \in N$:*

i) A_i je neprazan, konveksan i kompaktan podskup od $\mathbb{R}^{m_i}$,

ii) u_i je neprekidna,

iii) za svaki $a_{-i}, u_i(a_{-i}, \cdot)$ je kvazi-konkavna na A_i.

Onda igra G ima barem jedan Nashov ekvilibrij.

Dokaz. Ako je a fiksna točke korespondencije BR: $A \to A$, onda je a Nashov ekvilibrij od G. Prema propoziciji 6, BR zadovoljava uvjete Kakutanijevog teorema (prisjetimo se da smo dodatno pretpostavili da su skupovi A_i konveksni). Stoga, BR ima fiksnu točku. $\square$

Može se pokazati da je skup Nashovih ekvilibrija zatvoren (pogledati [1]). Nadalje, uloga kvazi-konkavnosti u prijašnjem teoremu osigurava da je konveksna kombinacija najboljih odgovora i dalje najbolji odgovor, drugim riječima, BR je korespondencija sa konveksnim vrijednostima.

3.3 Igre nulte sume za dva igrača

Mnogo radova u početku teorije igara fokusira se na posebnu klasu strateških igara, ponajviše na *igre nulte sume za dva igrača*. One su karakterizirane činjenicom da dva igrača u igri imaju potpuno suprotne interese.

Definicija 16. ***Igra nulte sume za dva igrača*** *je strateška igra dana sa* $G = (\{A_1, A_2\}, \{u_1, u_2\})$, *gdje, za svaki strateški profil* $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$,

$$u_1(a_1, a_2) + u_2(a_1, a_2) = 0.$$

Kako bi karakterizirali igre nulte sume sa dva igrača dovoljno je dati funkciju korisnosti jednog od igrača. Obično se navodi funkcija korisnosti igrača 1. Zbog toga, kada definiramo igru nulte sume sa dva igrača kažemo da je G trojka (A_1, A_2, u_1). Pretpostavljamo da je u_1 omeđen na $A_1 \times A_2$.
Klasa igara nulte sume sa dva igrača je prva koju su teoretičari igara proučavali i pomoću njih su modelirane situacije u kojima igrači imaju suprotne interese: kadgod jedan igrač preferira (a_1, a_2) nad $(\hat{a}_1, \hat{a}_2)$, drugi igrač preferira $(\hat{a}_1, \hat{a}_2)$ nad (a_1, a_2). Ove igre je inicijalno analizirao John von Neumann, koji je definirao sljedeće koncepte.

Definicija 17. *Neka je* $G = (A_1, A_2, u_1)$ *igra nulte sume za dva igrača.*

Donja vrijednost: *Neka je* $\underline{\Lambda}\colon A_1 \to \mathbb{R}$ *definirana, za svaki* $a_1 \in A_1$, *sa* $\underline{\Lambda}(a_1) := \inf_{a_2 \in A_2} u_1(a_1, a_2)$, *tj. najgora isplata koju igrač 1 dobiva ako odigra* a_1.
Donja vrijednost od G, *koju označavamo sa* $\underline{\lambda}$, *dana je sa*

$$\underline{\lambda} := \sup_{a_1 \in A_1} \underline{\Lambda}(a_1).$$

Ona daje isplatu koju si igrač 1 može garantirati u G *(ili bar izrazito blizu njoj).*

Gornja vrijednost: *Neka je* $\overline{\Lambda}\colon A_2 \to \mathbb{R}$ *definirana, za svaki* $a_2 \in A_2$, *sa* $\overline{\Lambda}(a_2) := \sup_{a_1 \in A_1} u_1(a_1, a_2)$, *tj. maksimalni gubitak koji igrač 2 može pretrpjeti ako odigra* a_2.
Gornja vrijednost od G, *koju označavamo sa* $\overline{\lambda}$, *dana je sa*

$$\overline{\lambda} := \inf_{a_2 \in A_2} \overline{\Lambda}(a_2).$$

Ona daje supremum gubitaka koji igrač 2 može pretrpjeti u G, *tj. najveća isplata koju igrač 1 može dobiti u* G *(ili bar izrazito blizu njoj).*

Primijetimo da $\underline{\lambda} \leq \overline{\lambda}$, *jer za svaki* $a_1 \in A_1$ *i svaki* $a_2 \in A_2$,

$$\underline{\Lambda}(a_1) = \inf_{\hat{a}_2 \in A_2} u_1(a_1, \hat{a}_2) \leq u_1(a_1, a_2) \leq \sup_{\hat{a}_1 \in A_1} u_1(\hat{a}_1, a_2) = \overline{\Lambda}(a_2).$$

Definicija 18. *Igra nulte sume za dva igrača* $G = (A_1, A_2, u_1)$ *je* ***strogo određena*** *ili ima* ***vrijednost*** *ako se njena donja i gornja vrijednost podudaraju, tj. ako* $\underline{\Lambda} = \overline{\Lambda}$. *U tom slučaju,* $V := \underline{\Lambda} = \overline{\Lambda}$ *je vrijednost igre.*

Definicija 19. *Neka je $G = (A_1, A_2, u_1)$ igra nulte sume za dva igrača sa vrijednosti V.*

i) Strategija $a_1 \in A_1$ je optimalna za igrača 1 ako $V = \underline{\Lambda}(a_1)$.

ii) Strategija $a_2 \in A_2$ je optimalna za igrača 2 ako $V = \overline{\Lambda}(a_2)$.

Pod uvjetom postojanja optimalnih strategija, vrijednost igre nulte sume je isplata koju si igrač 1 može garantirati. Slično, to je suprotna vrijednost od isplate koju si igrač 2 može garantirati. U igrama nulte sume koje nemaju vrijednost, situacija nije strogo određena, u smislu da nije uvijek jasno kako će se isplata $\overline{\lambda} - \underline{\lambda}$ raspodijeliti.
Sljedeći primjer prikazuje različite mogućnosti koje mogu proizaći ovisno o vrijednosti i optimalnim strategijama igre nulte sume za dva igrača.

Primjer 6 (Konačna igra nulte sume za dva igrača koja je strogo određena)**.** *Pogledajmo igru nulte sume u tablici 3.4. Jasno vrijedi $\underline{\Lambda}(L_1) = 3$ i $\underline{\Lambda}(R_1) = 1$, pa je onda $\underline{\lambda} = 3$. Osim toga, vrijedi $\overline{\Lambda}(L_2) = 3$ i $\overline{\Lambda}(R_2) = 5$, pa je $\overline{\lambda} = 3$. Stoga, vrijednost ove igre je 3 i L_1 i L_2 su optimalne strategije za igrače 1 i 2, redom. Generalno za konačne igre nulte sume za dva igrača vrijedi da ako imaju vrijednost, onda oba igrača imaju optimalnu strategiju.*

	L_2	R_2
L_1	3	3
R_1	1	5

Tablica 3.4: Strogo određena igra

Primjer 7 (Konačna igra nulte sume za dva igrača koja nije strogo određena)**.** *Promotrimo igru nulte sume za dva igrača $([0,1],[0,1],u_1)$, gdje, za svaki par $(a_1, a_2) \in [0,1] \times [0,1]$, $u_1(a_1, s_2) = \frac{1}{1+|a_1-a_2|}$. Za svaki $a_1 \in [0,1]$, vrijedi*

$$\underline{\Lambda}(a_1) = \inf_{a_2 \in [0,1]} \frac{1}{1+|a_1-a_2|} = \begin{cases} \frac{1}{1+|a_1-1|} & a_1 \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{1+a_1} & a_1 \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

i $\underline{\lambda} = \underline{\Lambda}(\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}$. Za svaki $a_2 \in [0,1]$,

$$\overline{\lambda}(a_2) = \sup_{a_1 \in [0,1]} \frac{1}{1+|a_1-a_2|} = 1 = \overline{\lambda}.$$

Stoga $\underline{\lambda} < \overline{\lambda}$ i igra nije strogo određena.

Dosad nismo komentirali Nashov ekvilibrij za igre nulte sume za dva igrača, iako one jesu strateške igre. Možemo se zapitati koja je poveznica između von Neumannove teorije i Nashove teorije, tj. koji je odnos između koncepta Nashovog ekvilibrija i profila optimalnih strategija u igrama nulte sume za dva igrača.
Neka je $G = (A_1, A_2, u_1)$ igra nulte sume za dva igrača. Nashov ekvilibrij od G

je strateški profil $(a_1^*, a_2^*) \in A_1 \times A_2$ takav da, za svaki $\hat{a}_1 \in A_1$ i svaki $\hat{a}_2 \in A_2$, $u_1(a_1^*, a_2^*) \geq u_1(\hat{a}_1, a_2^*)$ i $-u_1(a_1^*, a_2^*) \geq -u_1(a_1^*, \hat{a}_2)$ ili ekvivalentno

$$u_1(\hat{a}_1, a_2^*) \geq u_1(a_1^*, a_2^*) \geq u_1(a_1^*, \hat{a}_2) \tag{3.1}$$

Strateški profil (a_1^*, a_2^*) koji zadovoljava (3.1) naziva se *sedlasta točka* od u_1. Stoga, u igrama nulte sume za dva igrača, Nashov ekvilibrij i sedlaste točke funkcija isplate igrača 1 predstavljaju isti koncept. Sada prikazujemo dvije propozicije koje pokazuju da je Nashova teorija za strateške igre generalizacija von Neumannove teorije za igre nulte sume za dva igrača.

Propozicija 7. *Neka je $G = (A_1, A_2, u_1)$ igra nulte sume za dva igrača i neka je $(a_1^*, a_2^*) \in A_1 \times A_2$ Nashov ekvilibrij od G. Onda vrijedi:*

i) G je strogo određena,

ii) a_1^* je optimalan za igrača 1 i a_2^* je optimalan za igrača 2,

iii) $V = u_1(a_1^*, a_2^*)$.

Dokaz. Prema (3.1) imamo:

- $\underline{\lambda} = \sup\limits_{\hat{a}_1 \in A_1} \underline{\Lambda}(\hat{a}_1) \geq \underline{\Lambda}(a_1^*) = \inf\limits_{\hat{a}_2 \in A_2} u_1(a_1^*, \hat{a}_2)$,
- $u_1(a_1^*, a_2^*) \geq \sup\limits_{\hat{a}_1 \in A_1} u_1(\hat{a}_1, a_2^*) = \overline{\Lambda}(a_2^*) \geq \inf\limits_{\hat{a}_2 \in A_2} \overline{\Lambda}(\hat{a}_2) = \overline{\lambda}$.

S obzirom da je $\overline{\lambda} \geq \underline{\lambda}$, sve nejednakosti moraju biti jednakosti, iz čega proizlazi i), ii) i iii). □

Propozicija 8. *Neka je $G = (A_1, A_2, u_1)$ igra nulte sume za dva igrača, neka je G strogo određena i neka su $a_1 \in A_1$ i $a_2 \in A_2$ optimalne strategije od igrača 1 i 2. Onda je (a_1, a_2) Nashov ekvilibrij od G i $V = u_1(a_1, a_2)$.*

Dokaz. S obzirom da su a_1 i a_2 optimalne strategije, imamo da je, za svaki $\hat{a}_1 \in A_1$ i svaki $\hat{a}_2 \in A_2$,

$$u_1(\hat{a}_1, u_2) \leq \overline{\Lambda}(a_2) = V = \underline{\Lambda}(a_1) \leq u_1(a_1, \hat{a}_2).$$

Uzimajući da je $\hat{a}_1 = a_1$ i $\hat{a}_2 = a_2$, imamo da je $V = u_1(a_1, a_2)$. □

Napomena 3. *U kontekstu prijašnjih propozicija, ako su (a_1^*, a_2^*) i (a_1, a_2) Nashovi ekvilibriji igre nulte sume za dva igrača G, onda su (a_1^*, a_2) i (a_1, a_2^*) također Nashovi ekvilibriji od G i štoviše,*

$$u_1(a_1^*, a_2^*) = u_1(a_1, a_2) = u_1(a_1, a_2^*) = u_1(a_1^*, a_2).$$

Napomena 4. *Strateška igra $G = (\{A_1, A_2\}, u_1, u_2)$ je* ***igra konstantne sume*** *za dva igrača ako postoji $K \in \mathbb{R}$ takav da, za svaki strateški profil $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$, $u_1(a_1, a_2) + u_2(a_1, a_2) = K$. Igra nulte sume je igra konstante sume ($K = 0$). Međutim, iz strateške perspektive, proučavati G je isto što i proučavati $\bar{G} := (A_1, A_2, u_1)$ jer je $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$ Nashov ekvilibrij od G ako i samo ako je ujedno i Nashov ekvilibrij od $\bar{G}$. Stoga, rezultati iz ovog poglavlja se smiju proširiti na igre konstantne sume za dva igrača.*

3.4 Miješane strategije u konačnim igrama

Glavni fokus ostatka ovog poglavlja je na konačnim igrama.

Definicija 20. *Neka je $G = (A, u)$ strateška igra. Kažemo da je G* ***konačna igra*** *ako, za svaki $i \in N$, $|A_i| < \infty$.*

S obzirom da skupovi strategija u konačnim igrama nisu konveksni skupovi, Nashov teorem se ne može primijeniti na njih. Štoviše, već smo vidjeli konačnu igru bez Nashovog ekvilibrija u primjeru 3 (Par-nepar). Međutim, postoji "teorijski trik" koji nam omogućava da proširimo igru i garantiramo postojanje Nashovog ekvilibrija proširene verzije svake konačne igre. Trik se sastoji od povećavanja strateških mogućnosti igrača i omogućivanja da odaberu ne samo strategije koje su inicijalno imali (koje ćemo odsad nadalje zvati *čiste strategije*), nego također lutrije na njihovim konačnim skupovima strategija. Proširenje originalne igre se zove *miješano proširenje* i strategije igrača u miješanim proširenjima se zovu *miješane strategije*.
Iako smo miješano proširenje igre nazvali "teorijskim trikom", miješane strategije su prirodne strategije za rad u brojnim praktičnim situacijama. U sljedećem primjeru ćemo se neformalno upoznati sa miješanim proširenjem strateške igre, a nakon primjera ćemo vidjeti formalnu definiciju.

Primjer 8. *Prisjetimo se igre par-nepar (primjer 3). Pretpostavimo da igrači mogu birati, osim P i N, lutriju L koja bira P sa vjerojatnosti 0.5 i N sa vjerojatnosti 0.5 (uzmimo kao primjer bacanje pravilnog novčića). Igrači imaju von Neumann i Morgenstern funkcije korisnosti, tj. njihove funkcije korisnosti se mogu proširiti na skup miješanih strateških profila s kojima možemo računati očekivanu vrijednost (prisjetimo se definicije 9). Tablica 3.5 predstavlja novu igru koju proučavamo. Primijetimo da su funkcije korisnosti proši-*

	P	N	L
P	1, -1	-1, 1	0, 0
N	-1, 1	1, -1	0, 0
L	0, 0	0, 0	0, 0

Tablica 3.5: Par-nepar sa lutrijom L

rene, uzimajući u obzir da igrači biraju lutrije nezavisno jedan od drugoga (proučavamo stratešku igru). Na primjer:

$$u_1(L, L) = \frac{1}{4}u_1(P, P) + \frac{1}{4}u_1(P, N) + \frac{1}{4}u_1(N, P) + \frac{1}{4}u_1(N, N) = 0.$$

Primijetimo da ova igra ima Nashov ekvilibrij: (L, L). Miješano proširenje igre par-nepar je nova strateška igra u kojoj igrači mogu birati ne samo L, nego bilo koju drugu lutriju na $\{P, N\}$. Lako je provjeriti da je jedini Nashov ekvilibrij miješanog proširenja igre par-nepar (L, L). Jedna od interpretacija je sljedeća. U igri par-nepar jako je bitno za oba igrača da nemaju informacije što će drugi igrač konačno odabrati, P ili N. Da to osiguraju, bilo bi optimalno za svakog igrača da on sam ne zna što će konačno odabrati, što objašnjava odabir lutrije L.

Definicija 21. *Neka je $G = (A, u)$ konačna igra.* ***Miješano proširenje*** *od G je strateška igra $E(G) := (S, u)$, čiji su elementi sljedeći:*

> ***Skup (miješanih) strategija****: Za svaki $i \in N$, $S_i := \Delta A_i$ i $S := \prod_{i \in N} S_i$. Za svaki $s \in S$ i svaki $a \in A$, neka je $s(a) := s_1(a_1) \cdot \ldots \cdot s_n(a_n)$ (kako je $s_i(a_i)$ vjerojatnost da igrač i odabere strategiju a_i, $s(a)$ je vjerojatnost da se odigra strateški profil a).*
>
> ***Funkcije isplate****: Za svaki $s \in S$, $u_i(s) := \sum_{a \in A} u_i(a)s(a)$ i $u := \prod_{i=1}^{n} u_i$.*

Napomena 5. *Miješano proširenje konačne igre jedino ima smisla ako igrači imaju preferencije na skupu lutrija na R (skupu mogućih ishoda) i njihove funkcije korisnosti su von Neumann i Morgenstern funkcije korisnosti.*

Napomena 6. *$E(G)$ je proširenje od G, u smislu da za svakog igrača $i \in N$, svaki element od A_i (čiste strategije) može se jedinstveno prikazati sa elementom iz S_i (miješane strategije). U ovom smislu, možemo pisati $A_i \subset S_i$. Također su funkcije isplate u $E(G)$ proširenja funkcija isplate u G.*

Primijetimo da miješana proširenja konačnih igara zadovoljavaju uvjete Nashovog teorema. Stoga, miješana ekstenzija konačne igre uvijek ima barem jedan Nashov ekvilibrij. Sljedeći rezultat je Nashov teorem koji je John Nash dokazao u svom radu 1950., dok je prethodno navedeni teorem 4 njegova generalizacija.

Teorem 5. *Neka je $G = (A, u)$ konačna strateška igra. Onda miješana ekstenzija od G, $E(G)$, ima barem jedan Nashov ekvilibrij.*

Dokaz. Jednostavno slijedi iz Nashovog teorema. $\square$

Kako bismo dovršili ovo poglavlje, navodimo još nekoliko definicija i osnovne rezultate vezane uz konačne igre i njihove miješane ekstenzije.

Definicija 22. *Neka je G konačna igra i $E(G)$ konačno proširenje. Neka je $s_i \in S_i$ (miješana) strategija za igrača i te $s \in S$ (miješani) strateški profil.*

i) ***Nosač*** *od s_i je skup $\varphi(s_i) := \{a_i \in A_i : s_i(a_i) > 0\}$. Analogno, nosač od s je skup $\varphi(s) := \prod_{i \in N} \varphi(s_i) = \{a \in A : s(a) > 0\}$.*

ii) *Kažemo da je s_i* ***kompletno miješan*** *ako $\varphi(s_i) = A_i$. Analogno, kažemo da je s kompletno miješan ako $\varphi(s) = A$ ili ekvivalentno, ako je za svaki $i \in N$ s_i kompletno miješan.*

iii) *Skup* ***čistih najboljih odgovora*** *igrača i na strategiju s_{-i} je definiran s $\mathrm{PBR}_i(s_{-i}) := \{a_i \in A_i : \text{ za svaki } \hat{a}_i \in A_i, u_i(s_{-i}, a_i) \geq u_i(s_{-i}, \hat{a}_i)\}$. Vrijedi i $\mathrm{PBR}_i(s) := \prod_{i \in N} \mathrm{PBR}_i(s_{-i})$.*

Propozicija 9. *Neka je G konačna igra i $E(G)$ njeno miješano proširenje. Onda, za svaki $i \in N$, svaki $s_i \in S_i$ i za svaki $s \in S$ vrijede sljedeća svojstva:*

i) *$s_i \in \mathrm{BR}_i(s_{-i})$ ako i samo ako $\varphi(s_i) \subset \mathrm{PBR}_i(s_{-i})$,*

ii) *s je Nashov ekvilibrij od $E(G)$ ako i samo ako $\varphi(s) \subset \mathrm{PBR}(s)$,* *iii)* *s je Nashov ekvilibrij od $E(G)$ ako i samo ako za svaki $\hat{a}_i \in A_i$ i za svaki $i \in N$, $u_i(s) \geq u_i(s_{-i}, \hat{a}_i)$.*

Dokaz. Jasno je da $u_i(s) = \sum_{a_i \in A_i} u_i(s_{-i}, a_i) s_i(a_i)$. Iz ove tvrdnje slijede tvrdnje propozicije. □

3.5 Bimatrične igre

U ovom poglavlju proučavamo konačne igre za dva igrača, koje se mogu jednostavno prikazati koristeći matrice. Zbog ovoga, u ovom i idućem poglavlju ćemo koristiti malo drukčije notacije nego u ostatku rada. Konačan skup strategija igrača dan je sa $L := \{1, ..., l\}$ za igrača 1 i $M := \{1, ..., m\}$ za igrača 2. S obzirom da je $N = \{1, 2\}$, nema potrebe da sa slovima i i j indeksiramo elemente od N i stoga ćemo u ovom poglavlju njih koristiti da indeksiramo skupove strategija igrača 1 i 2. Matrice ćemo označavati kao $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ sa elementima a_{ij} i b_{ij}. Sa $\mathcal{M}_{l \times m}$ označavamo skup svih $l \times m$ matrica sa realnim elementima. Konačno, koristimo oznaku $a_{i \cdot}$ za i-ti redak i $a_{\cdot j}$ za j-ti stupac.

Definicija 23. ***Bimatrična igra*** *je miješano proširenje konačne igre za dva igrača $G = (\{L, M\}, u)$. Stoga, bimatrična igra je par $(\{S_l, S_m\}, u)$ čiji su elementi sljedeći:*

> ***Skup strategija**: $S_l := \Delta L$, sa općim elementom x. Onda, za svaki $x \in \Delta L$ i za svaki $i \in L$, x_i označava vjerojatnost da igrač 1 odigra strategiju i. Analogno, $S_m := \Delta M$, sa općim elementom y.*
>
> ***Funkcije isplate**: Za svaki par $(x, y) \in S_l \times S_m$,*
>
> $$u_1(x, y) := \sum_{i \in L} \sum_{j \in M} u_1(i, j) x_i y_j = x \mathcal{A} y^T,$$
>
> *gdje $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{l \times m}$ ima elemente $(u_1(i, j))_{i \in L,\, j \in M}$ i za svaki par $(x, y) \in S_l \times S_m$,*
>
> $$u_2(x, y) := \sum_{i \in L} \sum_{j \in M} u_2(i, j) x_i y_j = x \mathcal{B} y^T,$$
>
> *gdje $\mathcal{B} \in \mathcal{M}_{l \times m}$ ima elemente $(u_2(i, j))_{i \in L,\, j \in M}$.*

Za karakterizaciju matrične igre dovoljno je dati par matrica $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Već smo vidjeli nekoliko primjera bimatrične igre, poput zatvorenikove dileme i igre par-nepar.
Klasa bimatričnih igara je detaljno izučena. Postoje brojni rezultati vezani uz Nashov ekvilibrij bimatričnih igara, kao i za algoritme vezane uz njihovo računanje. Računanje Nashovog ekvilibrija 2×2 bimatričnih igara je dosta jednostavno. Da to pokažemo, uzmimo $l \times m$ bimatričnu igru danu sa $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ i promotrimo sljedeće skupove:

$$B_1 := \{(x, y) \in S_l \times S_m : x \in \mathrm{BR}_1(y)\},$$

$$B_2 := \{(x, y) \in S_l \times S_m : x \in \mathrm{BR}_2(x)\}.$$

Skup Nashovih ekvilibrija od $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ je $B_1 \cap B_2$. Primijetimo da, kada je $l = m = 2$, možemo odrediti strategije igrača sa njihovim prvim komponentama, što znači, skup strategija svakog igrača može se prikazati sa $[0,1]$, gdje svaki od njegovih elemenata prikazuje vjerojatnost biranja prve čiste strategije. Stoga, B_1 i B_2 su podskupovi od $\mathbb{R}^2$ i njihov presjek se može odrediti geometrijski. To ćemo prikazati u sljedećem primjeru.

Primjer 9 (Borba spolova)**.** *Par odlučuje gdje ići navečer. Igrač 1 (on) preferira ići u kino (K), no igračica 2 (ona) bi preferirala ići u kazalište (T). Na kraju, oboje bi preferirali ići skupa na manje preferiranu opciju nego biti sami na opciji koju žele više. Tablica 3.6 prikazuje stratešku igru vezanu uz ovu situaciju.*

	K	T
K	2, 1	0, 0
T	-1, -1	1, 2

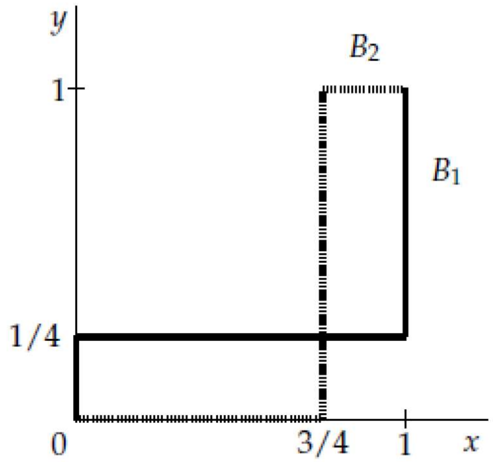
Tablica 3.6: Borba spolova

Imamo dva Nashova ekvilibrija, (K, K) i (T, T), no igrač 1 preferira (K, K), dok igračica 2 preferira (T, T). Kako bi ilustrirali proceduru koju smo ranije opisali, računamo sve Nashove ekvilibrije u miješanim strategijama u borbi spolova. S obzirom da se skup strategija može opisati sa $[0,1]$, strategiju igrača 1 su $x \in [0,1]$, a strategije igračice 2 su $y \in [0,1]$ (x je zapravo skraćeni zapis za strategiju $(x, 1-x)$ i y je skraćeni zapis za $(y, 1-y)$). Onda za ovu igru imamo:

$$B_1 = \{(0,y) : y \in [0, \tfrac{1}{4}]\} \cup \{(x, \tfrac{1}{4}) : x \in [0,1]\} \cup \{(1,y) : y \in [\tfrac{1}{4}, 1]\},$$

$$B_2 = \{(x,0) : x \in [0, \tfrac{3}{4}]\} \cup \{(\tfrac{3}{4}, y) : y \in [0,1]\} \cup \{(x,1) : x \in [\tfrac{3}{4}, 1]\}.$$

Slika 3.2, preuzeta iz [1], prikazuje skupove B_1 i B_2.



Slika 3.2: B_1 i B_2 u borbi spolova

Onda, skup Nashovih ekvilibrija borbe spolova je dan s $B_1 \cap B_2 = \{(0,0), (\frac{3}{4}, \frac{1}{4}), (1,1)\}$.

Primijetimo da, u ekvilibriju miješane strategije, oba igrača nemaju preferenciju između njihovih čistih strategija, tj. obje strategije su najbolji odgovori (što se vidi na slici 3.2), iako to već znamo iz propozicije 9. Vektori isplate ekvilibrija su $(2,1)$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ i $(2,1)$, pa su isplate u ekvilibriju miješane strategije dominirane bilo kojim isplatama iz čistih strategija. Štoviše, skup vektora isplate ekvilibrija je simetričan, što možemo očekivati iz simetrične igre (ali nisu svi vektori isplate ekvilibrija simetrični sami po sebi).

3.6 Matrične igre

Definicija 24. ***Matrična igra*** *je miješano proširenje konačne igre nulte sume za dva igrača $G = (L, M, u_1)$, tj. matrična igra je trojka (S_l, S_m, u_1) sa svojstvima:*

> ***Skup strategija**: $S_l := \Delta L$, sa općim elementom x, tj. za svaki $x \in \Delta L$ i svaki $i \in L$, x_i je vjerojatnost da igrač 1 odigra strategiju i. Analogno, $S_m := \Delta M$, sa općim elementom y.*
>
> ***Funkcije isplate**: Za svaki par $(x, y) \in S_l \times S_m$,*
>
> $$u_1(x,y) = \sum_{i \in L} \sum_{j \in M} u_1(i,j) x_i y_j = x\mathcal{A}y^T,$$
>
> *gdje $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{l \times m}$ ima elemente $(u_1(i,j))_{i \in L,\, j \in M}$ sadrži isplate igrača 1.*

Primijetimo da je $\mathcal{A}$ dovoljna za karakterizaciju matrične igre. Štoviše, primijetimo da za dani $x \in S_l$, $xa_{\cdot j}$ odgovara isplatama koje igrač 1 dobiva kada odigra miješanu strategiju x i igrač 2 odigra čistu strategiju $j \in M$. Slično, za dani $y \in S_m$, $a_{i\cdot}y^T$ odgovara isplati koju igrač 1 dobiva kad odigra čistu strategiju $i \in L$ i igrač 2 odigra miješanu strategiju y. Uočimo da se svaka matrična igra može prikazati kao bimatrična igra, iako obratno ne vrijedi. Stoga, Nashov teorem se može primijeniti kako bi se osiguralo da svaka matrična igra ima Nashov ekvilibrij. Onda, u pogledu propozicije 7, znamo da je svaka matrična igra strogo određena. To je poznati minimax teorem, koji je dokazan u [4]. Iako se on može prezentirati kao korolar vezan za Nashov teorem, postoji mnogo direktnih dokaza minimax teorema. U ovom radu ćemo prikazati jedan direktan dokaz baziran na matematičkoj indukciji. Za dokaz nam najprije treba pomoćni rezultat.

Propozicija 10. *Neka je $l \times m$ matrična igra dana preko matrice $\mathcal{A}$. Onda, za svaki $x \in S_l$ i svaki $y \in S_m$,*

$$\underline{\Lambda}(x) = \min_{j \in M} xa_{\cdot j} \text{ i } \overline{\Lambda}(y) = \min_{i \in L} a_{i\cdot}y^T.$$

Dokaz. Dokazujemo samo prvu jednakost, jer se druga dokazuje analogno. Neka je $x \in S_l$. Prisjetimo se da za svaki $i \in M$, $e_i \in S_m$ označava miješanu strategiju koja bira i sa vjerojatnosti 1. Stoga, u skladu sa notacijom korištenom u ovom poglavlju, $e_i \in \mathbb{R}^m$ i $(e_i)_j = 1$ ako $j = i$ i 0 inače. Sada, $\underline{\Lambda}(x) = \inf_{y \in S_m} x\mathcal{A}y^T \leq \min_{j \in M} x\mathcal{A}e_j^T = \min_{j \in M} xa_{\cdot j}$. Za svaki $y \in S_m$,

$$x\mathcal{A}y^T = \sum_{k \in M} (xa_{\cdot k}) y_k \geq \sum_{k \in M} (\min_{j \in M} xa_{\cdot j}) y_k = (\min_{j \in M} xa_{\cdot j}) \sum_{k \in M} y_k = \min_{j \in M} xa_{\cdot j}.$$

Stoga, $\underline{\Lambda}(x) = \inf_{y \in S_m} x\mathcal{A}y^T \geq \min_{j \in M} xa_{\cdot j}$. □

Uočimo da ova propozicija odmah implicira da su funkcije $\underline{\Lambda}$ i $\overline{\Lambda}$ neprekidne, jer su one minimum i maksimum konačnog broja neprekidnih funkcija.

Teorem 6 (Minimax teorem)**.** *Svaka matrica je strogo određena.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{A}$ $l \times m$ matrična igra. Onda kažemo da je *veličina* od $\mathcal{A}$ $l + m$. Radimo dokaz indukcijom po veličini od $\mathcal{A}$. Ako je veličina 2, onda je $\mathcal{A}$ strogo određena. Pretpostavimo da je svaka matrična igra strogo određena ako je njena veličina manja od t i neka je $\mathcal{A}$ matrična igra veličine t. S obzirom da su $\underline{\Lambda}$ i $\overline{\Lambda}$ neprekidne funkcije i da su one definirane na S_l i S_m, koji su kompaktni skupovi, onda postoje $\bar{x} \in S_l$ i $\bar{y} \in S_m$ takvi da

$$\underline{\Lambda}(\bar{x}) = \min_{j \in M} \bar{x}a_{\cdot j} = \underline{\lambda} \text{ i } \overline{\Lambda}(\bar{y}) = \max_{i \in L} a_{i\cdot}\bar{y}^T = \overline{\lambda}. \tag{3.2}$$

Stoga, za svaki $j \in M$, $\bar{x}a_{\cdot j} \geq \underline{\lambda}$ i za svaki $i \in L$, $a_{i\cdot}\bar{y}^T \leq \overline{\lambda}$. Gledamo tri različita slučaja:

i) za svaki $j \in M$, $\bar{x}a_{\cdot j} = \underline{\lambda}$ i za svaki $i \in L$, $a_{i\cdot}\bar{y}^T = \overline{\lambda}$,

ii) postoji $k \in M$ takav da $\bar{x}a_{\cdot k} > \underline{\lambda}$ koji implicira da je $m > 1$,

iii) postoji $h \in L$ takav da $a_{h\cdot}\bar{y}^T < \overline{\lambda}$ koji implicira da je $l > 1$.

U slučaju *i*) $\mathcal{A}$ je strogo određena. Proučit ćemo slučaj *ii*), jer je slučaj *iii*) analogan. U slučaju *ii*) je $m > 1$. Neka je $\mathcal{A}^{-k}$ matrica dobivena brisanjem k-tog stupca od $\mathcal{A}$. Skup miješanih strategija igrača 2 u $\mathcal{A}^{-k}$ može se izjednačiti sa $S_m^{-k} := \{y \in S_m : y_k = 0\}$. Prema bazi indukcije, $\mathcal{A}^{-k}$ je strogo određena. Neka su $\underline{\lambda}^{-k}$ i $\overline{\lambda}^{-k}$ gornja i donja vrijednost matrične igre $\mathcal{A}^{-k}$. Onda,

$$\underline{\lambda}^{-k} = \max_{x \in S_l} \min_{j \in M \setminus \{k\}} xa_{\cdot j} \geq \max_{x \in S_l} \min_{j \in M} xa_{\cdot j} = \underline{\lambda}$$

i

$$\overline{\lambda}^{-k} = \min_{y \in S_m^{-k}} \max_{i \in L} a_{i\cdot}y^T \geq \min_{y \in S_m} \max_{i \in L} a_{i\cdot}y^T = \overline{\lambda}.$$

Sada pokazujemo da je $\underline{\lambda} = \underline{\lambda}^{-k}$, što implicira da je $\underline{\lambda} = \underline{\lambda}^{-k} = \overline{\lambda}^{-k} \geq \overline{\lambda} \geq \underline{\lambda}$ i stoga, $\mathcal{A}$ je strogo određena. Pretpostavimo suprotno, da je $\underline{\lambda}^{-k} > \underline{\lambda}$ i neka je $\hat{x}$ takav da $\underline{\lambda}^{-k} = \min_{j \in M \setminus \{k\}} \hat{x}a_{\cdot j}$. Onda, za svaki $j \in M \setminus \{k\}$, $\hat{x}a_{\cdot j} \geq \underline{\lambda}^{-k} > \underline{\lambda}$. To, zajedno sa jednadžbom (3.2), implicira da, za svaki $\varepsilon \in (0,1)$ i svaki $j \in M \setminus \{k\}$, $(\varepsilon\hat{x} + (1-\varepsilon)\bar{x})a_{\cdot j} > \underline{\lambda}$. Štoviše, s obzirom da je $\bar{x}a_{\cdot k} > \underline{\lambda}$, postoji $\bar{\varepsilon} \in (0,1)$ dovoljno mali tako da vrijedi $(\bar{\varepsilon}\hat{x} + (1-\bar{\varepsilon})\bar{x})a_{\cdot k} > \underline{\lambda}$. Stoga,

$$\underline{\lambda} = \max_{x \in S_l} \underline{\Lambda}(x) \geq \underline{\Lambda}(\bar{\varepsilon}\hat{x} + (1-\bar{\varepsilon})\bar{x}) = \min_{j \in M} (\bar{\varepsilon}\hat{x} + (1-\bar{\varepsilon})\bar{x})a_{\cdot j} > \underline{\lambda},$$

što je nemoguće. □

Sa razvojem teorije kojoj je minimax teorem doprinjeo, očekivala bi se veća primjena njenih posljedica u stvarnom životu. No, ovo se pokazalo izuzetno teškim, s obzirom da je teško odrediti strateške skupove igrača, mjeriti individualne izbore i količinu truda i precizno odrediti funkcije korisnosti. Štoviše, situacije u stvarnom životu često uključuju kompleksne probleme i velike strateške skupove, što dodatno otežava spajanje teorije i primjene. Alternativni pristup je bio vezan uz laboratorijske eksperimente, gdje se kontrolira dizajn jednostavnih igara i pažljivo proučava ponašanje igrača. Međutim, bilo je skepticizma oko toga kako se ponašanje proučeno u laboratoriju može primijeniti na donošenje zaključaka o ljudskom ponašanju u stvarnom životu. Sljedeći primjer iz [3] pronalazi prirodan okoliš koji omogućava autorima da prijeđu preko većine spomenutih problema i testiraju neke implikacije minimax teorema u stvarnom životu.

Primjer 10 (Penali)**.** *Ovaj primjer proučava korištenje miješanih strategija u penalima u nogometu. Penali uključuju dva igrača, napadač (igrač 1) i golman (igrač 2). Golman, zbog brzine tipičnog udarca i njegovog vremena reakcije, ne može čekati da napadač udari loptu da se krene micati. Zbog toga, razumno je ovo gledati kao igru istovremenog kretanja, tj. da oba igrača donose odluke u isto vrijeme. Prirodan udarac dešnjaka je sa desne strane golmana ili centar, dok je za ljevaka prirodan udarac lijevo od golmana ili centar. S ovime na umu, modeliramo jednostavnu matričnu igru koja je simplifikacija interakcije koja se pojavljuje u penalima. Strateški skupovi od igrača su* $A_1 = A_2 = \{P, N\}$*, gdje* P *predstavlja odabir prirodne strane napadača dok* N *predstavlja odabir neprirodne strane. Ovaj primjer je sličan primjeru par-nepar (primjer 3) u smislu da jedan igrač (u ovom slučaju golman) želi da oba igrača odaberu isto, dok drugi igrač (ovdje napadač) želi da odaberu različito. Ovu igru možemo prikazati tablično, kao u tablici 3.7, gdje s* $p_{a_1 a_2}$ *možemo označiti vjerojatnost da je zabijen gol ako je napadač odabrao* a_1 *i golman je odabrao* a_2*. S obzirom da golman želi napraviti jednak odabir kao napadač, ova igra je takva da vrijedi* $p_{NN} < p_{NP}$*,* $p_{NN} < p_{PN}$*,* $p_{PP} < p_{NP}$ *i* $p_{PP} < p_{PN}$*.*

	N	P
N	p_{NN}	p_{NP}
P	p_{PN}	p_{PP}

Tablica 3.7: Matrična igra povezana sa penalima

Prethodna struktura isplate osigurava, kao u par-nepar, da ekvilibrij zahtijeva korištenje miješanih strategija. U podacima korištenim u [3] prosječne vjerojatnosti dane su u tablici 3.8.

	N	P
N	0.58	0.95
P	0.93	0.70

Tablica 3.8: Isplate iz vjerojatnosti pogotka iz skupa podataka korištenim u [3]

Vidimo da je vjerojatnost pogotka izrazito visoka kada golman ne odabere istu strategiju kao napadač i da kada odaberu isto, golman ima bolje vjerojatnosti kada napadač ne puca na svoju prirodnu stranu. S obzirom na ove vjerojatnosti, jedinstveni Nashov ekvilibrij je *dan sa miješanom strategijom* $(0.38, 0.62)$ *za napadača i* $(0.42, 0.58)$ *za golmana, o čemu čitatelj može više pročitati u* [3]. *Jedan od glavnih zaključaka u* [3] *je da su promatrane frekvencije odabira profesionalnih igrača u danom skupu podataka* $(0.40, 0.60)$ *za napadače i* $(0.42, 0.58)$ *za golmane, što zapravo znači da je ponašanje igrača u prosjeku izuzetno blizu izračunatim Nashovim ekvilibrijima pripadne matrične igre. U ostatku rada autor testira dvije bitne implikacije minimax teorema. Prvo, u ekvilibriju, oba igrača trebaju biti indiferentni pri izboru svojih akcija. Kroz niz statističkih testova, autor pokazuje da se nul hipoteza (da su vjerojatnosti pogotka identične kroz razne strategije) ne može odbaciti na standardnim razinama značajnosti, niti na razini populacije testiranih igrača niti po pojedinim igračima. Drugo, miješane strategije igrača trebaju biti iste u svakom pucanju i stoga trebamo primijetiti da su realizacije igračevih miješanih strategija, tj. njegovi izbori, međusobno nezavisni. To znači da igrač ne bi trebao mijenjati svoje strategije ni previše često ni previše rijetko kako bi njegovo ponašanje bilo konzistentno sa nasumičnosti koji implicira igranje u skladu sa ekvilibrijem. Ovaj drugi dio je posebno zanimljiv jer kada se pita ljude (u istraživanjima obično studente) da generiraju nasumične nizove, npr. bacanje novčića, njihovi nizovi obično pokazuju negativnu autokorelaciju, tj. pojedinci imaju tendenciju izbjegavati ponavljanje istog izbora. No, ovo nije bio slučaj sa nogometnim igračima u istraživanju u* [3]*, gdje se nije mogla odbaciti nul hipoteza da su izbori igrača nezavisni, što proizlazi iz vjerojatnosnih distribucija dobivenih iz njihovih miješanih strategija.*

Literatura

[1] J. Gonzalez-Diaz, I. Garcia-Jurado, M. G. Fiestras-Janeiro, *An introductory Course of Mathematical Game Theory*, Gradute studies in mathematics, American Mathematical Society, 2010.

[2] D. Jankov Maširević, *Teorija odlučivanja udžbenik*, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku - Odjel za matematiku, Osijek, 2022.

[3] I. Palacios-Huerta, *Professionals Play Minimax*, Review of Economic Studies **70** (2003), 395-415

[4] J. von Neumann, *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*, Mathematische Annalen **100** (1928), 295-320

[5] J. von Neumann, O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, 1944.

Sažetak

Ovaj diplomski rad bavi se strateškim igrama. Najprije su definirani osnovni pojmovi iz teorije odlučivanja, što uključuje probleme odlučivanja. U poglavlju ordinalna korisnost, definirana je funkcija korisnosti i neka njena svojstva. Nadalje, rad se bavi linearnom korisnosti, konveksnim problemom odlučivanja te također i von Neumann i Morgenstern funkcijom korisnosti. Definirani su osnovni pojmovi vezani uz strateške igre, nakon čega je detaljno opisan Nashov ekvilibrij, s popratnim primjerima, kao i Nashov teorem. Detaljno su obrađene konačne igre te je na njima definirano miješano proširenje. Poglavlje o bimatričnim igrama bavi se konačnim igrama za dva igrača u matričnom obliku, dok se zadnji dio rada bavi miješanim proširenjem konačne igre nulte sume za dva igrača u matričnom obliku.

Ključne riječi

problem odlučivanja, funkcija korisnosti, uređeno gust skup, linearna funkcija korisnosti, konveksan problem odlučivanja, lutrija, von Neumann i Morgenstern funkcija korisnosti, strateška igra, Nashov ekvilibrij, igra nulte sume za dva igrača, miješano proširenje, bimatrična igra, matrična igra

Strategic games

Summary

This master's thesis deals with strategic games. First, basic terms from decision theory are defined, which includes the decision problems. In the section ordinal utility, utility function and some of its properties are defined. Furthermore, the paper deals with linear utility, convex decision problem, and von Neumann and Morgenstern utility function. Basic terms related to strategic games are defined, after which Nash equilibrium is studied in detail, with accompanying examples, as well as with Nash theorem. Finite games are also described, and within them, mixed extension is defined. The section about bimatrix games deals with two-player finite games in matrix form, while the last part of this master's thesis deals with mixed extension of the two-player zero-sum finite game in matrix form.

Keywords

decision problem, utility function, order dense set, linear utility function, convex decision problem, lotery, von Neumann and Morgenstern utility function, strategic game, Nash equilibrium, two-player zero-sum game, mixed extension, bimatrix game, matrix game

Životopis

Rođen sam 31. ožujka 1999. godine u Osijeku gdje i živim. Pohađao sam osnovnu školu Ljudevita Gaja Osijek, a zatim sam upisao Prirodoslovno-matematičku gimnaziju Osijek. Srednju školu sam završio 2018. godine kada sam upisao prijediplomski sveučilišni studij Matematika na Odjelu za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku. Završetkom studija 2021. godine stekao sam akademski naziv prvostupnika matematike te sam iste godine upisao diplomski studij matematika, smjer Financijska matematika i statistika na Fakultetu primijenjene matematike i informatike (tada Odjel za matematiku), Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku.