Kroneckerov produkt matrica

Benko, Ema

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Fakultet primjenjene matematike i informatike
Sveučilišni prijediplomski studij matematika

Kroneckerov produkt matrica

Završni rad

Mentor:
izv.prof.dr.sc. Zoran Tomljanović

Student:
Ema Benko

Osijek, 2024.

Sadržaj

1 Uvod

Tema ovog završnog rada odnosi se na produkt matrica po imenu Kroneckerov produkt. Sam produkt ime je dobio po značajnom njemačkom matematičaru Leopoldu Kroneckeru (Slika 1a), koji je živio u razdoblju od 7. prosinca 1823. do 29. prosinca 1891. godine. Poznat je po tome što je proučavao razna matematička područja poput algebre i teorije brojeva, ali ne samo matematička, već i mnoge druge kao što su povijest, astronomija i filozofija. Tijekom života ostvario je prijateljstvo s raznim matematičarima, kao što su Ernst Kummer, Evariste Galois te Karl Weierstrass. Više se može pronaći u [5] i [6] .
Budući da je ostalo vrlo malo podataka da je on taj produkt opisao, često se pridaje velik značaj i Johannu Georgu Zehfussu (Slika 1b), po kojemu se taj produkt ujedno naziva i Zehfussov produkt. Naime, Zehfuss je 1858. godine prvi upotrijebio oznaku $\bigotimes$, kojom se i danas označava Kroneckerov produkt. Također, iste je godine objavio i zaključak u listu pod imenom *"Über eine gewisse Determinante"*, koji se odnosio na determinantu matrica A reda m i B reda n, a glasio je $|A \otimes B| = |A|^m |B|^n$.
Više se o tome može pronaći u [7].
Kroneckerov produkt primjenjuje se u rješavanju matričnih jednadžbi, među najpoznatijima su Sylvesterova i Lyapunovljeva jednadžba, koje se primjenom numeričkih metoda mogu riješiti. U ovom radu navest će se teoremi i rezultati vezani za postojanje i jedinstvenost rješenja tih jednadžbi.

(a) L.Kronecker

(b) J.G.Zehfuss

2 Definicija i osnovna svojstva

Definicije, leme, teoremi i korolari koji se koriste u ovom radu preuzeti su iz [1] i [4].

Definicija 1. Kroneckerov produkt matrica $C = [c_{ij}] \in M_{k,l}(\mathbb{F})$ i $D = [d_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, u oznaci $C \otimes D$, definira se kao blok-matrica

$$C \otimes D = \begin{bmatrix} c_{11}D & \cdots & c_{1l}D \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k1}D & \cdots & c_{kl}D \end{bmatrix} \in M_{km,ln}(\mathbb{F}),$$

nad poljem $\mathbb{F}$, koje odgovara skupu $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$.

Pogledajmo primjer Kroneckerovog produkta na konkretnim matricama.

Primjer 1. *Izračunajte $C \otimes D$ te $D \otimes C$, za matrice C i D zadane na sljedeći način:*

$$C = \begin{bmatrix} 11 & 7 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 9 \\ 1 & 8 & 3 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

Rješenje:

$$C \otimes D = \begin{bmatrix} 11D & 7D & 2D & D \\ 3D & 2D & 5D & 9D \\ D & 8D & 3D & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 & 11 & 21 & 7 & 6 & 2 & 3 & 1 \\ 11 & 88 & 7 & 56 & 2 & 16 & 1 & 8 \\ 9 & 3 & 6 & 2 & 15 & 5 & 27 & 9 \\ 3 & 24 & 2 & 16 & 5 & 40 & 9 & 72 \\ 3 & 1 & 24 & 8 & 9 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 8 & 8 & 64 & 3 & 24 & 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

$$D \otimes C = \begin{bmatrix} 3C & C \\ C & 8C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 & 21 & 6 & 3 & 11 & 7 & 2 & 1 \\ 9 & 6 & 15 & 27 & 3 & 2 & 5 & 9 \\ 3 & 24 & 9 & 3 & 1 & 8 & 3 & 1 \\ 11 & 7 & 2 & 11 & 88 & 56 & 16 & 8 \\ 3 & 2 & 5 & 9 & 24 & 16 & 40 & 72 \\ 1 & 8 & 3 & 11 & 8 & 64 & 24 & 8 \end{bmatrix}.$$

Uočimo, u prethodnom primjeru očito ne vrijedi komutativnost Kroneckerovog produkta, tj. vrijedi $C \otimes D \neq D \otimes C$, kao što ni kod običnog množenja matrica to svojstvo općenito ne vrijedi.
Također, vidimo da je matrica C reda 4×3, što iz definicije odgovara redu $k \times l$, a matrica D reda 2×2, što odgovara redu $m \times n$ iz definicije Kroneckerovog produkta. Tada je rezultat $C \otimes D$ blok matrica reda $km \times ln$, tj. u ovom primjeru reda $4 \cdot 2 \times 3 \cdot 2$, odnosno 8×6, što i jesmo dobili.

2.1 Osnovna svojstva

Sada ćemo iskazati i dokazati osnovna svojstva Kroneckerovog produkta poput množenja skalarom, transponiranja, asocijativnosti, distributivnosti (slijeva i zdesna) Kroneckerovog produkta prema zbrajanju matrica. Navedimo ih te i dokažimo.

i) $(\lambda C) \otimes D = C \otimes (\lambda D), \forall\ \lambda \in \mathbb{F}, C \in M_{k,l}(\mathbb{F}), D \in M_{m,n}(\mathbb{F})$

ii) $(C \otimes D)^T = C^T \otimes D^T,$ za $C \in M_{k,l}(\mathbb{F}), D \in M_{m,n}(\mathbb{F})$

iii) $(C \otimes D) \otimes E = C \otimes (D \otimes E),$ za $C \in M_{k,l}(\mathbb{F}), D \in M_{m,n}(\mathbb{F}), E \in M_{r,s}(\mathbb{F})$

iv) $(C + D) \otimes E = C \otimes E + D \otimes E,$ za $C \in M_{k,l}(\mathbb{F}), D \in M_{m,n}(\mathbb{F}), E \in M_{r,s}(\mathbb{F})$

v) $C \otimes (D + E) = C \otimes D + C \otimes E,$ za $C \in M_{k,l}(\mathbb{F}), D \in M_{m,n}(\mathbb{F}), E \in M_{r,s}(\mathbb{F})$

vi) $(C \otimes D)^* = C^* \otimes D^*,$ za $C \in M_{k,l}(\mathbb{F}), D \in M_{m,n}(\mathbb{F})$.

Dokaz svojstava i) do vi), za matrice C, D, E koje izgledaju ovako:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k1} & \cdots & c_{kl} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & \cdots & d_{mn} \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} e_{11} & \cdots & e_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{r1} & \cdots & e_{rs} \end{bmatrix}.$$

i) Najprije pogledajmo čemu je jednako $(\lambda C) \otimes D$.

$$(\lambda C) \otimes D = \begin{bmatrix} \lambda c_{11} D & \cdots & \lambda c_{1l} D \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda c_{k1} D & \cdots & \lambda c_{kl} D \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda c_{11} d_{11} & \cdots & \lambda c_{11} d_{1n} & \cdots & \lambda c_{1l} d_{11} & \cdots & \lambda c_{1l} d_{1n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \lambda c_{11} d_{m1} & \cdots & \lambda c_{11} d_{mn} & \cdots & \lambda c_{1l} d_{m1} & \cdots & \lambda c_{1l} d_{mn} \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ \lambda c_{k1} d_{11} & \cdots & \lambda c_{k1} d_{1n} & \cdots & \lambda c_{kl} d_{11} & \cdots & \lambda c_{kl} d_{1n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \lambda c_{k1} d_{m1} & \cdots & \lambda c_{k1} d_{mn} & \cdots & \lambda c_{kl} d_{m1} & \cdots & \lambda c_{kl} d_{mn} \end{bmatrix}.$$

Sada pogledajmo čemu je jednako $C \otimes (\lambda D)$.

$$C \otimes (\lambda D) = \begin{bmatrix} c_{11}\lambda D & \cdots & c_{1l}\lambda D \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k1}\lambda D & \cdots & c_{kl}\lambda D \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda c_{11}d_{11} & \cdots & \lambda c_{11}d_{1n} & \cdots & \lambda c_{1l}d_{11} & \cdots & \lambda c_{1l}d_{1n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \lambda c_{11}d_{m1} & \cdots & \lambda c_{11}d_{mn} & \cdots & \lambda c_{1l}d_{m1} & \cdots & \lambda c_{1l}d_{mn} \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ \lambda c_{k1}d_{11} & \cdots & \lambda c_{k1}d_{1n} & \cdots & \lambda c_{kl}d_{11} & \cdots & \lambda c_{kl}d_{1n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \lambda c_{k1}d_{m1} & \cdots & \lambda c_{k1}d_{mn} & \cdots & \lambda c_{kl}d_{m1} & \cdots & \lambda c_{kl}d_{mn} \end{bmatrix}.$$

Vidi se da su te dvije matrice jednake, pa je ovo svojstvo dokazano.

ii) Najprije pogledajmo čemu je jednako $(C \otimes D)^T$.

$$(C \otimes D)^T = \begin{bmatrix} c_{11}d_{11} & \cdots & c_{11}d_{1n} & \cdots & c_{1l}d_{11} & \cdots & c_{1l}d_{1n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ c_{11}d_{m1} & \cdots & c_{11}d_{mn} & \cdots & c_{1l}d_{m1} & \cdots & c_{1l}d_{mn} \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ c_{k1}d_{11} & \cdots & c_{k1}d_{1n} & \cdots & c_{kl}d_{11} & \cdots & c_{kl}d_{1n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ c_{k1}d_{m1} & \cdots & c_{k1}d_{mn} & \cdots & c_{kl}d_{m1} & \cdots & c_{kl}d_{mn} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11}d_{11} & \cdots & c_{11}d_{m1} & \cdots & c_{k1}d_{11} & \cdots & c_{k1}d_{m1} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ c_{11}d_{1n} & \cdots & c_{11}d_{mn} & \cdots & c_{k1}d_{1n} & \cdots & c_{k1}d_{mn} \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ c_{1l}d_{11} & \cdots & c_{1l}d_{m1} & \cdots & c_{kl}d_{11} & \cdots & c_{kl}d_{m1} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ c_{1l}d_{1n} & \cdots & c_{1l}d_{mn} & \cdots & c_{kl}d_{1n} & \cdots & c_{kl}d_{mn} \end{bmatrix}.$$

Zatim, pogledajmo čemu je jednako $C^T \otimes D^T$.

$$C^T \otimes D^T = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k1} & \cdots & c_{kl} \end{bmatrix}^T \otimes D^T$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11}D^T & \cdots & c_{k1}D^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1l}D^T & \cdots & c_{kl}D^T \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11}d_{11} & \cdots & c_{11}d_{m1} & \cdots & c_{k1}d_{11} & \cdots & c_{k1}d_{m1} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ c_{11}d_{1n} & \cdots & c_{11}d_{mn} & \cdots & c_{k1}d_{1n} & \cdots & c_{k1}d_{mn} \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ c_{1l}d_{11} & \cdots & c_{1l}d_{m1} & \cdots & c_{kl}d_{11} & \cdots & c_{kl}d_{m1} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ c_{1l}d_{1n} & \cdots & c_{1l}d_{mn} & \cdots & c_{kl}d_{1n} & \cdots & c_{kl}d_{mn} \end{bmatrix}.$$

Može se uočiti da su ove dvije matrice jednake, te je time ovo svojstvo dokazano.

iii) Dokažimo da je $(C \otimes D) \otimes E = C \otimes (D \otimes E)$.

$$(C \otimes D) \otimes E = \begin{bmatrix} c_{11}d_{11}E & \cdots & c_{11}d_{1n}E & \cdots & c_{1l}d_{11}E & \cdots & c_{1l}d_{1n}E \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ c_{11}d_{m1}E & \cdots & c_{11}d_{mn}E & \cdots & c_{1l}d_{m1}E & \cdots & c_{1l}d_{mn}E \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ c_{k1}d_{11}E & \cdots & c_{k1}d_{1n}E & \cdots & c_{kl}d_{11}E & \cdots & c_{kl}d_{1n}E \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ c_{k1}d_{m1}E & \cdots & c_{k1}d_{mn}E & \cdots & c_{kl}d_{m1}E & \cdots & c_{kl}d_{mn}E \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11}d_{11}e_{11} \cdots c_{11}d_{11}e_{1s} \cdots c_{11}d_{1n}e_{11} \cdots c_{11}d_{1n}e_{1s} \cdots c_{1l}d_{11}e_{11} \cdots c_{1l}d_{11}e_{1s} \cdots c_{1l}d_{1n}e_{11} \cdots c_{1l}d_{1n}e_{1s} \\ \vdots \\ c_{11}d_{11}e_{r1} \cdots c_{11}d_{11}e_{rs} \cdots c_{11}d_{1n}e_{r1} \cdots c_{11}d_{1n}e_{rs} \cdots c_{1l}d_{11}e_{r1} \cdots c_{1l}d_{11}e_{rs} \cdots c_{1l}d_{1n}e_{r1} \cdots c_{1l}d_{1n}e_{rs} \\ \vdots \\ c_{11}d_{m1}e_{11} \cdots c_{11}d_{m1}e_{1s} \cdots c_{11}d_{mn}e_{11} \cdots c_{11}d_{mn}e_{1s} \cdots c_{1l}d_{m1}e_{11} \cdots c_{1l}d_{m1}e_{1s} \cdots c_{1l}d_{mn}e_{11} \cdots c_{1l}d_{mn}e_{1s} \\ \vdots \\ c_{11}d_{m1}e_{r1} \cdots c_{11}d_{m1}e_{rs} \cdots c_{11}d_{mn}e_{r1} \cdots c_{11}d_{mn}e_{rs} \cdots c_{1l}d_{m1}e_{r1} \cdots c_{1l}d_{m1}e_{rs} \cdots c_{1l}d_{mn}e_{r1} \cdots c_{1l}d_{mn}e_{rs} \\ \vdots \\ c_{k1}d_{11}e_{11} \cdots c_{k1}d_{11}e_{1s} \cdots c_{k1}d_{1n}e_{11} \cdots c_{k1}d_{1n}e_{1s} \cdots c_{kl}d_{11}e_{11} \cdots c_{kl}d_{11}e_{1s} \cdots c_{kl}d_{1n}e_{11} \cdots c_{kl}d_{1n}e_{1s} \\ \vdots \\ c_{k1}d_{11}e_{r1} \cdots c_{k1}d_{11}e_{rs} \cdots c_{k1}d_{1n}e_{r1} \cdots c_{k1}d_{1n}e_{rs} \cdots c_{kl}d_{11}e_{r1} \cdots c_{kl}d_{11}e_{rs} \cdots c_{kl}d_{1n}e_{r1} \cdots c_{kl}d_{1n}e_{rs} \\ \vdots \\ c_{k1}d_{m1}e_{11} \cdots c_{k1}d_{m1}e_{1s} \cdots c_{k1}d_{mn}e_{11} \cdots c_{k1}d_{mn}e_{1s} \cdots c_{kl}d_{m1}e_{11} \cdots c_{kl}d_{m1}e_{1s} \cdots c_{kl}d_{mn}e_{11} \cdots c_{kl}d_{mn}e_{1s} \\ \vdots \\ c_{k1}d_{m1}e_{r1} \cdots c_{k1}d_{m1}e_{rs} \cdots c_{k1}d_{mn}e_{r1} \cdots c_{k1}d_{mn}e_{rs} \cdots c_{kl}d_{m1}e_{r1} \cdots c_{kl}d_{m1}e_{rs} \cdots c_{kl}d_{mn}e_{r1} \cdots c_{kl}d_{mn}e_{rs} \end{bmatrix}.$$

iv) Pokažimo da vrijedi: $(C+D)\otimes E = C\otimes E + D\otimes E$.

$$(C+D)\otimes E = \begin{bmatrix} (c_{11}+d_{11})E & \cdots & (c_{1l}+d_{1n})E \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (c_{k1}+d_{m1})E & \cdots & (c_{kl}+d_{mn})E \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (c_{11}+d_{11})e_{11}\cdots(c_{11}+d_{11})e_{1s}\cdots(c_{1l}+d_{1n})e_{11}\cdots(c_{1l}+d_{1n})e_{1s} \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ (c_{11}+d_{11})e_{r1}\cdots(c_{11}+d_{11})e_{rs}\cdots(c_{1l}+d_{1n})e_{r1}\cdots(c_{1l}+d_{1n})e_{rs} \\ \vdots \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\ (c_{k1}+d_{m1})e_{11}\cdots(c_{k1}+d_{m1})e_{1s}\cdots(c_{kl}+d_{mn})e_{11}\cdots(c_{kl}+d_{mn})e_{1s} \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ (c_{k1}+d_{m1})e_{r1}\cdots(c_{k1}+d_{m1})e_{rs}\cdots(c_{kl}+d_{mn})e_{r1}\cdots(c_{kl}+d_{mn})e_{rs} \end{bmatrix}.$$

Vidimo sada $C\otimes E + D\otimes E =$

$$\begin{bmatrix} c_{11}e_{11}\cdots c_{11}e_{1s}\cdots c_{1l}e_{11}\cdots c_{1l}e_{1s} \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ c_{11}e_{r1}\cdots c_{11}e_{rs}\cdots c_{1l}e_{r1}\cdots c_{1l}e_{rs} \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ c_{k1}e_{11}\cdots c_{k1}e_{1s}\cdots c_{kl}e_{11}\cdots c_{kl}e_{1s} \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ c_{k1}e_{r1}\cdots c_{k1}e_{rs}\cdots c_{kl}e_{r1}\cdots c_{kl}e_{rs} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11}e_{11}\cdots d_{11}e_{1s}\cdots d_{1n}e_{11}\cdots d_{1n}e_{1s} \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ d_{11}e_{r1}\cdots d_{11}e_{rs}\cdots d_{1n}e_{r1}\cdots d_{1n}e_{rs} \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ d_{m1}e_{11}\cdots d_{m1}e_{1s}\cdots d_{mn}e_{11}\cdots d_{mn}e_{1s} \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ d_{m1}e_{r1}\cdots d_{m1}e_{rs}\cdots d_{mn}e_{r1}\cdots d_{mn}e_{rs} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (c_{11}+d_{11})e_{11}\cdots(c_{11}+d_{11})e_{1s}\cdots(c_{1l}+d_{1n})e_{11}\cdots(c_{1l}+d_{1n})e_{1s} \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ (c_{11}+d_{11})e_{r1}\cdots(c_{11}+d_{11})e_{rs}\cdots(c_{1l}+d_{1n})e_{r1}\cdots(c_{1l}+d_{1n})e_{rs} \\ \vdots \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\ (c_{k1}+d_{m1})e_{11}\cdots(c_{k1}+d_{m1})e_{1s}\cdots(c_{kl}+d_{mn})e_{11}\cdots(c_{kl}+d_{mn})e_{1s} \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ (c_{k1}+d_{m1})e_{r1}\cdots(c_{k1}+d_{m1})e_{rs}\cdots(c_{kl}+d_{mn})e_{r1}\cdots(c_{kl}+d_{mn})e_{rs} \end{bmatrix}.$$

Uočimo, ove dvije matrice su jednake pa svojstvo iv) vrijedi.

v) $C\otimes D + C\otimes E =$

$$\begin{bmatrix} c_{11}d_{11} \cdots c_{11}d_{1n} \cdots c_{1l}d_{11} \cdots c_{1l}d_{1n} \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ c_{11}d_{m1} \cdots c_{11}d_{mn} \cdots c_{1l}d_{m1} \cdots c_{1l}d_{mn} \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ c_{k1}d_{11} \cdots c_{k1}d_{1n} \cdots c_{kl}d_{11} \cdots c_{kl}d_{1n} \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ c_{k1}d_{m1} \cdots c_{k1}d_{mn} \cdots c_{kl}d_{m1} \cdots c_{kl}d_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11}e_{11} \cdots c_{11}e_{1s} \cdots c_{1l}e_{11} \cdots c_{1l}e_{1s} \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ c_{11}e_{r1} \cdots c_{11}e_{rs} \cdots c_{1l}e_{r1} \cdots c_{1l}e_{rs} \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ c_{k1}e_{11} \cdots c_{k1}e_{1s} \cdots c_{kl}e_{11} \cdots c_{kl}e_{1s} \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ c_{k1}e_{r1} \cdots c_{k1}e_{rs} \cdots c_{kl}e_{r1} \cdots c_{kl}e_{rs} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11}(d_{11}+e_{11}) \cdots c_{11}(d_{1n}+e_{1s}) \cdots c_{1l}(d_{11}+e_{11}) \cdots c_{1l}(d_{1n}+e_{1s}) \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ c_{11}(d_{m1}+e_{r1}) \cdots c_{11}(d_{mn}+e_{rs}) \cdots c_{1l}(d_{m1}+e_{r1}) \cdots c_{1l}(d_{mn}+e_{rs}) \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ c_{k1}(d_{11}+e_{11}) \cdots c_{k1}(d_{1n}+e_{1s}) \cdots c_{kl}(d_{11}+e_{11}) \cdots c_{kl}(d_{1n}+e_{1s}) \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ c_{k1}(d_{m1}+e_{r1}) \cdots c_{k1}(d_{mn}+e_{rs}) \cdots c_{kl}(d_{m1}+e_{r1}) \cdots c_{kl}(d_{mn}+e_{rs}) \end{bmatrix}$$

$$= C \otimes (D+E).$$

vi) Pokažimo da je $(C \otimes D)^* = C^* \otimes D^*$.

$$(C \otimes D)^* = \begin{bmatrix} c_{11}D & \cdots & c_{1l}D \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k1}D & \cdots & c_{kl}D \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} \bar{c}_{11}D^* & \cdots & \bar{c}_{1l}D^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{c}_{k1}D^* & \cdots & \bar{c}_{kl}D^* \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{c}_{11} & \cdots & \bar{c}_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{c}_{k1} & \cdots & \bar{c}_{kl} \end{bmatrix} \otimes D^* = C^* \otimes D^*.$$

Ovime smo dokazali svojstva Kroneckerovog produkta. Pogledajmo sad nekoliko primjera u kojima ćemo upotrijebiti neka od prethodno dokazanih svojstava.

Primjer 2. *Neka su dane matrice* $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$ *i* $E = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. *Odredimo* $C^T \otimes D^T$ *te* $C \otimes D + C \otimes E$.

Rješenje: Znamo, iz prethodno dokazanog svojstva ii) da je

$$C^T \otimes D^T = (C \otimes D)^T.$$

$$(C \otimes D)^T = \begin{bmatrix} 1 \cdot D & 2 \cdot D & 3 \cdot D \\ 4 \cdot D & 0 \cdot D & 5 \cdot D \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 8 & 6 & 16 & 12 & 24 & 18 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 32 & 24 & 0 & 0 & 40 & 30 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 4 & 32 \\ 0 & 6 & 0 & 24 \\ 2 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 3 & 24 & 5 & 40 \\ 0 & 18 & 0 & 30 \end{bmatrix}.$$

Također znamo iz svojstva v) da je $C \otimes D + C \otimes E = C \otimes (D + E)$. *Označimo s* $M := D + E = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$.

$$C \otimes M = \begin{bmatrix} 1 \cdot M & 2 \cdot M & 3 \cdot M \\ 4 \cdot M & 0 \cdot M & 5 \cdot M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 & 10 & 6 & 15 \\ 8 & 6 & 16 & 12 & 24 & 18 \\ 8 & 20 & 0 & 0 & 10 & 25 \\ 32 & 24 & 0 & 0 & 40 & 30 \end{bmatrix}.$$

Često si postavljamo pitanje, kad razmišljamo o matricama, što se događa s nulmatricama, pa tako i ovdje, kod Kroneckerovog produkta. Pogledajmo na jednom primjeru.

Primjer 3. *Pokažite da je* $C \otimes D = 0$ *ako i samo ako je* $C = 0$ *ili* $D = 0$.
Rješenje: Pokažimo prvo nužnost. Pretpostavimo da je $C \otimes D = 0$. *Uzmemo li da su matrice* C *i* D *istog reda kao i u definiciji, tj.* $C = [c_{ij}] \in M_{k,l}(\mathbb{F})$ *i* $D = [d_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, *tada je*

$$0 = C \otimes D = \begin{bmatrix} c_{11}D & \cdots & c_{1l}D \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k1}D & \cdots & c_{kl}D \end{bmatrix},$$

a matrica je jednaka nuli ako su joj svi elementi jednaki nula, odnosno $c_{ij}D = 0, \forall i = 1, ..., k, \forall j = 1, ..., l$. *Iz toga direktno slijedi da je* $c_{ij} = 0, \forall i = 1, ..., k, \forall j = 1, ..., l$ *ili je* $D = 0$. *Zbog toga što su* c_{ij} *elementi matrice* C *i svi su jednaki nula, tako će i matrica* C *biti jednaka nula. Time je dokazana nužnost.*
Pokažimo sad dovoljnost. Pretpostavimo da je $C = 0$. *Tada je*

$$C \otimes D = \begin{bmatrix} 0 \cdot D & \cdots & 0 \cdot D \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 \cdot D & \cdots & 0 \cdot D \end{bmatrix} = 0.$$

Analogno vrijedi i za $D = 0$ *pa je ovime pokazana i dovoljnost, a time i primjer.*

Osim što se inače pitamo za nulmatrice, također je važno i je li matrica regularna i postoji li njezin inverz, ali prije toga pokažimo jednu lemu.

Lema 1. Neka su $C \in M_{k,l}(\mathbb{F}), D \in M_{m,n}(\mathbb{F}), E \in M_{l,r}(\mathbb{F})$ i $F \in M_{n,s}$. Tada je $(C \otimes D)(E \otimes F) = CE \otimes DF$.

Dokaz. Neka je $C = [c_{ih}]$ te $E = [e_{hj}]$. Tada je $C \otimes D = [c_{ih} D]$ i $E \otimes F = [e_{hj} F]$. Sada je i,j-ti blok oblika

$$(C \otimes D)(E \otimes F)_{ij} = \sum_{h=1}^{l} c_{ih}\ D\ e_{hj}\ F = \left[\sum_{h=1}^{l} c_{ih} e_{hj} \right] DF.$$

Suma u uglatim zagradama predstavlja množenje matrica C i E, a to je $CE \otimes DF$. □

Nakon što smo pokazali prethodnu lemu, možemo iskazati i dokazati korolar vezan uz nesingularne matrice.

Korolar 1. *Ako su $C \in M_m(\mathbb{F})$ i $D \in M_n(\mathbb{F})$ nesingularne matrice, tada je i $C \otimes D$ te $(C \otimes D)^{-1} = C^{-1} \otimes D^{-1}$.*

Dokaz. Znamo iz svojstava za obično množenje nesingularnih matrica da je $(A \cdot B)(A^{-1} B^{-1}) = I$. Provjerimo vrijedi li isto za ovaj produkt. Iskoristit ćemo prethodno dokazanu Lemu1, u ovom dokazu.

$$(C \otimes D)(C^{-1} \otimes D^{-1}) = CC^{-1} \otimes DD^{-1} = I \otimes I = I.$$

□

3 Operator vektorizacije

Sada ćemo definirati pojam koji će nam biti od važnosti u kasnijim primjenama, a to je vektorizacija matrice.

Definicija 2. Uz svaku matricu $C = [c_{ij}] \in M_{k,l}(\mathbb{F})$ povezujemo vektor $vec\ C \in (\mathbb{F})^{kl}$ definiran s

$$vec\ C = \left[c_{11}, \cdots, c_{k1}, c_{12}, \cdots, c_{k2}, \cdots, c_{1l}, \cdots, c_{kl}\right]^T$$

i nazivamo ga operator vektorizacije matrice C.

Navedimo jedan primjer vektoriziranja matrice.

Primjer 4. *Neka je* $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 8 \\ 3 & 4 & 10 & 7 \end{bmatrix}$. *Tada je operator* $vec\ C = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ 10 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$.

Sada ćemo navesti osnovna svojstva operatora vektorizacije koja će nam biti od važnosti u kasnijim prelascima iz matrične jednadžbe u jednadžbu pomoću operatora vektorizacije.

Teorem 1. *Neka su* $C, D \in M_{k,l}(\mathbb{F})$ *i neka su* $\gamma \in \mathbb{F}$, $c \in \mathbb{F}^l$. *Tada vrijede sljedeća svojstva:*

i) $vec\ (C + D) = vec\ C + vec\ D$

ii) $vec\ (\gamma C) = \gamma vec\ C$

iii) $vec\ (c^T) = vec\ (c) = c$.

Dokaz. i) $vec\ (C + D) = vec \begin{bmatrix} c_{11} + d_{11} \cdots c_{1l} + d_{1l} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ c_{k1} + d_{k1} \cdots c_{kl} + d_{kl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} + d_{11} \\ \vdots \\ c_{k1} + d_{k1} \\ \vdots \\ c_{1l} + d_{1l} \\ \vdots \\ c_{kl} + d_{kl} \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{k1} \\ \vdots \\ c_{1l} \\ \vdots \\ c_{kl} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} \\ \vdots \\ d_{k1} \\ \vdots \\ d_{1l} \\ \vdots \\ d_{kl} \end{bmatrix} = vec\ C + vec\ D.$$

ii) $$vec\ (\gamma C) = vec \begin{bmatrix} \gamma c_{11} & \cdots & \gamma c_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma c_{k1} & \cdots & \gamma c_{kl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma c_{11} \\ \vdots \\ \gamma c_{k1} \\ \vdots \\ \gamma c_{1l} \\ \vdots \\ \gamma c_{kl} \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{k1} \\ \vdots \\ c_{1l} \\ \vdots \\ c_{kl} \end{bmatrix} = \gamma vec\ C.$$

iii) $$vec\ (c^T) = vec\ (\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_l \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_l \end{bmatrix} = vec\ (c) = c.$$

$\square$

4 Primjene Kroneckerovog produkta

Kroneckerov produkt primjenjuje se u raznim područjima matematike, ali ponajviše u rješavanju matričnih jednadžbi.

4.1 Linearne matrične jednadžbe

Najčešće pitanje koje si postavljamo pri rješavanju matričnih jednadžbi jest je li jednadžba rješiva, tj. ima li rješenje. Zato imamo linearne matrične jednadžbe čija definicija glasi:

Definicija 3. Neka su $C \in M_{k,l}(\mathbb{F}), D \in M_{m,n}(\mathbb{F}), E \in M_{k,n}(\mathbb{F})$. Jednadžba oblika

$$CXD = E$$

naziva se linearna matrična jednadžba, a matrica $X \in M_{l,m}(\mathbb{F})$ njezino rješenje.

Primjena Kroneckerovog produkta je u svrhu transformacije linearnih matričnih jednadžbi, a to se čini pomoću operatora vektorizacije, kojeg smo definirali u prethodnom odlomku. U nastavku rada oznaka X_p predstavljat će p-ti stupac matrice X.

Lema 2. Neka su $C \in M_{k,l}(\mathbb{F}), D \in M_{m,n}(\mathbb{F}), E \in M_{k,n}(\mathbb{F})$. Matrična jednadžba $CXD = E$ je ekvivalentna nk jednadžbi u lm nepoznanica i dana je s $(D^T \otimes C)vec\ X = vec\ E$, gdje je $vec\ (CXD) = (D^T \otimes C)vec\ X$.

Dokaz. Pogledajmo najprije p-ti stupac matrice CXD.

$$\begin{aligned}
(CXD)_p &= C(XD)_p \\
&= CXD_p \\
&= C\left[\sum_{i=1}^{m} d_{ip}X_i\right] \qquad \text{(Koristimo blokovsko množenje matrica, vidi [4])} \\
&= C[d_{1p} \quad d_{2p} \quad \dots \quad d_{mp}] \cdot [{X_1}^T \quad {X_2}^T \quad \dots \quad {X_m}^T]^T \\
&= [d_{1p}C \quad d_{2p}C \quad \dots \quad d_{mp}C]\text{vec } X \\
&= (D_p^T \otimes C)vec\ X.
\end{aligned}$$

Odnosno, $vec\ (CXD) = \begin{bmatrix} D_1^T \otimes C \\ D_2^T \otimes C \\ \vdots \\ D_n^T \otimes C \end{bmatrix} vec\ X = (D^T \otimes C)vec\ X.$ □

4.2 Sylvesterova jednadžba

U ovom poglavlju bavit ćemo se Sylvesterovom jednadžbom, koja je ime dobila po engleskom matematičaru Jamesu Josephu Sylvesteru. On je živio u razdoblju od 1814. do 1897. godine. Ostavio je značajan utjecaj u teoriji matrica, numeričkoj teoriji, kombinatorici. Prvi je upotrijebio naziv "diskriminanta" u kubičnim jednadžbama. U sjećanje i čast njemu, 1901. godine, Kraljevsko društvo u Londonu osnovalo je nagradu nazvanu po njemu, Sylvester Medal. Za više vidi [8].

Definicija 4. Matričnu jednadžbu oblika

$$CX + XD = E,$$

gdje su $C = [c_{ij}] \in M_k(\mathbb{F}), D = [d_{ij}] \in M_l(\mathbb{F}), E = [e_{ij}] \in M_{k,l}(\mathbb{F})$ nazivamo Sylvesterova matrična jednadžba.

Budući da smo već spomenuli da će nam operator vektorizacije biti od važnosti u primjenama, sada možemo Sylvesterovu jednadžbu zapisati pomoću operatora vektorizacije. Stoga, jednadžba $CX + XD = E$ postaje $[(I \otimes C) + (D^T \otimes I)] vec\ X = vec\ E$. Može se lako pokazati da su ove jednadžbe ekvivalentne.
Na $CX + XD = E$ djelujemo operatorom vektorizacije i dobijemo

$$vec\ (CX + XD) = vec\ E.$$

Primjenom Teorema 1 i) dobijemo

$$vec\ (CX) + vec\ (XD) = vec\ E$$

$$vec\ (CXI) + vec\ (IXD) = vec\ E$$

Sada direktnom primjenom Leme 2 dobijemo

$$(I^T \otimes C) vec\ X + (D^T \otimes I) vec\ X = vec\ E.$$

Znamo da je jedinična matrica $I^T = I$, pa primjenom osnovnog svojstva operatora vektorizacije slijedi

$$[(I \otimes C) + (D^T \otimes I)] vec\ X = vec\ E.$$

Ovim izrazom uvodimo novi pojam, a to je Kroneckerova suma, čiju ćemo definiciju sada iskazati.

Definicija 5. Neka su $C \in M_k(\mathbb{F}), D \in M_l(\mathbb{F})$. Matricu $lk \times lk$ oblika

$$(I_l \otimes C) + (D \otimes I_k)$$

nazivamo Kroneckerova suma matrica C i D.

Iskazat ćemo teorem koji govori o svojstvenim vrijednostima Kroneckerove sume.

Teorem 2. *Neka su dane matrice $C \in M_k(\mathbb{F})$ i $D \in M_l(\mathbb{F})$. Ako je $\lambda \in \sigma(C)$ i $x \in \mathbb{C}^k$ odgovarajući svojstveni vektor od C te ako je $\mu \in \sigma(B)$ i $y \in \mathbb{C}^l$ odgovarajući svojstveni vektor od D, onda je $\lambda + \mu$ svojstvena vrijednost Kroneckerove sume $(I_l \otimes C) + (D \otimes I_k)$, i $y \otimes x \in \mathbb{C}^{kl}$ odgovarajući svojstveni vektor. Svaka svojstvena vrijednost Kroneckerove sume nastaje kao suma svojstvenih vrijednosti matrice C i matrice D, i $(I_l \otimes C)$ komutira s $(D \otimes I_k)$.*

Dokaz. Vidi [1], str. 269. □

Dakle, kako svojstvenim vrijednostima Kroneckerove sume od C i D odgovara suma svojstvenih vrijednosti matrica C i D, sada nas zanima kako ćemo dobiti rješenje Sylvesterove jednadžbe. Sljedeći teorem govori nešto o jedinstvenosti rješenja Sylvesterove jednadžbe, a upravo se koriste svojstvene vrijednosti matrica.

Teorem 3. *Neka su $C = [c_{ij}] \in M_k(\mathbb{F})$ i $D = [d_{ij}] \in M_l(\mathbb{F})$. Jednadžba*

$$CX + XD = E$$

ima jedinstveno rješenje $X \in M_{k,l}(\mathbb{F})$, za svaku matricu $E = [e_{ij}] \in M_{k,l}(\mathbb{F})$ ako i samo ako $\sigma(C) \cap \sigma(-D) = \emptyset$.

Dokaz. Kako su svojstvene vrijednosti matrice D^T iste kao i one od D, matrica koeficijenata od $[(I \otimes C) + (D^T \otimes I)] vec\ X = vec\ E$ ima, prema Teoremu 2, svojstvenu vrijednost 0 ako i samo ako je $\sigma(C) \cap \sigma(-D) \neq \emptyset$. Odnosno ako je matrica koeficijenata singularna. Dakle, nenul svojstvenu vrijednost ima ako i samo ako je regularna, tj. ako je $\sigma(C) \cap \sigma(-D) = \emptyset$. □

Drugim riječima, rješenje Sylvesterove jednadžbe jedinstveno je ako i samo ako je $\lambda_i + \mu_j \neq 0$, gdje su λ_i svojstvene vrijednosti matrice C, a μ_j svojstvene vrijednosti matrice D, za $i = 0, ..., k$ i $j = 0, ..., l$. To vidimo iz Kroneckerove sume, te svojstvenih vrijednosti vezanih uz Kroneckerovu sumu (za više vidi [3]).
Navedimo jedan primjer Sylvesterove jednadžbe.

Primjer 5. *Neka su zadane matrice* $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *i* $E = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, *te neka je* $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix}$ *matrica koju trebamo izračunati. Treba riješiti Sylvesterovu jednadžbu* $CX + XD = E$. *Budući da smo izveli ekvivalentan oblik jednadžbe pomoću operatora vektorizacije, i ovdje ćemo ga primijeniti. On glasi*

$$[(I \otimes C) + (D^T \otimes I)] vec\, X = vec\, E.$$

Koristit ćemo Kroneckerov produkt kako bismo izračunali sljedeće:

$$I \otimes C = \begin{bmatrix} 1 \cdot C & 0 \cdot C \\ 0 \cdot C & 1 \cdot C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D^T \otimes I = \begin{bmatrix} 2 \cdot I & 0 \cdot I \\ 1 \cdot I & 1 \cdot I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zbrojit ćemo dobivene matrice:

$$(I \otimes C) + (D^T \otimes I) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Sada možemo zapisati sustav:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

koji je ekvivalentan sustavu od 4 jednadžbe s 4 nepoznanice i glasi:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= -1 \\ 2x_1 + 5x_2 &= 3 \\ x_1 + 2x_3 + 2x_4 &= 2 \\ x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Rješavanjem sustava dobivamo traženo rješenje jednadžbe $X = \begin{bmatrix} -1 & \frac{7}{2} \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

4.3 Lyapunovljeva jednadžba

Alexsandr Lyapunov, čije se prezime često piše i u drugim oblicima (nastalo je zbog prilagodbe jezicima), poput Ljapunov, Liapunov ili Liapounoff, bio je ruski matematičar, fizičar koji je živio u razdoblju od 1857. do 1918. godine. Za života je proučavao područja fizike i teorije vjerojatnosti. 1880. godine dobio je zlatnu medalju za rad na hidrostatici. Napisao je mnoge znanstvene radove od kojih su poznatiji: *"On the equilibrium of a heavy body in a heavy fluid contained vessel of a fixed form"* i *"On the potential of hydrostatic pressure"*. Za više vidi [9].

Definicija 6. Matričnu jednadžbu oblika

$$CX + XC^T = E,$$

gdje su matrice $C = [c_{ij}], E = [e_{ij}] \in M_k(\mathbb{F})$ nazivamo Lyapunovljeva jednadžba.

Uočimo da je Lyapunovljeva jednadžba dana na skoro isti način kao i Sylvesterova, samo što u Sylvesterovu umjesto matrice D uvrstimo C^T. Analogno, Lyapunovljevu jednadžbu također možemo zapisati u ekvivalentnom obliku pomoću opratora vektorizacije, pa dobivamo

$$[(I \otimes C) + ((C^T)^T \otimes I)]vec\ X = vec\ E,$$

odnosno znamo $(C^T)^T = C$ pa je

$$[(I \otimes C) + (C \otimes I)]vec\ X = vec\ E$$

ekvivalentan oblik Lyapunovljeve jednadžbe.
Teoremi vezani uz Sylvesterovu jednadžbu analogno vrijede i kod Lyapunovljeve.

Teorem 4. *Neka su $C = [c_{ij}], E = [e_{ij}] \in M_k(\mathbb{F})$. Tada jednadžba*

$$CX + XC^T = E$$

ima jedinstveno rješenje ako i samo ako $\sigma(C) \cap \sigma(-C^T) = \emptyset$.

Dokaz. Analogno se provodi kao i dokaz Teorema 3. Dakle, matrica koeficijenata od $[(I \otimes C) + (C \otimes I)]vec\ X = vec\ E$ ima, prema Teoremu 2, nenul svojstvenu vrijednost ima ako i samo ako je regularna, tj. ako je $\sigma(C) \cap \sigma(-C^T) = \emptyset$, tj. ako matrice C i $-C^T$ nemaju zajedničkih svojstvenih vrijednosti. $\square$

Navedimo sada jedan primjer Lyapunovljeve jednadžbe.

Primjer 6. *Neka su zadane matrice* $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *i* $E = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, *te neka je* $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix}$ *matrica koju trebamo izračunati. Treba riješiti Lyapunovljevu jednadžbu* $CX + XC^T = E$. *Budući da smo izveli ekvivalentan oblik jednadžbe pomoću operatora vektorizacije, i ovdje ćemo ga primijeniti. On glasi*

$$[(I \otimes C) + (C \otimes I)] vec\ X = vec\ E.$$

Koristit ćemo Kroneckerov produkt kako bismo izračunali sljedeće:

$$I \otimes C = \begin{bmatrix} 1 \cdot C & 0 \cdot C \\ 0 \cdot C & 1 \cdot C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C \otimes I = \begin{bmatrix} 2 \cdot I & 1 \cdot I \\ 1 \cdot I & 0 \cdot I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zbrojit ćemo dobivene matrice:

$$(I \otimes C) + (C \otimes I) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sada možemo zapisati sustav:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

koji je ekvivalentan sustavu od 4 jednadžbe s 4 nepoznanice i glasi:

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 3 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 &= 3 \\ x_2 + x_3 &= -2. \end{aligned}$$

Rješavanjem sustava dobivamo traženo rješenje jednadžbe $X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$.

Postoje neke numeričke metode za rješavanje Sylvesterove jednadžbe, poput Bartels-Stewartovog algoritma te Hessenberg-Schurove metode. Obje metode sastoje se od nekoliko koraka u kojima se tranformiraju matrice uz pomoć sličnosti, a nakon toga se riješi transformirana jednadžba i na kraju se dođe do traženog rješenja X. Također, kao što postoje numeričke metode za Sylvesterovu jednadžbu, postoje i za Lyapunovljevu jednadžbu. Najpoznatiji je Bartels-Stewartov algoritam kojim se dođe do rješenja jednadžbe X. No, dobiveni je sustav kvadratne dimenzije što u praksi zahtjeva ouno memorije, a taj algoritam, koji ga bude rješavao, će zbog toga biti velike složenosti. Također, H_2-norma može se dobiti iz konačnodimenzionalne Sylvesterove i Lyapunovljeve jednadžbe. Više o tome u [4].

5 Literatura

Literatura

[1] R.A. HORN, C.R. JOHNSON, *Topics in matrix analysis* , Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[2] B.J. BROXSON, *The Kronecker Product*, University of North Florida, Florida, 2006.

[3] H. ZHANG, F. DING, *On the Kronecker Products and Their Applications*, Jiangnan University, Wuxi, 2013.

[4] B.N. DATTA, *Numerical Methods for Linear Control Systems*, Academic Press, 2003.

[5] *Mac Tutor*, dostupno na https://mathshistory.Kronecker/

[6] *Hrvatska enciklopedija*, dostupno na https://www.enciklopedija.hr/clanak/kronecker-leopold

[7] *Mac Tutor*, dostupno na https://mathshistory.Zehfuss/

[8] *Mac Tutor*, dostupno na https://mathshistory.Sylvester/

[9] *Mac Tutor*, dostupno na https://mathshistory.Lyapunov/

6 Sažetak

U ovom radu bavili smo se Kroneckerovim produktom matrica. To je operacija dviju matrica koja rezultira blok-matricom. Naveli smo i dokazali osnovna svojstva ovog produkta poput množenja skalarom, transponiranja, asocijativnosti, distributivnosti slijeva i zdesna u odnosu na zbrajanje matrica. Nadalje, uveli smo novi pojam, a to je operator vektorizacije koji nam je bio važan u transformaciji Sylvesterove i Lyapunovljeve jednadžbe u jednadžbe pomoću operatora vektorizacije, gdje smo došli do pojma Kromeckerova suma. Nadalje spominjali smo i svojstvene vrijednosti Kroneckerovog produkta i Kroneckerove sume kako bismo dokazali postojanje i jedinstvenost rješenja Sylvesterove i Lyapunovljeve jednadžbe. Postoje neke metode za rješavanje tih jednadžbi.

7 Ključne riječi

- Kroneckerov produkt
- Operator vektorizacije
- Linearne matrične jednadžbe
- Sylvesterova jednadžba
- Lyapunovljeva jednadžba

8 Engleski prijevod

Title: The Kronecker product of matrices

Summary: In this work, we studied the Kronecker product of matrices. It is an operation on two matrices, resulting in a block matrix. We stated and proved the basic properties of this product, such as multiplication by a scalar, transposition, associativity, left and right distributivity with respect to matrix addition. Furthermore, we introduced a new term, named the vectorization operator, which was important in the transformation of the Sylvester and Lyapunov equations into equations using the vectorization operator. This results with the term Kronecker sum. Furthermore, we mentioned the eigenvalues of the Kronecker product and the Kronecker sum in order to prove the existence and uniqueness of the solution of the Sylvester and Lyapunov equations. We presented one method for the solution of the Sylvester and Lyapunov equations based on the vectorization operator.

Keywords:

- Kronecker product
- Vectorization operator
- Linear matrix equations
- Sylvester equation
- Lyapunov equation

9 Životopis

Ja sam Ema Benko.
Osobne vještine koje posjedujem su organiziranost, kreativnost, pedantnost i ambicioznost.
Od 2009. do 2013. godine pohađala sam OŠ "Ivan Meštrović", Vrpolje, Područna škola Čajkovci. Nakon toga, od 2013. do 2017. godine pohađala sam OŠ "Ivan Meštrović" u Vrpolju. Zatim, od 2017. do 2021. godine pohađala sam Gimnaziju "Matija Mesić" u Slavonskom Brodu, smjer: Jezična gimnazija, te od 2021. do 2024. godine Fakultet primijenjene matematike i informatike u Osijeku, smjer: Prijediplomski studij matematika.
Radila sam preko studentskog servisa od listopada 2022. do siječnja 2023. godine kao demonstratorica na Fakultetu primijenjene matematike i informatike u Osijeku, te od listopada 2023.do siječnja 2024. godine kao demonstratorica na Fakultetu primijenjene matematike i informatike u Osijeku.
Od stranih jezika znam engleski i njemački.