Primjena SVD dekompozicije na kompresiju slike

Šanić, Lucija-Katarina

Undergraduate thesis / Završni rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, School of Applied Mathematics and Informatics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Fakultet primijenjene matematike i informatike**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:149250

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike

Sveučilišni prijediplomski studij Matematika i računarstvo

Primjena SVD dekompozicije na kompresiju slike

Završni rad

Mentor:
prof. dr. sc. Kristian Sabo

Student:
Lucija-Katarina Šanić

Osijek, 2024.

Sadržaj

1 | Uvod

Cilj ovog završnog rada je objasniti primjenu SVD dekompozicije kao primjer primjene matrične dekompozicije na kompresiju slike te prikazati tu primjenu na slici u boji i grayscale slici. Kompresija slike je proces smanjenja količine podataka potrebnih za prikaz slike s ciljem uštede prostora pri pohrani podataka. Važno je očuvati kvalitetu slike tj. da bitni dijelovi slike budu i dalje što više vidljivi.

Kako bismo primijenili dekompoziciju na singularne vrijednosti na problem kompresije slike, sliku prvo zapisujemo pomoću matrice čiji su elementi pixeli slike. Ukoliko je riječ o grayscale slici, pixel slike predstavlja nijansu sive boje, a ona je zadana kao vrijednost od 0 do 255. Gdje 0 predstavlja crnu boju, a 1 predstavlja potpuno bijelu boju. Nadalje, ukoliko je riječ o slici u boji, svaka će komponenta boje (crvena, zelena i plava) biti zapisana kao zasebna matrica gdje su elementi matrica nijanse tih boja.

Dekompozicija na singularne vrijednosti je jedna od najčešće korištenih dekompozicija u numeričkoj linearnoj algebri, a posebno je korisna jer postoji za svaku matricu. Jedna od njenih brojnih primjena je i prilikom kompresije slike budući da njenom upotrebom matricu koja predstavlja našu originalnu sliku možemo svesti na matricu nižeg ranga. Rezultat toga je smanjen broj podataka potrebnih pri pohrani s minimalnim kompromisom kvalitete krajnje dobivene slike.

U prvom je poglavlju rada općenito opisana dekompozicija na singularne vrijednosti sa svojim svojstvima te se potom kroz poglavlja 2 i 3 objašnjava njena primjena na grayscale sliku te sliku u boji uz primjere i pripadajući kod.

Za implementaciju navedenog korišten je programski jezik Python te ugrađene biblioteke poput Numpy biblioteke te Matplotlib biblioteke i njenog podmodula Pyplot-a.

2 | Osnove digitalne slike

Nedavni napreci u tehnologiji digitalnih slika, zajedno s probojima u performansama digitalnog hardvera i softvera, pokrenuli su brz rast poslovnih primjena digitalnog snimanja, što je rezultiralo sve većom potrebom za pohranom i prijenosom digitalnih slika. Kompresija digitalnih slika je tehnologija smanjenja količine podataka potrebnih za pohranu slike kako bi se uštedio prostor za pohranu i smanjila brzina prijenosa. Kompresija digitalnih slika nudi rješenje za raznolike aplikacije snimanja koje zahtijevaju veliku količinu podataka za predstavljanje digitalnih slika. Te aplikacije uključuju sustave za upravljanje slikovnim dokumentima, arhiviranje slika, medicinsko snimanje, zabavu, itd... Međutim, prilikom kompresije slike, slika često gubi na kvaliteti. Cilj je da svi ključni dijelovi slike ostanu jasno vidljivi tj. da se očuva kvaliteta slike.

Digitalna slika dimenzija $m \times n$ može se zapisati kao matrica dimenzija $m \times n$ gdje se element matrice (i,j) tumači kao svjetlina pixela slike. Za grayscale slike, promatraju se elementi matrice u rasponu od 0 do 255 i tumače se kao pixeli od crne (0) preko različitih nijansi sive, sve do bijele boje (1). Postupak je također moguće primijeniti i na digitalnu sliku u boji. Za RGB format slike, (i,j) element matrice promatra se zasebno za svaku od tri boje (crvene, zelene i plave) te se vrijednost elementa tumači kao nijansa boje koju promatramo. Ta se vrijednost kreće od 0 do 255 (u 8-bitnom sustavu). To znači da se RGB slika predstavlja koristeći tri matrice tj. troslojna je. Razlučivost zaslona je ukupan broj pixela koji je potreban za prikaz slike. Viša rezolucija rezultira većim brojem detalja, ali i većom količinom podataka. (Za više detalja o kompresiji digitalne slike vidjeti [6] i [7]).

3 | Općenito o SVD dekompoziciji

2.1 Definicija SVD dekompozicije i osnovni teoremi

Prema [1], dekompozicija na singularne vrijednosti definira se na sljedeći način:

Definicija 1. *Neka je* $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *za* $m, n \in \mathbb{N}$. *Rastav matrice* $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U\Sigma V}^*$ *zovemo singularna dekompozicija matrice* $\boldsymbol{A}$*, ako su* $\boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ *i* $\boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *ortogonalne, a* $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *dijagonalna.*
$\boldsymbol{\Sigma} = diag(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\min(m,n)})$*, pri čemu vrijedi* $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_{\min(m,n)} \geq 0$*, a brojeve* $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\min(m,n)}$ *zovemo singularne vrijednosti matrice* $\boldsymbol{A}$.
Stupce matrice $\boldsymbol{U}$ *zovemo lijevi, a stupce matrice* $\boldsymbol{V}$ *desni singularni vektori matrice* $\boldsymbol{A}$.

Pritom se ortogonalne matrice definiraju na sljedeći način (vidjeti[1]):

Definicija 2. *Ortogonalna matrica* $\boldsymbol{Q}$ *je takva kvadratna matrica za koju vrijedi* $\boldsymbol{QQ}^T = \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}$*, odnosno*

$$\sum_k q_{ik}q_{jk} = \delta_{ij} \quad i \quad \sum_k q_{ki}q_{kj} = \delta_{ij},$$

tj. njeni redci i njeni stupci čine ortonormirani sustav vektora.

Može se pokazati da je svaka ortogonalna matrica $\mathbf{Q}$ regularna matrica za koju vrijedi $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$. Ima važno svojstvo da čuva l_2 normu, tj.

$$\|\mathbf{Qa}\|_2 = (\mathbf{Qa})^T(\mathbf{Qa}) = \mathbf{a}^T\mathbf{Q}^T Q\mathbf{a} = \mathbf{a}^T\mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|_2.$$

Ortogonalna matrica geometrijski predstavlja rotaciju ili simetriju prostora.

Teorem 3.0.1 (vidjeti [5], Teorem 7.2)**.** *Ako je* $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$*, tada postoje ortogonalne matrice* $\boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ *i* $\boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *takve da je*

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U\Sigma V}^*,$$
$$\boldsymbol{\Sigma} = diag(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\min(m,n)}),$$
$$\textit{pri čemu vrijedi } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_{\min(m,n)} \geq 0.$$

Činjenica da SVD dekompozicija postoji za sve matrice omogućuje njenu učestalu upotrebu u brojnim problemima, od kojih je, uz problem broja najmanjih kvadrata, jedan i problem kompresije slike. Stoga uvodimo teorem o egzistenciji dekompozicije na singularne vrijednosti.

2.2 Svojstva SVD dekompozicije

Među raznim geometrijskim i algebarskim svojstvima SVD dekompozicije, nalaze se i ona koja omogućuju primjenu SVD dekompozicije na problem kompresije slike. Kako bismo ilustrirali tu primjenu, prvo se upoznajemo sa nekim od brojnih svojstava spomenute dekompozicije.
Neka od svojstava opisana su prema [2], Teoremom 3.3:

Teorem 3.0.2 (Theorem 3.3, [2]). *Neka je*

$$A = U\Sigma V^* \tag{3.1}$$

SVD dekompozicija $m \times n$ *matrice* $\mathbf{A}$, *gdje je* $m \geq n$.
Vrijede sljedeća svojstva:
a) Neka je $\mathbf{A}$ *simetrična matrica sa svojstvenim vrijednostima* λ_i *i ortonormiranim svojstvenim vektorima* $\mathbf{u}_i$. *Točnije,*

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^T$$

je svojstvena dekompozicija matrice $\mathbf{A}$, *gdje je*

$$\mathbf{\Lambda} = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad \mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n] \quad i \quad \mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{I}.$$

Tada je SVD dekompozicija matrice $\mathbf{A}$, $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$, *gdje je* $\sigma_i = |\lambda_i|$ *te* $\mathbf{v}_i = sign(\lambda_i)\mathbf{u}_i$ *uz uvjet da je* $sign(0) = 1$.

b) Svojstvene vrijednosti simetrične matrice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ *su* σ_i^2. *Desni singularni vektori* $\mathbf{v}_i$ *su odgovarajući ortonormirani svojstveni vektori.*

c) Svojstvene vrijednosti simetrične matrice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ *su* σ_i^2 *i* $(m-n)$ *nula. Lijevi singularni vektori* $\mathbf{u}_i$ *su odgovarajući ortonormirani svojstveni vektori za svojstvene vrijednosti* σ_i^2. *Za svojstvenu vrijednost jednaku 0, može se uzeti bilo kojih* $(m-n)$ *drugih ortogonalnih vektora kao svojstvene vektore.*

d) Neka je $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & 0 \end{bmatrix}$, *gdje je* $\mathbf{A}$ *kvadratna matrica i* $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$ *je SVD dekompozicija matrice* $\mathbf{A}$. *Neka je* $\mathbf{\Sigma} = diag(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]$ *i* $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$. *Tada* $2n$ *svojstvenih vrijednosti matrice* $\mathbf{H}$ *odgovara* $\pm\sigma_i$, *s odgovarajućim jediničnim svojstvenim vektorima* $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \mathbf{v}_i \\ \pm\mathbf{u}_i \end{bmatrix}$.

e) Ako je matrica $\mathbf{A}$ *punog ranga, rješenje* $\min_x \|\mathbf{A}x - b\|_2$ *je* $x = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^T b$.

f) $\|\mathbf{A}\|_2 = \sigma_1$. *Ako je* $\mathbf{A}$ *također kvadratna i regularna, tada je* $\|\mathbf{A}^{-1}\|_2^{-1} = \sigma_n$ *i* $\|\mathbf{A}\|_2 \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$.

g) Pretpostavimo da je $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \cdots = \sigma_n = 0$. *Tada je rang matrice* $\mathbf{A}$ *jednak* r. *Jezgra matrice* $\mathbf{A}$, *tj. potprostor vektora* $\mathbf{v}$ *takvih da je* $\mathbf{A}\mathbf{v} = 0$, *je prostor generiran stupcima od* $r+1$ *do* n *matrice* $\mathbf{V}$, *tj. prostor generiran vektorima* $(\mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n)$. *Prostor raspona matrice* $\mathbf{A}$, *tj. potprostor vektora oblika* $\mathbf{A}\mathbf{w}$ *za sve* $\mathbf{w}$, *je prostor generiran* *stupcima od 1 do r matrice* $\mathbf{U}$*, tj. prostor generiran vektorima* $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r)$.

h) Neka je S^{n-1} *jedinična sfera u* $\mathbb{R}^n$*:* $S^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\|_2 = 1\}$*. Neka je* $\mathbf{A} \cdot S^{n-1}$ *slika* S^{n-1} *pod djelovanjem matrice* $\mathbf{A}$*:* $\mathbf{A} \cdot S^{n-1} = \{\mathbf{Ax} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ i } \|\mathbf{x}\|_2 = 1\}$*. Tada je* $\mathbf{A} \cdot S^{n-1}$ *elipsoid centriran u ishodištu* $\mathbb{R}^m$*, s glavnim osima* $\sigma_i \mathbf{u}_i$*.*

i) Neka je $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n]$ *i* $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n]$*, tako da je* $\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^T = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$ *(zbroj matrica rang-1). Tada je matrica rang-k* $< n$ *najbliža* $\mathbf{A}$ *(mjerena s* $\|\cdot\|_2$*)* $\mathbf{A}_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$*, a* $\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_k\|_2 = \sigma_{k+1}$*. Također možemo napisati* $\mathbf{A}_k = \mathbf{U\Sigma}_k \mathbf{V}^T$*, gdje je* $\mathbf{\Sigma}_k = diag(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, 0, \ldots, 0)$*.*

Od navedenih svojstava, za kompresiju nam je digitalne slike posebno bitno svojstvo pod i).
Ono nam govori kako je

$$\mathbf{A}_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$$

najbolja rang-k aproksimacija od $\mathbf{A}$ budući da minimizira

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_k\|_2 = \sigma_{k+1}$$

To nam također govori i sljedeći teorem (vidjeti[3]):

Teorem 3.0.3 (Theorem 4.2, [3]). *Pretpostavimo da su* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *i da je* $rang(\mathbf{B}) = k \leq rang(\mathbf{A}) = r$*. Tada vrijedi:*

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\| \geq \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_k\| = \sigma_{k+1}.$$

gdje je $\mathbf{A}_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$*. To jest,* $\mathbf{A}_k$ *je najbolja aproksimacija matrice* $\mathbf{A}$ *ranga k u* L_2 *normi.*

Može se pokazati da isto vrijedi i za Frobeniusovu normu.

4 | Primjena SVD dekompozicije matrice na kompresiju slike

U ovom ćemo poglavlju ilustrirati posljednji dio Teorema 3.3 koristeći ga za primjer kompresije slike.

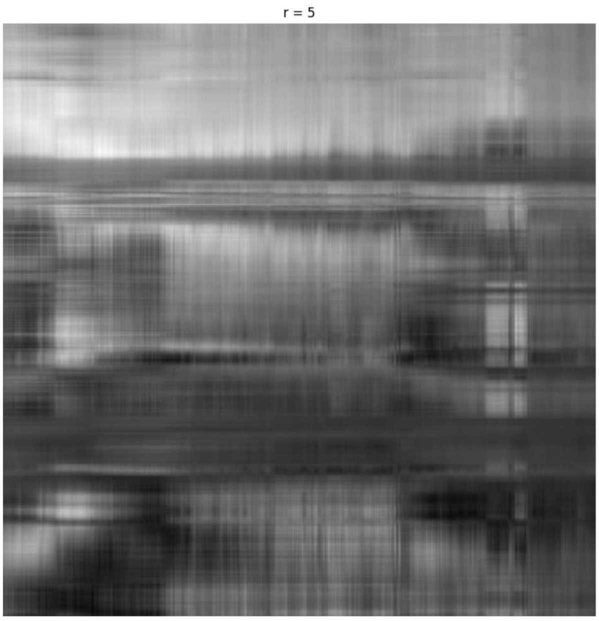
Kao što smo objasnili u prvom poglavlju, digitalna slika dimenzija $m \times n$ se vrlo lako zapiše kao matrica $m \times n$, gdje se element (i, j) tumači kao svjetlina piksela (i, j). Umjesto da pohranjujemo ili prenosimo sve elemente matrice dimenzija $m \times n$ kako bismo prikazali sliku, često preferiramo komprimirati sliku pohranjujući značajno manji broj podataka iz kojih još uvijek možemo barem približno rekonstruirati originalnu sliku.

Kako bismo pohranili vektore $\mathbf{u}_1$ do $\mathbf{u}_k$ i $\sigma_1\mathbf{v}_1$ do $\sigma_k\mathbf{v}_k$ potrebno nam je $m \cdot k + n \cdot k = (m + n) \cdot k$ riječi, iz kojih možemo rekonstruirati matricu $\mathbf{A}_k$. Za usporedbu, za pohranu matrice $\mathbf{A}$ (točnije $\mathbf{A}_k$) potrebno je $m \cdot n$ riječi, što je značajno više ako je k mali. Zato ćemo $\mathbf{A}_k$ koristiti kao našu komprimiranu sliku, pohranjenu korištenjem $(m + n) \cdot k$ riječi.

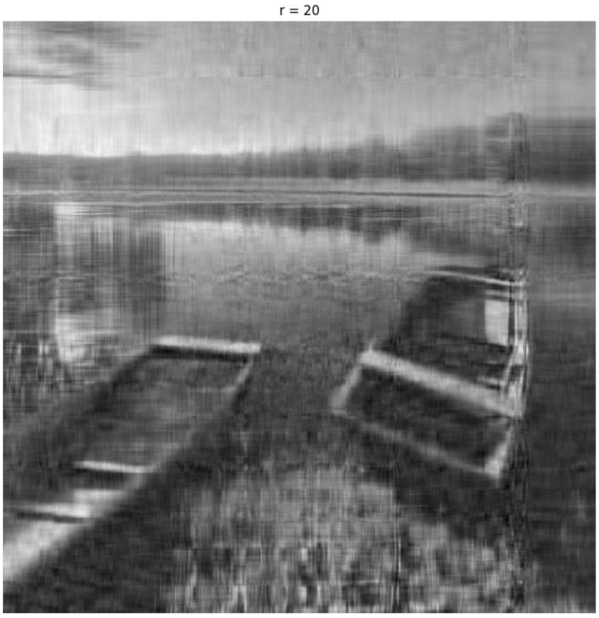
Originalna slika, slika 6.3 dimenzija je 834 x 819 pixela te odgovara matrici veličine 834 x 819 označenoj kao $\mathbf{A}$. Neka je $\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^T$ SVD dekompozicija matrice $\mathbf{A}$. Dio i) Teorema 3.3 nam kaže da je $\mathbf{A}_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$ najbolja aproksimacija ranga-k matrice $\mathbf{A}$, u smislu minimiziranja $\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_k\|_2 = \sigma_{k+1}$. Za pohranu $\mathbf{u}_1$ do $\mathbf{u}_k$ i $\sigma_1\mathbf{v}_1$ do $\sigma_k\mathbf{v}_k$ potrebno nam je samo $1653 \cdot k$ riječi, iz kojih možemo rekonstruirati $\mathbf{A}_k$. U usporedbi s tim, za pohranu $\mathbf{A}$ (ili $\mathbf{A}_k$ eksplicitno) potrebno je 683046 riječi, što je puno više kada je k mali broj. Stoga ćemo koristiti $\mathbf{A}_k$ kao našu komprimiranu sliku.

Slika 6.3 prikazuje originalnu sliku koju želimo komprimirati. Ostale slike, 4.2, 4.3 i 4.4 prikazuju aproksimacije za različite vrijednosti ranga k: 5, 20 i 100. (Za više informacija o primjeni SVD dekompozicije matrice na kompresiju slike vidjeti [4]).

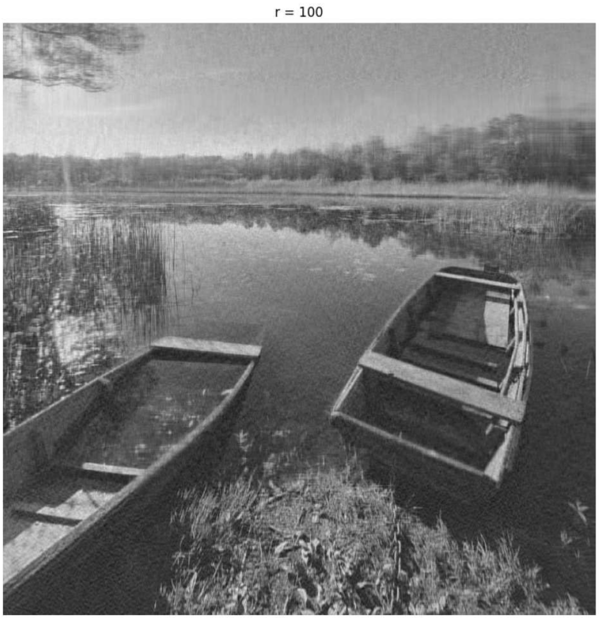
Slika 4.1: Originalna slika.



Slika 4.2: Rang k = 5



Slika 4.3: Rang k = 20



Slika 4.4: Rang k = 100

4.1 Kvalitativna analiza kompresije slike

Originalna slika je oštra i jasna s dobro definiranim detaljima. Primjećujemo da je za rang k=5 slika vrlo zamućena te se ne može razaznati što ona prikazuje. Povećavanjem ranga sa 5 na 20 već vidimo bitnu promjenu te se mogu razaznati dva čamca kao najbitniji dijelovi slike. Međutim, teksture su pojednostavljene i nema finih detalja.

Usporedbom slike 4.3 i originalne slike, vidimo da je slika dosta izgubila na kvaliteti te ne vidimo previše detalja. Tek kada nam je broj singularnih vrijednosti skočio sa 20 na 100 vidimo dosta detalja na slikama. To ne znači da se one ne razlikuju od originala, već da razlike postaju minimalne povećavanjem ranga k tj. porastom broja singularnih vrijednosti.

4.2 Efikasnost kompresije slike

Omjer kompresije slike predstavlja omjer između veličine originalne slike te komprimirane slike, odnosno, koliko je komprimirana slika manja u odnosu na originalnu.

Kako bismo izračunali omjer kompresije slike, koristimo svojstvo i) Teorema 3.3. Točnije, omjer kompresije slike dobijemo na slijedeći način: $\frac{(m+n)\cdot k}{m\cdot n}$. Uvrštavajući naše vrijednosti ranga k u prijašnju formulu, dobijemo slijedeću tablicu:

k	Omjer kompresije slike
5	0.012
20	0.048
100	0.242

Tablica 4.1: Omjer kompresije slike.

Zaključujemo da porastom ranga k raste i omjer kompresije slike. Npr., ako je naš rang k = 5 dobijemo omjer kompresije slike jednak 0.012. To znači da je dobivena slika 0.012 puta manja od originalne slike.

	Originalna slika	k = 5	k = 20	k = 100
Veličina slike u KB	773	301	417	565

Tablica 4.2: Veličina slike u KB.

Promatrajući tablicu 4.2 može se zaključiti kako primjenom SVD dekompozicije matrice na matricu slike opada broj potrebnih podataka za pohranu slike. Međutim, povećanjem ranga k raste i broj podatala potrebnih za pohranu slike.

5 | Primjena SVD dekompozicije matrice na grayscale sliku

Do sada je objašnjen proces prikazivanja slike pomoću matrice te što njeni elementi predstavljaju za grayscale sliku. Također je primijenjena SVD dekompozicija na dobivenu matricu. U nastavku slijedi implementacija spomenutog uz dodatne primjere.

5.1 Implementacija

```
from matplotlib.image import imread
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import os
```

U priloženom vidimo biblioteke koje su korištene prilikom implementacije. Biblioteka Matplotlib služi za vizualizaciju podataka (crtanje dijagrama, grafova, itd...), a "matplotlib.image" njen je podmodul. Funkcija "imread" koristi se prilikom učitavanja slika iz datoteka. Koristi kako bi slike zapisala u obliku matrica tj. nizova koje Python lako obrađuje. Ona podržava razne formate slika od kojih je jedan i PNG format koji je korišten kao primjer prijašnje. "Matplotlib.pyplot" koristan je prilikom kreiranja linijskih grafova, dijagrama raspršenja, itd... NumPy je biblioteka za rad s matricama te nudi razne matematičke funkcije za izvođenje numeričkih operacija nad tim matricama tj. nizovima. Naposljetku, biblioteka "os" omogućava interakciju između operativnog sustava i Python koda. Ključna je za rad s datotekama i direktorijima.

```
plt.rcParams[’figure.figsize’] = [10, 10]

A = imread(’camac.jpg’)
X = np.mean(A, -1);
img = plt.imshow(X)
img.set_cmap(’gray’)
plt.axis(’off’)
plt.show()
```

Nadalje, korištenjem `plt.rcParams['figure.figsize']` funkcije postavljene su dimenzije figure koje prikazujemo na 10 x 10 inča. Korištenjem `imread` funkcije učitavamo sliku pod nazivom `camac.jpg` u varijablu **A**. Linija "**X** = np.mean(**A**, -1) ;" konvertira sliku iz RGB formata u grayscale sliku tj. nijanse sive boje. To radi tako što računa srednju vrijednost duž zadnje dimenzije (koja odgovara kanalima boje) za svaku točku slike. Na taj način stvara 2D niz gdje su svi kanali svedeni u jedan, tj. stvarajući sliku u nijansama sive boje, sada pod nazivom **X**.

Funkcija "imshow()" prikazuje sliku **X**. "`img.set_cmap('gray')`" postavlja colormap (kartu boja) na nijanse sive boje dok "plt.axis('off')" omogućuje da sakrijemo osi na slici. Na kraju "plt.show()" prikazuje sve naše aktivne figure u prozoru sa slikom, omogućujući nam da vidimo rezultat prijašnjeg postupka.

Kako bismo primijenili svojstva SVD dekompozicije na sliku koju smo prijašnje učitali i pripremili za daljnji postupak, koristimo slijedeći kod:

```
1  U, S, VT = np.linalg.svd(X,full_matrices=False)
2  S = np.diag(S)
3
4  j = 0
5  for r in (5, 20, 100, 200):
6
7      Xapprox = U[:,:r] @ S[0:r,:r] @ VT[:r,:]
8      plt.figure(j+1)
9      j += 1
10     img = plt.imshow(Xapprox)
11     img.set_cmap('gray')
12     plt.axis('off')
13     plt.title('r = ' + str(r))
14     plt.show()
```

Prva linija koda računa SVD dekompoziciju matrice **X** koristeći funkciju `linalg.svd`. Funkcija dekomponira matricu **X** na tri matrice: **U**, **S** i **VT**. **U** je matrica lijevih singularnih vektora, **VT** je matrica desnih singularnih vektora, a predstavlja transponiranu **V** matricu. **S** je vektor singularnih vrijednosti.

`full_matrices=False` koristi se kako bi se izračunali samo najvažniji singularni vektori i singularne vrijednosti što može biti praktično kod rada s velikim matricama. Druga linija koda pretvara vektor singularnih vrijednosti u dijagonalnu matricu. Nakon inicijalizacije brojača, koristimo for petlju kako bismo postavljali naš rang r na različite vrijednosti, ovdje su to 5, 20, 100 i 200. Iduća linija rekonstruira približnu sliku pri čemu koristi prvih r singularnih vrijednosti. To u kodu postignemo korištenjem: $\mathbf{U}[:,:r]$ što predstavlja prvih r lijevih singularnih vektora, $\mathbf{V}^T[:r,:]$ prvih r desnih singularnih vektora te korištenjem $\mathbf{S}[0:r,:r]$ uzimamo prvih r singularnih vrijednosti i stavljamo ih u dijagonalnu matricu. Za množenje matrica koristimo operator "@".

U sljedećoj liniji stvaramo novu figuru za prikaz slike, a (j+1) koristimo za indeksiranje figure te nakon toga povećavamo brojač za jedan. Slijedi prikaz približne slike "Xapprox" slike korištenjem "imshow()" funkcije te postavljanje boja na nijanse sive. Korištenjem "plt.title('r = 0 + str(r))" postavljamo naslov na sliku koji nam govori koji je rang korišten.

Još jedan primjer korištenja gore objašnjenje implementacije na grayscale slici 5.1 vidimo u prilogu :

Slika 5.1: Originalna slika

Slika 5.2: Rang r=20

Slika 5.3: Rang r=100

Slika 5.4: Rang r=200

Pripadajuća tablica veličine slike prikazana je u nastavku pod nazivom 5.1 Veličina slike u KB:

	Originalna slika	k = 20	k = 100	k = 200
Veličina slike u KB	881	412	557	657

Tablica 5.1: Veličina slike u KB.

6 | Primjena SVD dekompozicije matrice na sliku u boji

6.1 Implementacija

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
image=plt.imread("priroda.jpg")
plt.imshow(image)
plt.axis('off')
```

Implementaciju započinjemo uvođenjem potrebnih biblioteka. Njihovu smo ulogu objasnili u poglavlju prije. Potom učitamo željenu sliku; u ovom slučaju to je "priroda.jpg".

```
np.shape(image)

image_red= image[:,:,0]
image_red
np.shape(image_red)

image_blue = image[:,:,1]
image_green = image[:,:,2]

U_red, s_red, V_red = np.linalg.svd(image_red)
[np.shape(x) for x in [U_red, s_red, V_red]]
np_diag(s_red)

U_blue, s_blue, V_blue = np.linalg.svd(image_blue)
U_green, s_green, V_green = np.linalg.svd(image_green)
```

Korištenjem "np.shape()" na našoj slici "image" sliku pretvaramo iz RGB formata u uređenu trojku (širina, visina, 3) gdje tri predstavlja broj kanala (crveni, zeleni i plavi).

Za ekstrakciju crvenog kanala iz slike koristimo:
`image_red = image[:, :, 0]` te potom primjenjujući "np.shape()" rezultat pretvaramo u uređenu dvojku (širina,visina). Zatim uzimamo plavi i zeleni kanal. Nakon toga pozivamo SVD dekompoziciju na svakom od kanala.

```
rank=5
compress_red=U_red[:, :rank] @ np.diag(s_red[:rank])@V_red[:rank, :]
compress_red
```

Rank predstavlja broj singularnih vrijednosti koje želimo zadržati pri kompresiji slike. U ovom slučaju, postavlili smo ga na pet, što znači da ćemo koristiti samo prvih pet singularnih vrijednosti za aproksimaciju slike. U ovom kontekstu, `compress_red` predstavlja komprimirani crveni kanal slike nastao koristeći prvih pet singularnih vrijednosti.

```
compress_red=compress_red.astype(int)
compress_red
```

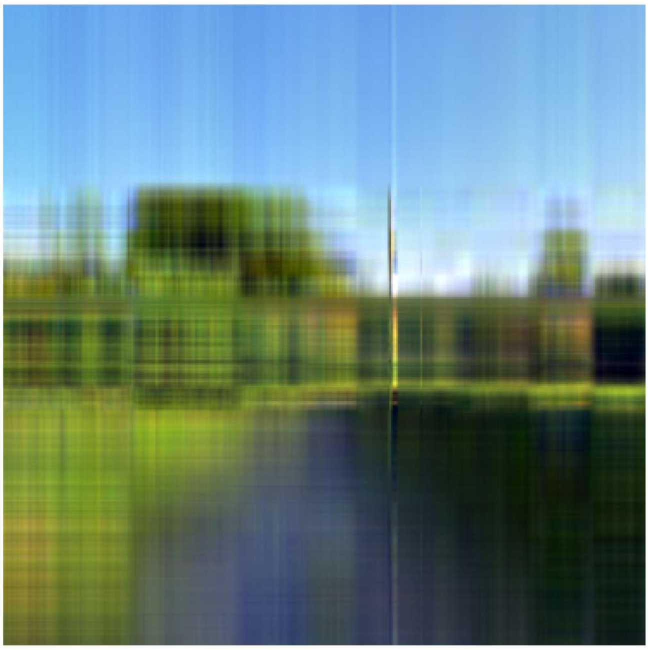
Metoda "astype()" služi za pretvaranje elemenata NumPy niza u drugi tip podataka, ovdje u cijele brojeve.

```
def compress(rank):
    compress_red=U_red[:, :rank]@ np.diag(s_red[:rank])@V_red[:rank, :]
    compress_red=compress_red.astype(int)

    compress_blue=U_blue[:, :rank] @ np.diag(s_blue[:rank])@V_blue[:rank, :]
    compress_blue=compress_blue.astype(int)

    compress_green=U_green[:, :rank]@ np.diag(s_green[:rank])@V_green[:rank, :]
    compress_green=compress_green.astype(int)


    compressed_array=np.stack((compress_red, compress_blue, compress_green), axis=2)

    plt.imshow(compressed_array)
    plt.axis('off')
```

Definiramo funkciju "compress" koja prima rang tj. rank te koristi "astype()" na sva tri kanala i funkcijom "stack" razdvojena tri kanala nanovo kombiniramo u početnu sliku. Naposljetku korištenjem "imshow()" funkcije prikazujemo dobivenu sliku.

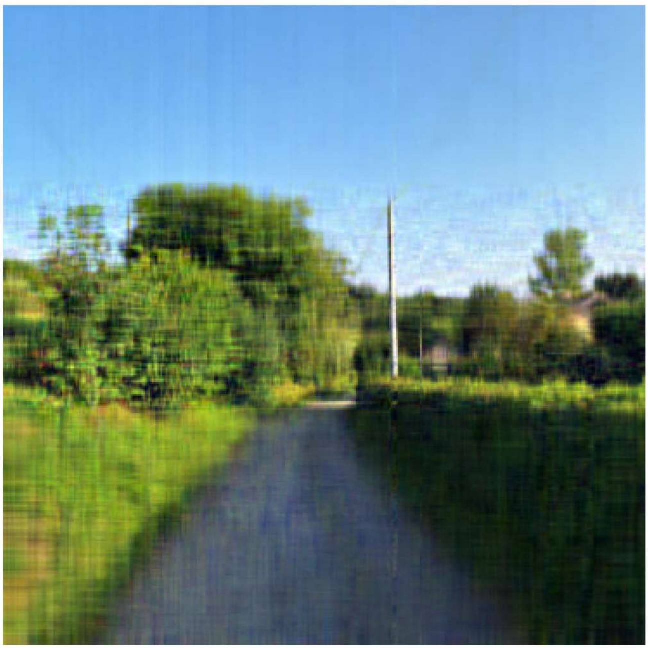
Primjer korištenja SVD dekompozicije matrice na kompresiji slike u boji vidimo na sljedećim slikama:

Slika 6.1: Originalna slika

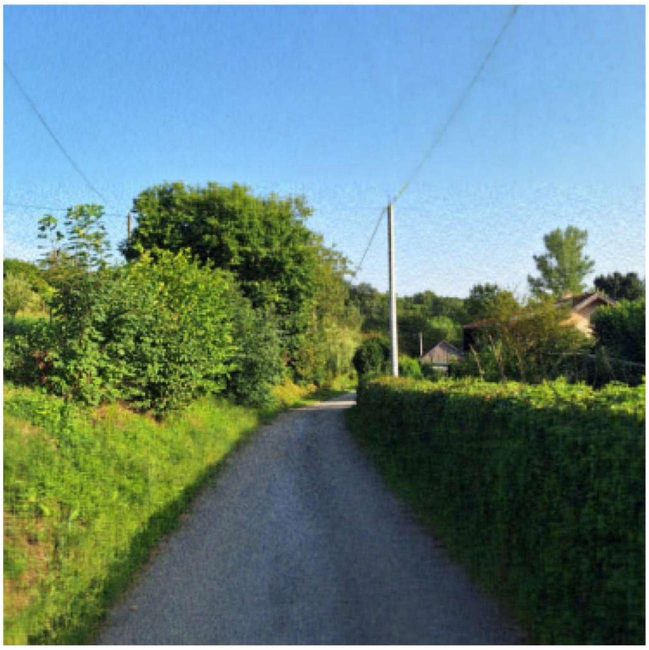


Slika 6.2: Rang r=5

Pripadajuća tablica veličine slike prikazana je u nastavku pod nazivom 6.1 Veličina slike u boji u KB:



Slika 6.3: Rang r=20



Slika 6.4: Rang r=100

	Originalna slika	k = 5	k = 20	k = 100
Veličina slike u KB	295	155	216	277

Tablica 6.1: Veličina slike u boji u KB.

Literatura

[1] J. Demmel, *Applied Numerical Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, PA, 1997.

[2] Rudolf Scitovski, *Numerička matematika*, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, 2015.

[3] C. Eckart and G. Young, *The Approximation of One Matrix by Another of Lower Rank*, Psychometrika, vol. 1, no. 3, 1936, pp. 211–218.

[4] S. Jelić, Z. Ivančević, *Primjena SVD rastava matrice u dohvatu informacija i kompresiji slike*, Osječki matematički list, vol.16 ,no.1 ,2016. ,pp. 57–59.

[5] N. Truhar, *Numerička linearna algebra*, Odjel za matematiku, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, 2010..

[6] H. R. Swathi et al., *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, vol. 263, no. 042082, 2017., pp. 6–9.

[7] R. C. Gonzalez, *Digital Image Processing*, Third Edition, University of Tennessee, 2008.

Sažetak

Ovaj rad istražuje primjenu SVD dekompozicije matrice na problem kompresije slike, s posebnim naglaskom na grayscale slike i slike u boji. SVD je moćan alat koji omogućuje dekompoziciju matrice slike u tri komponente: $\mathbf{U}$, $\mathbf{\Sigma}$ i $\mathbf{V}^T$, gdje $\mathbf{U}$ i $\mathbf{V}^T$ predstavljaju ortogonalne matrice, a $\mathbf{\Sigma}$ je dijagonalna matrica koja sadrži singularne vrijednosti.

Za grayscale slike, SVD omogućuje kompresiju uklanjanjem manjih singularnih vrijednosti koje doprinose manje značajno u rekonstruiranju slike dok za slike u boji, proces kompresije slike proširujemo na tri kanala: crveni, zeleni i plavi. Svaki se kanal tretira kao zasebna grayscale slika i primjenjuje se SVD dekompozicija.

Ključne riječi

kompresija slike, ortogonalna matrica, SVD dekompozicija matrice, rang matrice, omjer kompresije slike

Application of SVD Decomposition to Image Compression

Summary

This paper explores the application of SVD decomposition to the problem of image compression, with a particular focus on grayscale images and color images. SVD is a powerful tool that enables the decomposition of an image matrix into three components: $\mathbf{U}$, $\mathbf{\Sigma}$, and $\mathbf{V}^T$, where $\mathbf{U}$ and $\mathbf{V}^T$ are orthogonal matrices, and $\mathbf{\Sigma}$ is a diagonal matrix which contains singular values.

For grayscale images, SVD enables compression by removing smaller singular values that contribute less significantly to the reconstruction of the image. For RGB format images, the compression process is extended to three channels: red, green, and blue. Each channel is treated as a separate grayscale image and SVD decomposition is applied to each one.

Keywords

Image compression, orthogonal matrix, SVD decomposition of a matrix, rank of a matrix, image compression ratio