

# Nastava geometrije - izazovi, strategije i motivacija u učenju

---

Korpak, Martina

Master's thesis / Diplomski rad

2024

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, School of Applied Mathematics and Informatics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Fakultet primijenjene matematike i informatike**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:781115>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-11-12**



**mathos**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of School of Applied Mathematics and Informatics](#)





SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU

FAKULTET PRIMIJENJENE MATEMATIKE I INFORMATIKE

Sveučilišni diplomski studij Matematika i informatika, modul: nastavnički

# **Nastava geometrije izazovi, strategije i motivacija u učenju**

DIPLOMSKI RAD

Mentor:

**izv.prof.dr.sc.Ljerka Jukić Matic**

Student:

**Martina Korpak**

Osijek, 2024.



# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Geometrija u osnovnim i srednjim školama</b>	<b>3</b>
2.1	Kurikulum nastave geometrije . . . . .	3
2.2	Važnost poučavanja geometrije . . . . .	5
2.3	Greške u poučavanju geometrije . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Van Hiele-ove razine učenja geometrije</b>	<b>9</b>
3.1	Faze učenja . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Uspješno poučavanje geometrije</b>	<b>13</b>
<b>5</b>	<b>Digitalni alati u nastavi geometrije</b>	<b>15</b>
5.1	GeoGebra . . . . .	15
<b>6</b>	<b>Zanimljivi zadaci iz nastave geometrije</b>	<b>17</b>
<b>7</b>	<b>Zaključak</b>	<b>25</b>
	<b>Literatura</b>	<b>27</b>
	<b>Sažetak</b>	<b>29</b>
	<b>Summary</b>	<b>31</b>
	<b>Životopis</b>	<b>33</b>



# 1 | Uvod

Geometrija bi, kao grana matematike, trebala biti jedan od vrhunaca nastave matematike u osnovnim i srednjim školama (Gardiner, 2016). Geometrija se učenicima intuitivno čini veoma privlačna i praktična, no ukoliko se ona poučava na pogrešan način, učenicima postaje apstraktna i teška. Zato učenike treba poticati na njihovu kreativnost i sve što je apstraktno približiti im na njima blizak način. Geometrija nudi veliku slobodu za crtanje i konstruiranje zanimljivih geometrijskih likova, te nudi slobodu izrade lijepih i zanimljivih geometrijskih tijela. Alati koji nam omogućuju izradu ovakvih geometrijskih likova i tijela često su učenicima lako dostupni i iznenađujuće jednostavni. Kada se geometriji u nastavi pristupi na ovako inovativan i praktičan način, svi učenici mogu riješiti mnogo zanimljivih problema i zadataka, te neki učenici na ovaj način mogu dokazati i neke izrazito korisne činjenice i rezultate. Ono što geometrija razvija kod učenika je logičko i deduktivno razmišljanje što učenicima pomaže da prošire svoje mentalne i matematičke vidike.



## 2 | Geometrija u osnovnim i srednjim školama

### 2.1 Kurikulum nastave geometrije

Kada govorimo o nastavnim sadržajima vezanim uz geometriju, oni se svakom nastavnom godinom ponavljaju i nadograđuju. Međutim, učenicima je geometrija i dalje jedna od najtežih grana matematike. Kada bismo prošli kroz kurikulum za osnovne škole, vidjeli bismo da se od najranijih početaka učenja matematike kreće sa osnovama geometrije. Kada bismo kronološkim redoslijedom od prvog razreda do osmog razreda osnovne škole pogledali što je sve kurikulumom predviđeno da učenici usvoje glede nastavnih sadržaja iz geometrije, to bi otprilike bilo slijedeće.

- Za prvi razred osnovne škole predviđeno je da će učenik moći izdvajati i imenovati geometrijska tijela i likove i povezati ih s oblicima objekata u okružju. Osim toga, predviđeno je da će učenik moći crtati i razlikovati ravne i zakrivljene crte, te prepoznavati i imenovati točke u ravnini. Važno je učenicima, na ovoj početnoj razini, detaljno i jasno objasniti i vizualizirati pojmove i sadržaje koji se trebaju usvojiti jer učenici u prvom razredu osnovne škole stvaraju temelje za daljnje napredovanje i shvaćanje geometrijskih nastavnih sadržaja.
- Za drugi razred osnovne škole predviđeno je da će učenik moći opisivati i crtati dužine zadanih duljina, procjenjivati i mjeriti već nacrtane dužine, te povezivati poznate geometrijske oblike. Na ovoj razini važno je da učenici shvate da je dužina omeđena krajnjim dvjema točkama kako u višim godinama učenja ne bi mješali dužinu s pravcem ili polupravcem. Isto tako, važno je da kada usvoje nastavne sadržaje vezane uz dužinu, povežu bridove geometrijskih tijela, odnosno stranice geometrijskih likova s pojmom dužine.
- Za treći razred osnovne škole predviđeno je da će učenik moći opisivati i crtati točku, dužinu, polupravac i pravac te njihove odnose. Kada govorimo o pravcima i polupravcima, očekuje se da će učenik moći prepoznati i crtati pravce u različitim međusobnim odnosima. Kod crtanja i konstruiranja učenik će se služiti šestarom. Nadalje, osim što će učenik, kao i u drugom razredu osnovne škole, moći procjenjivati, crtati i mjeriti dužine zadanih duljina, on će moći i procjenjivati i mjeriti masu tijela. Isto tako, očekuje se da će učenik moći određivati opseg geometrijskih likova i procjenjivati i mjeriti



volumen tekućine. Na ovoj nastavnoj godini važno je naglasak staviti na razliku između pravca, polupravca i dužine. Isto tako, važno je sve što se može demonstrirati i pokazati praktičnim primjerom tako i prezentirati učenicima kako bismo im olakšali vizualizaciju zahtjevnih i apstraktnih pojmova.

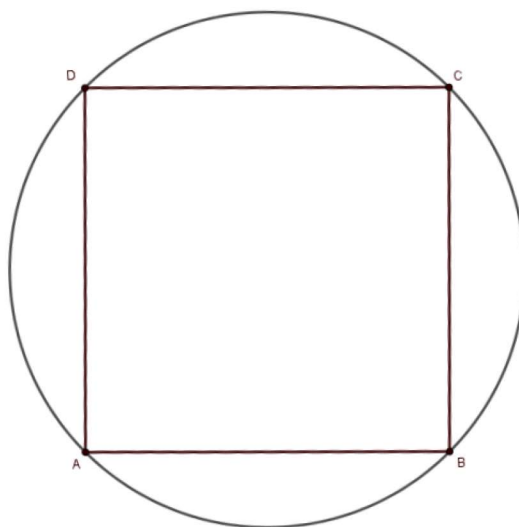
- U četvrtom razredu osnovne škole od učenika se očekuje da će moći prepoznati i crtati kut, razlikovati i opisivati trokute prema duljinama stranica te pravokutni trokut. Nadalje, od učenika se očekuje da će moći opisivati i konstruirati krug i njegove dijelove, te crtati, konstruirati i povezivati sve geometrijske oblike. Što se tiče mjerenja, od učenika se očekuje da će moći procijeniti i mjeriti volumen tekućine na višoj razini nego u trećem razredu osnovne škole, te da će moći uspoređivati površine geometrijskih likova te ih mjeriti jediničnim kvadratom. Važno je staviti naglasak na to da geometrijski likovi nisu "šuplji", nego da su oni dio ravnine i da im zato možemo izračunati, odnosno izmjeriti površinu jediničnim kvadratom.
- U petom razredu osnovne škole od učenika se očekuje da će moći opisivati skupove točaka u ravnini i primjenjivati njihova svojstva i odnose. Nadalje, učenik će moći opisivati i crtati geometrijske likove te stvarati motive koristeći se njima, te osnosimetrično i centralnosimetrično preslikavati skupove točaka u ravnini. Što se tiče mjerenja, učenik će moći mjeriti i crtati kutove određene mjere, te određivati mjere susjednih i vršnih kutova. Osim toga, moći će računati i primjenjivati opseg i površinu geometrijskih likova, te računati i primjenjivati volumen kocke i kvadra. Uočimo da se nastavni sadržaji ove nastavne godine uvelike temelje na nastavnim sadržajima prva četiri razreda osnovne škole, te će, ukoliko ti sadržaji nisu u nižim razredima usvojeni dobro, učenici imati velikih poteškoća u svladavanju nastavnih sadržaja petog razreda osnovne škole.
- U šestom razredu osnovne škole od učenika se očekuje da će moći konstruirati kut i njegovu simetralu, te konstruirati trokute i analizirati njihova svojstva i odnose. Nadalje, od učenika se očekuje da će moći konstruirati četverokute, analizirati njihova svojstva i odnose i računati i primjenjivati opseg i površinu trokuta i četverokuta te mjeru kuta. Važno je obratiti pozornost na preciznost kod konstrukcija i objasniti važnost skiciranja pomoćnih skica kako bi kod rješavanja problemskog zadatka vezanih uz konstrukcije i izračune olakšali vizualizaciju.
- U sedmom razredu osnovne škole od učenika se očekuje da će moći crtati i konstruirati mnogokute i koristiti se njima pri stvaranju složenijih geometrijskih motiva. Nadalje, od učenika se očekuje da će moći crtati, oduzimati i zbrajati vektore u ravnini te translirati skupove točaka u ravnini. Zatim, očekuje se da će učenik moći odabirati strategije za računanje opsega i površine mnogokuta, te opsega i površine kruga i njegovih dijelova. Važnoj je povezati gradivo površine i opsega mnogokuta, odnosno kruga sa situacijama i primjerima iz svakodnevnog života kako bi učenici uvidjeli potrebu i smisao učenja ovog dijela gradiva.

- U osmom razredu osnovne škole od učenika se očekuje da će moći skicirati prikaz uspravnoga geometrijskog tijela u ravnini, te da će moći analizirati i izraditi modele i mreže tih geometrijskih tijela. Očekuje se da će učenik primjenjivati oplošje i volumen tih geometrijskih tijela. Zatim se od učenika osmih razreda očekuje da će moći primjenjivati Talesov poučak i Pitagorin poučak. Nadalje, očekuje se da će učenik moći prikazivati međusobne odnose dviju kružnica u ravnini. Važno je kod obrade nastavnih sadržaja vezanih za geometrijska tijela učenicima donijeti geometrijska tijela koja se spominju na satu i sve nastavne sadržaje i svojstva koja se spominju na satu pokazati na konkretnom primjeru i modelu geometrijskog tijela, te povezati sa situacijama iz njihove svakodnevice.

Što se tiče kurikuluma iz geometrije vezanim za srednje škole, opseg nastavnih sadržaja vezanih uz geometriju ovisi o tome o kojoj se školi radi i koliko ona ima godišnje nastavnih sati matematike. Ovi ishodi navedeni za osnovne škole su svakako temelj za svaku srednju školu, bez obzira koliko sati matematike godišnje je predviđeno za nju, jer se u svakoj srednjoj školi dio gradiva osnovne škole ponovi, ali se svakako nadograđuje, te se učenici koji nisu na vrijeme usvojili nastavne sadržaje osnovne škole susreću s teškoćama i zaostacima (vidi [9])

## 2.2 Važnost poučavanja geometrije

Geometrija je grana matematike za koju se obično smatra da se bavi proučavanjem ravnine i prostora, te odnosa likova i figura u ravnini, odnosno prostoru. Na međunarodnoj razini, geometrija ima veliki udio u nastavi matematike osnovnih i srednjih škola. Mnogi međunarodni ispiti, kao što je PISA, u svojim ispitima sadrže mnoštvo zadataka iz geometrije. Prema istraživanjima, geometrija se ne bavi samo učenjem definicija i svojstava, niti učenjem geometrijskih dokaza napamet. Umjesto toga, dokazano je da proučavanje geometrije razvija logičko i deduktivno zaključivanje, što pomaže učenicima da prošire mentalne i matematičke vidike. Ostala istraživanja pokazala su da geometrija, ukoliko se podučava na pravilan i učinkovit način, može pomoći učenicima da zavole matematiku. Učenici su naveli da su zavoljeli geometriju, pa zbog nje i matematiku, zato što im je ona omogućila da matematiku povežu s umjetnošću, fizičkom aktivnosti, biologijom i situacijama iz stvarnog života, te samim time je dopustila da budu maštoviti i kreativni.



Slika 2.1: Primjer zadatka koji potiče kreativnost učenika

Jedan od zadataka koji će potaknuti kreativnost učenika srednjih škola je, na primjer, da im na papiru damo sliku kruga u koji je upisan kvadrat, baš kao na (slika 2.1), i da od njih tražimo da postave i riješe što više problema vezanih uz tu sliku. Na taj način učenici bi se prisjetili nastavnih sadržaja koje su do sada usvojili, a imat će dovoljno slobode za istraživanje i kreatinost. Osim toga, geometrija je idealno područje unutar kojeg se mogu izvoditi eksperimenti, razvijati vizualni stilovi zaključivanja, istraživati različiti slučajevi pojedinog problema i koristiti različiti stilovi zaključivanja za stvaranje konstruktivnih argumenata i zaključaka. Sadržaj geometrije dočarava bit matematike bolje nego bilo koji drugi dio elementarne matematike. (vidi [1])

## 2.3 Greške u poučavanju geometrije

U suvremenom školstvu, kada govorimo o nastavi geometrije, malo je naglaska na crtanje i izradu kreativnih radova. Često nastavnici ne koriste dovoljno deduktivnih struktura poučavanja za ovaj sadržaj i ne povezuju ga sa svijetom oko nas. Zbog toga je geometrija u školama često veliki problem za učenike. Kada učenike pitate zašto im je geometrija toliko teška, većina njih odgovorit će da im je apstraktna i da si ne mogu zamisliti ili skicirati probleme koje nastavnik stavlja pred njih. Problem takvog pristupa geometriji dolazi od poučavanja algebre i ostalih grana matematike gdje se nastava svodi na metode demonstracije i analogije. U tim područjima zadaci koji se stavljaju pred učenike mogu se, gotovo svi, riješiti nekim viđenim i dobro uvježbanim algoritmom, odnosno postupkom. Rijetko koji nastavnik u svojoj praksi koristi zadatke otvorenog tipa kako bi potaknio učeničku kreativnost. Obično su zadani zadaci u kojima je jasno definirano što se treba izračunati, te je učenicima jasno odakle trebaju početi, te na taj način mogu uvježbati strategije i algoritme za rješavanje problema i zadataka koje im je

učitelj zadao bez da razmišljaju ili razumiju što zapravo rade i zašto to rade baš na takav način. Jedan od klasičnih zadataka koje nastavnici zadaju učenicima glasi na primjer ovako: „*Izračunaj oplošje valjka ako baza ima duljinu polumjera 5cm, a valjak je visok 18cm.*” Učenici će uvježbati algoritam za rješavanje ovakvog zadatka koristeći formulu za računanje oplošja valjka, ali zapravo većina njih neće ni skicirati taj valjak, niti će razumijeti što to oplošje valjka zapravo jest. Tu dolazimo do problema da, ako nastavnik samo malo izmijeni tekst zadatka, učenici više neće znati odakle krenuti i kako riješiti dani zadatak jer za takvu vrstu zadatka nisu uvježbali postupak rješavanja. Većina nastavnika u osnovnim i srednjim školama zapravo je svjesna tog problema, ali je vrlo malo pokušaja da se taj problem analizira i pokuša riješiti. Isto tako, većina nastavnika smatra da su dokazi bitni i korisni samo nekolicini ljudi i često ih preskaču kada obrađuju neke nastavne sadržaje iz geometrije. Kako bi učenici bolje razumijeli geometriju, nastavnici bi trebali više dokazivati geometrijske tvrdnje kojima se koriste pri rješavanju zadataka. Bez obzira koristi li se taj dokaz za izvođenje novih metoda i rezultata na temelju onoga što već znamo ili se daje smisao standardnim postupcima, on će apstraktne geometrijske tvrdnje i formule svesti na više manjih i učeniku razumljivih tvrdnji i pojmova. (vidi [4])



## 3 | Van Hiele-ove razine učenja geometrije

Pedesetih godina prošlog stoljeća Dina i Pierre van Hiele objasnili su hijerarhijski poredak procesa kroz koje učenici prolaze kada usvajaju nove geometrijske sadržaje. Razine kroz koje učenici prolaze pri usvajanju novih geometrijskih sadržaja su vizualizacija, analiza, apstrakcija, dedukcija i strogost. Ovaj hijerarhijski poredak od pet razina opisuje načine razmišljanja koje koriste učenici u geometrijskim i prostornim problemima, s idejama koje se nazivaju "objekti mišljenja" (van Hiele, 1959). Potpomognuti odgovarajućim iskustvom u nastavi, učenici napreduju kroz tih pet razina, od kojih svaka ovisi o uspješnom postignuću prethodnih razina.

### Prva razina - vizualizacija

Učenici na ovoj razini prepoznaju i imenuju geometrijske likove i tijela isključivo na temelju njihovih globalnih vizualnih karakteristika, često uspoređujući geometrijske likove i tijela s već poznatim geometrijskim likovima i tijelima. Na primjer, učenik na ovoj razini može kvadrat definirati kao kvadrat jer *"izgleda kao kvadrat"* (Van de Walle, Karp i Bay-Williams, 2014). Na ovoj razini cilj je da učenici prepoznaju oblike koji su slični i različiti, te koriste te ideje za grupiranje geometrijskih likova, odnosno tijela (Mason, 2014).

### Druga razina - analiza

Učenici na ovoj razini analiziraju geometrijske likove i tijela kroz dijelove od kojih se sastoje, proučavaju njihova svojstva, te otkrivaju svojstva i pravila skupina oblika, ali ne povezuju geometrijske likove, odnosno tijela, ili njihova svojstva. Na primjer, učenici mogu prepoznati što karakterizira pravokutnik (npr. četiri stranice, suprotne stranice paralelne, suprotne stranice iste duljine, četiri prava kuta, sukladne dijagonale) (Van de Walle, Karp i Bay-Williams, 2014).

## Treća razina - apstrakcija

Učenici na ovoj razini počinju uočavati odnose između pojedinih geometrijskih likova, odnosno tijela i njihovih svojstava. Određene neformalne zaključke učenici donose kada se od njih traži da stvore smislene definicije i opravdaju svoje razmišljanje (Mason, 2014). Takav zaključak na primjer može biti da ako su sva četiri kuta četverokuta prava, četverokut mora biti pravokutnik. Ili, ako je dani četverokut kvadrat, svi njegovi kutovi su pravi kutovi. (Van de Walle, Karp i Bay-Williams, 2014). U ovoj fazi učenici ne razumiju ulogu i značaj njihovih zaključaka.

## Četvrta razina - dedukcija

Učenici na ovoj razini sposobni su raditi s apstraktnim izjavama o svojstvima geometrijskih likova, odnosno tijela i donositi zaključke temeljene na logici i povezivanju (Van de Walle, Karp i Bay-Williams, 2014). Da bi to postigli, učenici su sposobni konstruirati dokaze, razumjeti važnost aksioma, definicija, teorema, korolara i postulata te tumačiti značenje nužnih i dovoljnih uvjeta za utvrđivanje istine određenih tvrdnji (Mason, 2014).

## Peta razina - strogost

Učenici na ovoj razini razmišljaju o svojstvima i aksiomima vezanim uz geometrijske likove, odnosno tijela. Isto tako mogu razumjeti korištenje neizravnih dokaza, kontrapozitivnih dokaza i neeuclidskih sustava (Mason, 2014). Na primjer, učenik koji je već razumio formalne aspekte dedukcije može primjenjivati teoreme u različitim situacijama, prije analize problemske situacije. Primjer za to može biti analiza sferne geometrije, koja se temelji na linijama nacrtanim na sferi, a ne u ravnini ili prostoru (Van de Walle, Karp i Bay-Williams, 2014).

## 3.1 Faze učenja

Učenici koji prolaze kroz van Hiele - ovih pet razina učenja geometrije mogu uspješno napredovati samo uz odgovarajuću podršku, dobre upute i usmjeravanje. Faze kroz koje učitelji mogu pomoći učenicima da uspješno usvoje geometrijske nastavne sadržaje i napreduju su informiranje, vođena orijentacija, objašnjavanje, slobodna orijentacija i integracija.

## Prva faza - informiranje

U početnoj fazi učitelji trebaju uključiti učenike u razgovore i aktivnosti vezane uz nastavne sadržaje koje bi učenici trebali usvojiti. Na taj način učenici se orijentiraju na nove nastavne sadržaje i otkrivaju u kojem smjeru će ići njihovo daljnje učenje (Mason, 2014).

## Druga faza - vođena orijentacija

U ovoj fazi učitelji trebaju učenicima pružiti mogućnost istraživanja nove nastavne teme kroz pažljivo odabrane i strukturirane zadatke i materijale za učenje. Prema Crowleyu (1987), zadaci bi trebali biti dizajnirani tako da izazovu specifične odgovore koji postupno otkrivaju učenicima strukture karakteristične za drugu razinu, odnosno vizualizaciju. Na primjer, učitelj može tražiti od učenika da pomoću GeoGebre skiciraju paralelogram i njegove dijagonale, a zatim veću i manju verziju tog paralelograma.

## Treća faza - objašnjavanje

U ovoj fazi učitelj bi trebao navoditi učenike da samostalno objašnjavaju pojmove i nastavne sadržaje koji se trebaju usvojiti i da, tijekom objašnjavanja, učenici opisuju ono što su naučili o nastavnoj temi vlastitim riječima (Mason, 2014). U usporedbi s prethodnim fazama učenja, u ovoj fazi uloga nastavnika je minimalna, osim upoznavanja učenika s matematičkim pojmovima i osiguravanja da učenici te pojmove točno koriste i razumiju.

## Četvrta faza - slobodna orijentacija

U ovoj fazi učenici se susreću sa složenijim zadacima u kojima mogu primijeniti svojstva i odnose između geometrijskih likova, odnosno tijela, koje uče za rješavanje problema (Mason, 2014). Zadaci u ovoj fazi mogu biti otvorenog tipa, mogu sadržavati više koraka ili mogu biti dizajnirani tako da se mogu riješiti na više načina.

## Peta faza - integracija

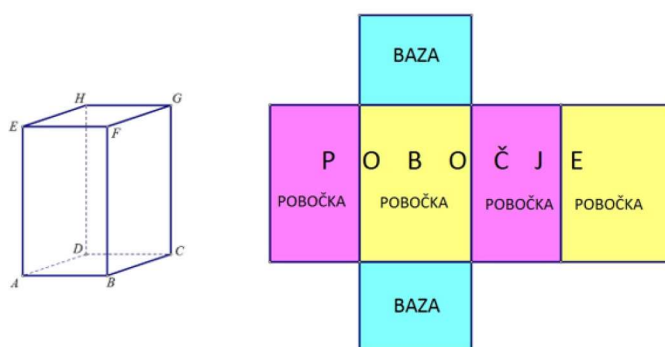
U završnoj fazi učenici ponavljaju i sažimaju ono što su usvojili, a cilj je integrirati novo znanje s postojećim znanjem (Crowley, 1987; Mason, 2014).





## 4 | Uspješno poučavanje geometrije

Kako geometrija u osnovnim i srednjim školama učenicima ne bi više bila problem, nastavnici moraju razviti učinkovit pristup tim nastavnim sadržajima koji će biti razumljiv i privlačan većini učenika. Na primjer, kada govorimo o nastavnim sadržajima vezanim uz dužine određenih duljina, volumene geometrijskih tijela, površine geometrijskih likova, kutove geometrijskih likova, i tako dalje, važno je učenicima omogućiti da, umjesto standardnog računanja nepoznate veličine, oni nacrtaju, skiciraju određeni problem ili izmjere samostalno neke veličine geometrijskog lika ili tijela, te na temelju svojih slika, skica ili mjerenja nešto izračunaju i donesu neki konkretan zaključak potkrjepljen tvrdnjama koje su se usvojile na nastavnom satu. Na taj način će oni povezati sadržaje koje tek trebaju usvojiti i sadržaje koje su već ranije usvojili. Zatim, kada govorimo o geometrijskim likovima i geometrijskim tijelima, važno je taj geometrijski lik ili geometrijsko tijelo "rastaviti" na niz točaka, pravaca, dužina, kutova, mnogokuta (ako govorimo o geometrijskim tijelima), te detaljno analizirati svaki dio tog lika ili tijela kako bi učenicima bilo jasno zašto se određeni problemski zadatak rješava baš na taj određeni način. Na primjer, kada računamo oplošje kvadra, važno je prvo objasniti i skicirati od čega se sastoji kvadar i kako izgleda njegova mreža, vidi (slika 4.1), te onda na primjeru te mreže objasniti što u stvari to oplošje jest i povezati ga s primjerima iz stvarnog života.



Slika 4.1: Kvadar i mreža kvadra, preuzeto iz [10]

Isto tako, kada govorimo o cjelokupnim nastavnim sadržajima vezanim za geometriju, iako se treba staviti naglasak na razumijevanje i logičko i deduktivno zaključivanje, geometriju u određenoj dozi moramo povezati i s algebrom i ostalim granama matematike. Kao što smo već rekli, u školi se stavlja naglasak na računanje nepoznatih veličina koje se traže u određenom zadatku, i od toga svakako ne treba bježati, ali se treba staviti veliki naglasak na to da učenik prvo razumije i može zamisliti i opisati geometrijske likove, tijela, oplošje, volumen i tako dalje, a tek onda kada je došao na razinu da razumije sve što je usvojio, pred njega se trebaju staviti konkretni zadaci u kojima će on primijeniti svoje znanje. Kako bi se učinkovitost poučavanja geometrije u osnovnim i srednjim školama poboljšala, geometrijske nastavne sadržaje možemo podijeliti u 3 velike skupine:

- Crtanje, mjerenje i terminologija
- Opseg, površina i volumen
- Konstrukcije

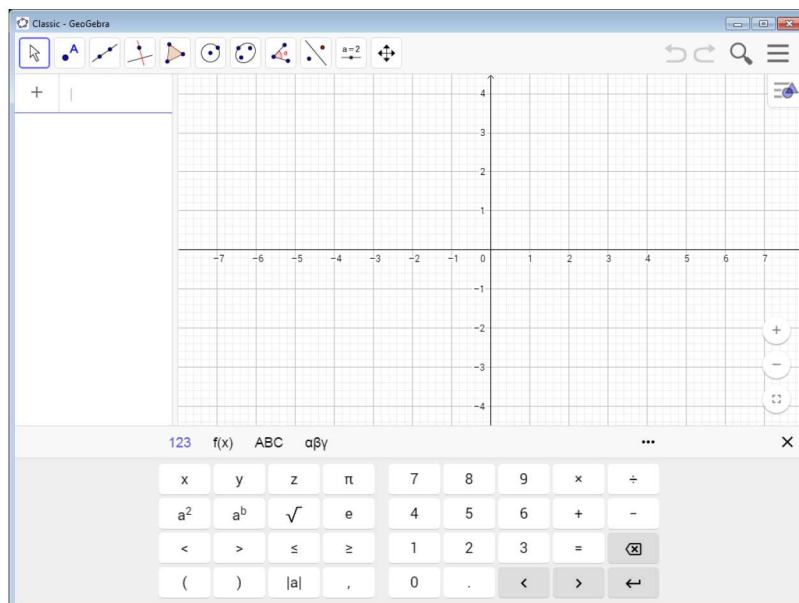
Kada govorimo o crtanju, mjerenju i terminologiji, učenici bi trebali opisivati, skicirati i crtati dane likove ili geometrijska tijela uz pomoć usvojenih pojmova i prethodno usvojenih pojmova kao što su točke, pravci, paralelni pravci, okomiti pravci, kutovi određene veličine i slično. Također, trebali bi ilustrirati svojstva trokuta, četverokuta, kruga i drugih jednostavnijih geometrijskih likova i tijela. Kada govorimo o opsegu, površini i volumenu geometrijskih likova, odnosno geometrijskih tijela, učenici bi trebali izvesti i primijeniti formule za računanje opsega i površine geometrijskih likova, volumena i oplošja geometrijskih tijela i slično. Kada govorimo o konstrukcijama geometrijskih likova, učenici bi trebali, primjenom znanja usvojenih na prethodne dvije stavke, i koristeći se osnovnim konstrukcijama ravnalom i šestarom, konstruirati određene četverokute, trokute ili krugove i kružnice. (vidi [1])

## 5 | Digitalni alati u nastavi geometrije

Istraživanja su pokazala da postoje mnoge prednosti korištenja tehnologije pri učenju matematičkih koncepata. Prije nekoliko desetljeća, rukom crtani dijagrami i skice bili su jedine moguće konstrukcije i primjeri u geometriji za učenike. Od pojave i sve većeg razvoja tehnologije postoje mnoga dinamička geometrijska okruženja, kasnije u ovom radu ćemo se osvrnuti na GeoGebru, koja mogu uključiti učenike u interaktivne aktivnosti. Geometrija zapravo predstavlja jedinu vizualno orijentiranu matematiku koja se nudi učenicima, a nastavni planovi i programi imaju tendenciju predstavljanja vizualno osiromašene, gotovo potpuno lingvistički posredovane matematike, matematike koja ne koristi, ne trenira ili čak ne privlači mozak. Zbog toga mnogi učenici koji žele vizualno bogat kurikulum matematike, gdje se vizualizacija i vizualno razmišljanje razvijaju u punom potencijalu i koriste kao prva prilika za sudjelovanje u nastavi, već su odustali prije nego što su mogli iskusiti matematiku na pristupačan i njima blizak način. Zbog ovakvog mišljenja učenika, učitelji sve više u praksi učenicima pri poučavanju nastave geometrije omogućavaju korištenje raznih digitalnih alata, najčešće GeoGebre. To omogućuje učenicima da razviju vještine vizualizacije koje se oslanjaju na praksu i da istražuju geometrijske probleme (npr. gledajući što se mijenja, a što ostaje nepromjenjivo nakon geometrijskih transformacija). Na taj način učenici razvijaju svoje vještine vizualizacije i bolje razumiju bit problemskog zadatka.

### 5.1 GeoGebra

GeoGebra je besplatni matematički digitalni alat napravljen 2004. godine. Ovaj digitalni alat omogućuje nastavnicima i učenicima dinamičnu interakciju s matematičkim temama kao što su geometrija, algebra, statistika itd. Prema istraživanjima o matematičkom obrazovanju, jedna od ključnih prednosti GeoGebre je ta što može olakšati učenje matematike učenicima svake životne dobi, od osnovne škole do fakulteta.



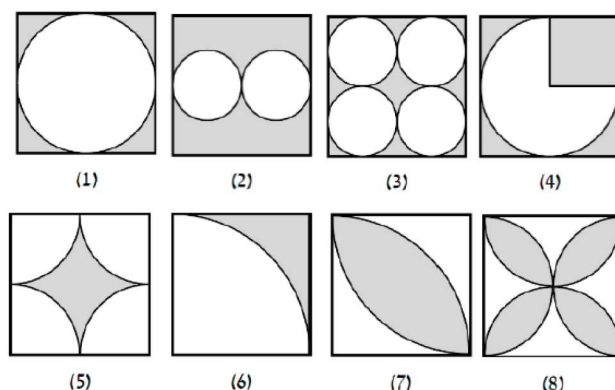
Slika 5.1: GeoGebrin komplet kalkulatora, preuzeto iz [11]

Prema istraživanju, donešen je zaključak da je GeoGebra pomogla učenicima u povećanju složenosti njihovih odgovora pri argumentiranju donešenih zaključaka. Osim toga, učenici su izjavili da uživaju u dinamičnoj prirodi GeoGebre jer im dopušta da pomoću nje brzo riješe zadane matematičke probleme. Osim što su učenici pokazali sveukupno povećanje znanja uz pomoć GeoGebre, kod učenika se povećala i ispravna upotreba matematičke terminologije.

## 6 | Zanimljivi zadaci iz nastave geometrije

Jedan od najučinkovitijih načina poučavanja geometrije je eksperimentalna nastava. Slijedeći primjeri omogućavaju učenicima da promišljaju o mogućim rješenjima, otkriju korisne podstrukture određenih oblika i kreativno riješe dani zadatak. Svrha takvih zadataka je uključiti učenike u istraživanje i povezivanje matematičkih područja, te poticanje na argumentaciju njihovih zaključivanja. Zadaci su strukturirani na način da učenici prelaze s jednostavnih oblika na složenije srodne oblike, čime postupno razvijaju i usavršavaju svoje vizualne i percepcijske vještine. Ovakvi zadaci i primjeri također imaju prednost jer omogućavaju učenicima s različitim intelektualnim i matematičkim sposobnostima da se uključe na različitim razinama u rješavanje zadataka.

**Primjer 1.** (vidi [2]) U ovom primjeru usredotočit ćemo se na geometrijske likove kvadrat i krug. Iako su to, sami po sebi, jednostavni geometrijski likovi, kada se kombiniraju mogu rezultirati velikim brojem složenih oblika koji se mogu rastaviti na različite načine. Ovakvi zadaci trebali bi učenicima pružiti potrebne vještine za generiranje novih oblika i određivanje njihove površine kombiniranjem osnovnih tordnji vezanih uz kvadrat i krug na nove načine. U primjeru se nalazi 8 sličica na kojima su kombinirani kvadrat i krug. Ono što se treba izračunati jest površina osjenčanog dijela sličice. Jedina zadana veličina u ovom primjeru je duljina stranice kvadrata koja iznosi 20mm, a iz tog podatka se mogu izračunati svi ostali podaci. Sličice su posložene u niz, od jednostavnijih prema složenijima (slika 6.1).



Slika 6.1: Primjer zadatka koji potiče kreativnost kod učenika

*Rješenje.* Ovaj primjer možemo riješiti na slijedeći način:

- Prva sličica - Uočimo da je površina osjenčanog dijela jednaka površini kvadrata duljine stranice 20mm - površina kruga polumjera 10mm, tj.

$$P = 20^2 - 10^2\pi = (400 - 100\pi)mm^2$$

- Druga sličica - Uočimo da je površina osjenčanog dijela jednaka površini kvadrata duljine stranice 20mm - površina dva kruga polumjera 5mm, tj.

$$P = 20^2 - 2 \cdot 5^2\pi = 400 - 2 \cdot 25\pi = (400 - 50\pi)mm^2$$

- Treća sličica - Uočimo da je površina osjenčanog dijela jednaka površini kvadrata duljine stranice 20mm - površina četiri kruga polumjera 5mm, tj.

$$P = 20^2 - 4 \cdot 5^2\pi = 400 - 4 \cdot 25\pi = (400 - 100\pi)mm^2$$

- Četvrta sličica - Uočimo da je površina osjenčanog dijela jednaka površini kvadrata duljine stranice 20mm - površina tri četvrtine kruga polumjera 10mm, tj.

$$P = 20^2 - \frac{3}{4} \cdot 10^2\pi = (400 - 75\pi)mm^2$$

- Peta sličica - Uočimo da se na sličici u svakom kutu nalazi  $\frac{1}{4}$  površine kruga, te kako imamo 4 kuta, površina ne osjenčanog dijela sličice jednaka je površini 1 cijelog kruga, pa ćemo površinu osjenčanog dijela dobiti ako od površine kvadrata duljine stranice 20mm oduzmemo površinu kruga polumjera 10mm, tj.

$$P = 20^2 - 10^2\pi = (400 - 100\pi)mm^2$$

- Šesta sličica - Uočimo da je površina ne osjenčanog dijela sličice jednaka  $\frac{1}{4}$  površine kruga polumjera 20mm, pa je površina osjenčanog dijela jednaka površini kvadrata duljine stranice 20mm oduzmemo površinu  $\frac{1}{4}$  kruga polumjera 20mm, tj.

$$P = 20^2 - \frac{1}{4} \cdot 20^2 \pi = (400 - 100\pi) \text{mm}^2$$

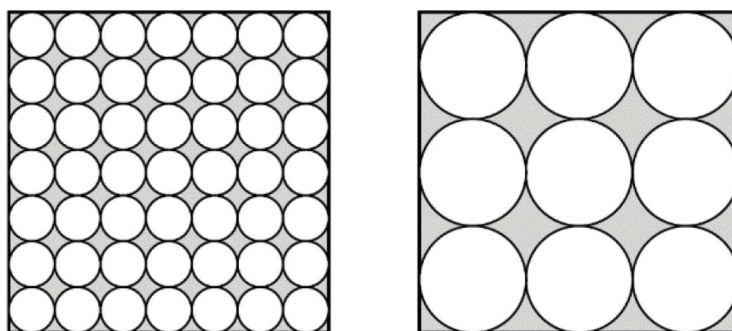
- Sedma sličica - Uočimo da je površina ne osjenčanog dijela sličice jednaka dvostrukoj površini osjenčanog dijela slike 6., pa stoga je površina osjenčanog dijela jednaka površini kvadrata duljine stranice 20mm minus dvostruka površina osjenčanog dijela slike 6., tj.

$$P = 20^2 - 2 \cdot (400 - 100\pi) = 400 - 800 + 200\pi = (200\pi - 400) \text{mm}^2$$

- Osma sličica - Uočimo da ako površinu osjenčanog dijela slike 5 podijelimo vodoravnom ili okomitom linijom po pola, dobit ćemo površinu jednog od četiri ne osjenčana dijela slike 8. Znači da je površina osjenčanog dijela ove slike jednaka površini kvadrata duljine stranice 20mm minus dvostruka površina osjenčanog dijela slike 5., tj.

$$P = 20^2 - 2 \cdot (400 - 100\pi) = 400 - 800 + 200\pi = (200\pi - 400) \text{mm}^2$$

**Primjer 2.** (vidi [2]) U ovom primjeru ćemo se također usredotočiti na geometrijske likove kvadrat i krug. Na slici se nalaze dva složena lika koja se sastoje od kombinacije kvadrata i krugova, a od učenika se traži da izračunaju i usporede osjenčano područje svakog lika. (slika 6.2) Svaki od kvadrata ima stranicu duljine 20 mm.



Slika 6.2: Primjer zadatka koji potiče učenike na donošenje smislenih zaključaka, a ne ograničava njihovu kreativnost



*Rješenje.* Jedan od načina na koji se može riješiti ovakav primjer jest sljedeći: Ako promotrimo prvi lik na slici, uočavamo kako se on sastoji od velikog kvadrata čija površina iznosi

$$P_1 = 20\text{mm} \cdot 20\text{mm} = 400\text{mm}^2 \quad (6.1)$$

i u kojem se nalazi 7 nizova krugova položenih vodoravno, a svaki niz se sastoji od 7 krugova, što znači da ukupno ima 49 krugova unutar kvadrata. Uočimo da zbroj promjera svih 7 krugova u nizu iznosi 20mm, a kako su svi krugovi u nizu međusobno sukladni, ako promjer jednog kruga označimo s  $d_1$ , vrijedi

$$7 \cdot d_1 = 20\text{mm},$$

iz čega slijedi da je  $d_1 = \frac{20}{7} \approx 2.8571\text{mm}$ . Sada znamo da površina jednog kruga u nizu iznosi

$$\begin{aligned} P_2 &= \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 \pi \\ &= 1.4286^2 \pi \\ &= 2.0409\pi\text{mm}^2. \end{aligned}$$

Kako se na slici nalazi 49 krugova, površina neosjenčanog dijela prve sličice iznosi

$$\begin{aligned} P_3 &= 49 \cdot 2.0409\pi \\ &= 100\pi\text{mm}^2. \end{aligned}$$

Sada ćemo površinu osjenčanog dijela prve slike dobiti tako da od površine kvadrata oduzmemo površinu neosjenčanog dijela prve slike

$$\begin{aligned} P &= P_1 - P_3 \\ &= (400 - 100\pi)\text{mm}^2 \end{aligned}$$

Uočimo da se na sličan način može dobiti i površina osjenčanog dijela lika na drugoj slici. Taj lik se sastoji od kvadrata jednake površine kao i kvadrat lika na prvoj slici i 3 vodoravna niza koji se sastoje od 3 kruga, ukupno 9 krugova. Uočimo da analogno prethodnoj slici, vrijedi da je zbroj duljina promjera 3 kruga u jednom nizu, jednak duljini stranice kvadrata, odnosno ako sa  $d_2$  označimo duljinu promjera jednog kruga u tom nizu, vrijedi

$$3 \cdot d_2 = 20\text{mm},$$

iz čega slijedi da je  $d_2 = \frac{20}{3} \approx 6.6667\text{mm}$ . Prema tome, znamo da površina jednog kruga u nizu iznosi

$$\begin{aligned} P_4 &= \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 \pi \\ &= 3.3334^2 \pi \\ &= 11.1116\pi\text{mm}^2, \end{aligned}$$

a iz toga slijedi da površina neosjenčanog dijela lika iznosi

$$P_5 = 9 \cdot 11.1116\pi \quad (6.2)$$

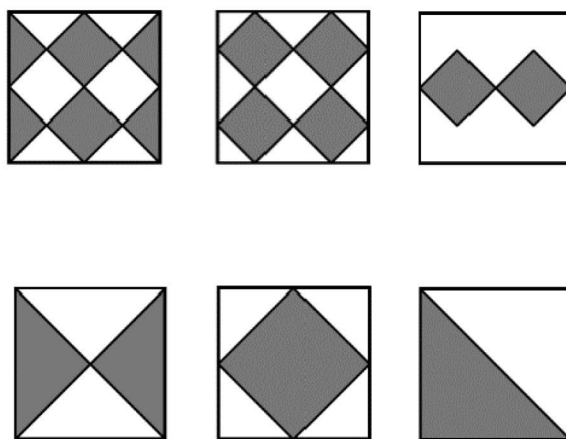
$$= 100\pi mm^2. \quad (6.3)$$

Sada iz (6.3) i (6.5) vidimo da površina osjenčanog lika s druge slike iznosi

$$\begin{aligned} P &= P_1 - P_5 \\ &= (400 - 100\pi)mm^2 \end{aligned}$$

Cilj ovog zadatka jest da učenici zaključe da geometrijski likovi na ove dvije slike imaju jednaku površinu osjenčanog dijela, iako su sastavljeni od različitog broja i različitih veličina geometrijskih likova. Ovakav zadatak će potaknuti učenike da kritički promišljaju, donose smislene zaključke, potkrjepljuju ih raznim tvrdnjama i dokazima i istodobno dopušta učenicima slobodu da izaberu metodu kojom će riješiti zadatak i da budu kreativni.

**Primjer 3.** (vidi [2]) Za razliku od prethodna dva primjera, u ovom primjeru usredotočit ćemo se samo na kvadrat duljine stranice 20mm. Trebamo izračunati površinu osjenčanog dijela kvadrata. (slika 6.3) Cilj ovakvog zadatka jest učenike potaknuti da stvore niz povezanih oblika razmišljanjem o početnom dizajnu, a zatim translacijom, rotacijom, itd. dođu do površine osjenčanog dijela geometrijskog lika. Preporuča se da ovakvi zadaci uključuju kombinaciju osnovnih oblika kao što su krug i kvadrat ili kao u ovom primjeru, kojeg ćemo riješiti, kvadrat i njegove dijelove.



Slika 6.3: Primjer zadatka koji kod učenika razvija razmišljanje o apstraktnim geometrijskim pojmovima i slikama

*Rješenje.* Ovaj primjer možemo riješiti na slijedeći način:

- Prva sličica - uočimo da površina velikog kvadrata iznosi

$$P = 20^2 = 400\text{mm}^2$$

Ako promotrimo osjenčane kvadrate na slici, uočimo da zbroj duljina dijagonala ta dva kvadrata iznosi 20mm, a kako iz slike vidimo da su ta dva kvadrata međusobno sukladna, znači da duljina dijagonale jednog osjenčanog kvadrata iznosi 10mm, te uočimo da ona dijeli osjenčani kvadrat na dva sukladna pravokutna trokuta. Kako se dijagonale kvadrata međusobno raspolavljaju, okomite su i jednake su duljine, slijedi da površina polovice osjenčanog kvadrata iznosi

$$P_p = 10 \cdot 5 = 50\text{mm}^2,$$

što znači da površina jednog osjenčanog kvadrata iznosi  $100\text{mm}^2$ . Nadalje, uočimo kako na slici osjenčano područje ima oblik dva kvadrata i četiri sukladna pravokutna trokuta. Kada bi trokute spojili u parove dobili bismo dva sukladna osjenčana kvadrata, pa možemo interpretirati da osjenčano područje prve slike ima oblik četiri sukladna kvadrata površine  $100\text{mm}^2$ , iz čega slijedi da osjenčana površina prve slike iznosi

$$P_1 = 4 \cdot 100 = 400\text{mm}^2.$$

- Druga sličica - Uočimo da na ovoj slici osjenčano područje kvadrata ima oblik četiri kvadrata površine  $100\text{mm}^2$ , pa analogno prvoj sličici možemo zaključiti da površina osjenčanog dijela kvadrata iznosi

$$P_2 = 400\text{mm}^2.$$

- Treća sličica - Uočimo da na ovoj slici osjenčano područje ima oblik dva sukladna kvadrata čiji zbroj duljina dijagonala iznosi 20mm. Zbog sukladnosti tih osjenčanih kvadrata, duljina dijagonale jednog osjenčanog kvadrata iznosi 10mm, pa analogno prvoj sličici, površina jednog osjenčanog kvadrata iznosi  $100\text{mm}^2$ . Prema tome, površina osjenčanog područja ove sličice iznosi

$$P_3 = 2 \cdot 100 = 200\text{mm}^2.$$

- Četvrta sličica - Uočimo da osjenčani dio kvadrata ima oblik dva sukladna pravokutna trokuta koji imaju zajednički vrh pri pravom kutu. Ako bolje proučimo sličicu, uočiti ćemo da ako jedan od tih osjenčanih trokuta zarotiramo i spojimo s drugim trokutom dobiti ćemo da je površina osjenčanog dijela kvadrata jednaka polovini ukupne površine tog kvadrata, odnosno

$$P_4 = \frac{1}{2} \cdot 400 = 200\text{mm}^2.$$

- Peta sličica - Uočimo da osjenčani dio ima oblik kvadrata čija dijagonala iznosi  $20\text{mm}$ . Nadalje, kako se dijagonale kvadrata međusobno raspolavljaju, jednake su duljine i okomite su, površina polovine osjenčanog dijela iznosi

$$P_p = 20 \cdot 10 = 200\text{mm}^2, \quad (6.4)$$

iz čega slijedi da je površina osjenčanog dijela kvadrata jednaka

$$P_5 = 400\text{mm}^2.$$

- Šesta sličica - Uočimo da je površina osjenčanog dijela kvadrata jednaka polovini ukupne površine kvadrata, odnosno

$$P_6 = 200\text{mm}^2.$$



## 7 | Zaključak

Geometrija nije grana matematike koja će učenike naučiti uvježbati neke, već dobro poznate, procese rješavanja problema, već nudi svakom učeniku slobodu da pokuša doći do rješenja određenog geometrijskog problema na svoj način, i pri tome ga potiče da bude kreativan i da razvija svoje psihičko, matematičko, logičko i kritičko razmišljanje. Osim toga, geometrija kod učenika razvija prostornu orijentaciju i sposobnost za rješavanje problema. Kod usvajanja nastavnih sadržaja iz geometrije važno je kombinirati tradicionalne i moderne metode s posebnim naglaskom na aktiviranje učenika u proces usvajanja nastavnih sadržaja i vježbu usvojenih nastavnih sadržaja. Važno je učenike kroz razne interaktivne sadržaje i digitalne alate uključiti, kao aktivne suradnike, u proces usvajanja nastavnih sadržaja, kako bi geometrija, koja je većini učenika teška, postala izazovna, dinamična, motivirajuća i zanimljiva grana matematike.



# Literatura

- [1] J. Anderson, C. Carmichael, M. Cavanagh, L. Galligan, G. Hine, B. Ngu, R. Reaburn, B. White, *Teaching Secondary Mathematics*, Cambridge University Press, 2016.
- [2] R. Bassan-Cincinatus, *Creativity with Areas – Circles and Squares*, Learning and Teaching Mathematics, No. 20, 2016, pp. 7-9
- [3] M. L. Crowley, *Learning and teaching geometry*, National Council of Teachers of Mathematics, 1987.
- [4] T. Gardiner, *Teaching Mathematics at Secondary Level*, OpenBook Publishers , 2016.
- [5] P. M. van Hiele, *English translation of selected writings of Dina van Miele - Geldof and Pierre M. von Hiele*, Research in Science Education Program, 1959.
- [6] M. Mason, *The van Hiele levels of geometric understanding*, Professional Handbook for Teachers, McDougal Little Inc., 2014.
- [7] A. Miloš, *Fundamentalne ideje u geometriji i nastavi geometrije*, Sveučilište u Zagrebu, Učiteljski fakultet, diplomski rad, 2018.
- [8] J. A. Van de Walle, K. S. Karp, J. M. Bay - Williams, *Elementary and middle school mathematics*, Pearson Education, 2014.
- [9] Ministarstvo znanosti i obrazovanja, *Kurikulumi nastavnih predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije i Matematika za srednje strukovne škole na razini 4.2*, URL: [https://skolazazivot.hr/wp-content/uploads/2020/07/MAT\\_kurikulum\\_1\\_71.pdf](https://skolazazivot.hr/wp-content/uploads/2020/07/MAT_kurikulum_1_71.pdf)
- [10] [https://edutorij-admin-api.carnet.hr/storage/extracted/d2d61772-7e7a-4f5b-98f9-6bbb5d5d13ca/html/10663\\_Kvadar.html](https://edutorij-admin-api.carnet.hr/storage/extracted/d2d61772-7e7a-4f5b-98f9-6bbb5d5d13ca/html/10663_Kvadar.html)
- [11] <https://geogebra.informer.com/>





# Sažetak

Geometrija u osnovnim i srednjim školama za učenike može biti jako apstraktna i zbunjujuća. Ali unatoč tome, poučavanje geometrije ima mnoge prednosti. Učenici učenjem geometrije mogu razviti svoje logičko i deduktivno razmišljanje i zaključivanje, te proširiti svoje mentalne i matematičke vidike. Međutim, ovakvi pozitivni učinci geometrije na učenike mogu se postići samo ukoliko se geometrija u osnovnim i srednjim školama podučava na pravilan način. U prošlosti su mnogi učitelji geometriju predstavljali na sličan način kao i algebru, gdje se pred učenike stavlja nekakav tipičan problem koji treba riješiti primjenom neke dobro uvježbane procedure. Za razliku od algebre, učenicima često nije jasno odakle početi i tu dolazimo do problema zašto učenici najčešće ne vole geometriju. Umjesto takvog pristupa geometriji, postoji niz različitih metoda i digitalnih alata koje će učenike privući da opet zavole geometriju i dopustiti im da izraze svoju kreativnost.

## Ključne riječi

nastava geometrije, problemski zadatak, geometrijski lik, geometrijsko tijelo



# Teaching geometry - challenges, strategies and motivation in learning

## Summary

Geometry can be very abstract and confusing for students in primary and secondary schools. Despite that, teaching geometry has many advantages. By learning geometry, students can develop their logical and deductive thinking and reasoning, and expand their mental and mathematical perspectives. However, such positive effects of geometry on students can only be achieved if geometry is taught properly in primary and secondary schools. In the past, many teachers taught geometry in a similar way as they did algebra, students were presented with a typical problem that needed to be solved by applying some well-rehearsed procedure. Unlike algebra, with geometry students often don't know where to start, and that's where we get to the problem why they often don't like geometry. Instead of taking such an approach to geometry, there are many different methods that could help students fall in love with geometry and express their creativity.

## Keywords

teaching geometry, problem task, geometric figure, geometric body



# Životopis

Rođena sam 23.4.1999. godine u Našicama. Pohađala sam Osnovnu školu kralja Tomislava u Našicama. Po završetku osnovne škole, 2014. godine uspisala sam se u Srednju školu Isidora Kršnjavoga u Našicama, smjer opća gimnazija. Srednju školu završila sam 2018. godine, nakon čega sam se upisala na tadašnji Odjel za matematiku, sada Fakultet primijenjene matematike i informatike, na Preddiplomski sveučilišni studij matematike. 2022. godine sam na tom fakultetu stekla zvanje Sveučilišna prvostupnica matematike (univ.bacc.math.) s temom završnog rada „*Van Aubelov teorem*” pod mentorstvom prof.dr.sc.Zdenke Kolar-Begović. Iste godine na Fakultetu primijenjene matematike i informatike upisala sam se na Sveučilišni diplomski nastavnički studij matematike i informatike.