

Titranje žice

Čučman, Matea

Undergraduate thesis / Završni rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, School of Applied Mathematics and Informatics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Fakultet primijenjene matematike i informatike**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:330251>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom](#).

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-09**



mathos

Repository / Repozitorij:

[Repository of School of Applied Mathematics and Informatics](#)





SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
FAKULTET PRIMIJENJENE MATEMATIKE I INFORMATIKE

Sveučilišni prijediplomski studij Matematika i računarstvo

Titranje žice

ZAVRŠNI RAD

Mentori:

**prof. dr. sc. Krešimir Burazin,
doc. dr. sc. Jelena Jankov Pavlović**

Student:

Matea Čučman

Osijek, 2024

Sadržaj

1	Uvod	1
1.1	Osnovni pojmovi i definicije	1
2	Valna jednadžba	3
2.1	Rubni i početni uvjeti	6
2.1.1	Homogenizacija rubnih uvjeta	9
2.2	Princip superpozicije	10
2.3	Karakteristike valne jednadžbe	11
2.4	D'Alembertova formula	16
3	Početno-rubna zadaća	19
3.1	Fourierova metoda	19
3.2	Fourierovi redovi	23
	Literatura	31
	Sažetak	33
	Summary	35
	Životopis	37

1 | Uvod

Titranje žice je pojava koja se očituje kroz vibracije i valove koji se šire duž njezine duljine. Ova pojava ima široku primjenu u različitim područjima, od glazbene teorije i akustike do inženjerskih istraživanja materijala i slično. Razumijevanje titranja žice zahtijeva proučavanje valnih jednadžbi koje opisuju dinamiku ovih vibracija.

U osnovi, titranje žice može se modelirati pomoću valne jednadžbe, koja predstavlja ključni matematički alat za analizu takvih vibracija. Ova jednadžba omogućuje predviđanje kako se vibracije šire duž žice u vremenu i prostoru, uzimajući u obzir različite uvjete poput rubnih i početnih uvjeta. U ovom radu, fokusirat ćemo se na proučavanje valne jednadžbe u kontekstu titranja žice, koristeći se različitim metodama kako bismo riješili početno-rubnu zadaću.

Kroz rad će biti obrađene sljedeće ključne teme: valna jednadžba te njena svojstva i karakteristike, rubni i početni uvjeti, te metode za rješavanje početno-rubnih zadaća. Pažnju ćemo posvetiti D'Alembertovoj formuli koja daje funkciju rješenja početne ili Cauchyjeve zadaće za valnu jednadžbu uz dane početne uvjete. Također ćemo primijeniti Fourierovu metodu i Fourierove redove kako bismo detaljno analizirali ponašanje titranja žice pod različitim uvjetima i odredili rješenje početno-rubne zadaće za valnu jednadžbu uz zadane početne i rubne uvjete.

S obzirom na kompleksnost i značaj problema, cilj ovog rada je osigurati dublje razumijevanje osnovnih principa koji upravljaju vibracijama žice, te primjenu matematičkih metoda za rješavanje specifičnih početno-rubnih zadaća. Sustavnom analizom i primjenom teorijskih metoda, rad pruža detaljan pregled titranja žice i potrebnih matematičkih alata koji omogućuju precizno modeliranje i analizu ove pojave.

1.1 Osnovni pojmovi i definicije

U ovom poglavlju navest ćemo neke rezultate matematičke analize koji će nam biti potrebni kasnije u radu.

Definicija 1. Za funkciju $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kažemo da je po dijelovima neprekidna ako ima konačno mnogo prekida i svi prekidi su prve vrste.

Lema 1 (Prva osnovna lema). *Ako je funkcija $h \in C([0, l])$ i ako je za svaki $x_1, x_2 \in [0, l]$*

$$\int_{x_1}^{x_2} h(x) = 0,$$

onda je i $h(x) = 0$, za svaki $x \in [0, l]$.

Lema 2 (Schwarzova lema). *Ako je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ i funkcija $f \in C^2(\Omega)$, tada za svaki $(x, y) \in \Omega$ vrijedi*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y).$$

Teorem 1 (Newton-Leibnitzova formula). *Neka je $f \in C([a, b])$. Ako je F bilo koja primitivna funkcija funkcije f na segmentu $[a, b]$, odnosno ako vrijedi $F'(x) = f(x)$, za svaki $x \in [a, b]$, onda vrijedi*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Dokaz. Dokaz vidjeti u [6], Teorem 5.11, stranica 139. □

Teorem 2 (o složenom deriviranju). *Neka su funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takve da postoji funkcija $h = f \circ g$. Ako funkcija g ima derivaciju u točki x , a funkcija f u točki $g(x)$, onda funkcija $f \circ g$ ima derivaciju u točki x i vrijedi takozvano lančano pravilo*

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Dokaz. Dokaz vidjeti u [6], Teorem 4.4, stranica 95. □

Teorem 3 (o funkcijama definiranim integralom). *Neka je funkcija $f : I = [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ R -integrabilna funkcija koja ima neprekidnu parcijalnu derivaciju $\partial_1 f$ na I . Tada je funkcija*

$$F(x) := \int_c^d f(x, y) dy$$

neprekidno diferencijabilna na $[a, b]$, odnosno vrijedi $F \in C^1([a, b])$ i derivacija je jednaka

$$F'(x) = \int_c^d \partial_1 f(x, y) dy, \quad x \in [a, b]$$

Dokaz. Dokaz vidjeti u [5], Teorem 19.8, stranica 178. □

Teorem 4 (Weierstrassov kriterij). *Neka je $I \subset \mathbb{R}$ i neka su $u_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ dane funkcije. Ako je svaki član reda funkcija $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ po apsolutnoj vrijednosti manji ili jednak od pripadnog člana konvergentnog reda s pozitivnim članovima $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, odnosno ako vrijedi*

$$|u_n(x)| \leq a_n, \quad \forall x \in I, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

onda red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ uniformno konvergira na I .

Dokaz. Dokaz vidjeti u [6], Teorem 6.18, stranica 185. □

2 | Valna jednađžba

Titranje napete žice opisuje oscilacije žice koja je napeta silom duž svoje duljine. Analizirat ćemo oscilacije žice u xy -ravnini, fokusirajući se na male deformacije u smjeru osi y . Takav pristup omogućuje upotrebu valne jednađžbe za modeliranje progiba žice u ovisnosti o vremenu i položaju. Duljinu žice označit ćemo s l , odnosno žicu ćemo promatrati na segmentu $[0, l]$. Žica će biti napeta uzdužno silom $a : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^+$. Promatrat ćemo oscilacije žice oko neperturbiranog položaja na osi x , u smjeru osi y , što je prikazano na Slici 2.1. Položaj žice opisujemo funkcijom progiba u , pri čemu $u(x, t)$ označava odklon (pomak u smjeru y -osi) točke x u trenutku t u odnosu na položaj žice na x -osi. Pretpostavljamo da su deformacije žice male; primjer velikih i malih deformacija žice prikazan je na Slici 2.2. To znači da je koeficijent smjera tangente malen, odnosno apsolutna vrijednost derivacije funkcije u po varijabli x je puno manja od 1:

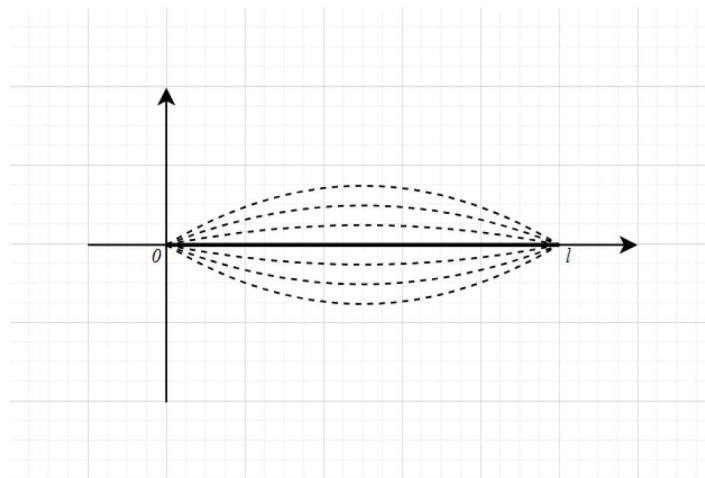
$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \ll 1.$$

Brzina titranja, odnosno osciliranja žice u točki x u trenutku t je dana s

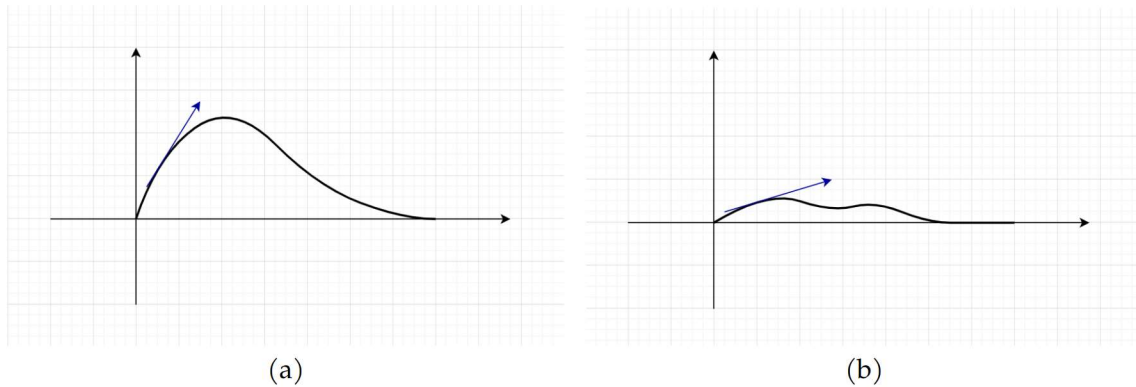
$$v(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t),$$

iz čega slijedi da je linijska gustoća količine gibanja jednaka

$$p(x, t) = \rho(x)v(x, t) = \rho(x) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t), \quad (2.1)$$



Slika 2.1: Titranje žice oko neperturbiranog položaja



Slika 2.2: (a) velike deformacije žice, (b) male deformacije žice

gdje je $\rho(x)$ linijska gustoća mase žice u točki x . Neka je dodatno $f(x, t)$ gustoća vanjske poprečne sile u točki x u trenutku t koja djeluje na žicu.

Zakon ponašanja odnosi se na temeljna načela ili matematičke izraze koji opisuju kako se fizikalni sustavi ponašaju pod određenim uvjetima.

Ovi zakoni temelje se na eksperimentalnim opažanjima i matematičkoj analizi, te se koriste za predviđanje rezultata fizikalnih eksperimenata i fenomena.

Neka je $P(x, t) = (x, u(x, t))$, odnosno $P(x, t)$ označava točku na grafu funkcije $x \rightarrow u(x, t)$ u trenutku t . Kontaktna sila \vec{q} u točki $P(x, t)$ označava silu kojom luk $\widehat{P(x, t)P(l, t)}$ djeluje na $\widehat{P(0, t)P(x, t)}$.

Za potrebe našeg sustava uzimamo zakon ponašanja koji kaže da je kontaktna sila jednaka napetosti žice u točki x pomnožene s tangencijalnim jediničnim vektorom na žicu u točki x

$$\vec{q}(x, t) = a(x)\vec{T}(x, t).$$

Tangencijalni vektor u točki x u trenutku t dan je s

$$\vec{T}(x, t) = \frac{\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\vec{j}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\right)^2}}.$$

Zbog pretpostavke malih deformacija, $\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\right)^2$ je približno jednak nuli, pa ga zanemarujemo. Tako definirana kontaktna sila \vec{q} je vektorska funkcija s komponentama

$$\begin{aligned} q_x(x, t) &= a(x) \\ q_y(x, t) &= a(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x, t). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Zakon sačuvanja količine gibanja: Promjena količine gibanja u tijelu u jedinici vremena jednaka je ukupnoj sili koja na to tijelo djeluje.

Zakon sačuvanja količine gibanja, poznat i pod nazivom Zakon sačuvanja impulsa, jedan je od temeljnih zakona fizike, fizikalnih aksioma, koji vrijede u svim zatvorenim homogenim sustavima.

Primijenimo li sada Zakon sačuvanja količine gibanja na luk $\widehat{P(x_1, t)P(x_2, t)}$ dobit ćemo jednadžbu

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} p(x, t) dx = q_y(x_2, t) - q_y(x_1, t) + \int_{x_1}^{x_2} f(x, t) dx, \quad (2.3)$$

gdje

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x, t) dx$$

predstavlja količinu gibanja žice na segmentu $[x_1, x_2]$ u trenutku t , pa derivacija navedenog integrala po varijabli t predstavlja promjenu količine gibanja. S desne strane znaka jednakosti imamo kontaktne sile u rubnim točkama danog luka, odnosno ukupnu kontaktnu silu $q_y(x_2, t) - q_y(x_1, t)$, te ukupnu vanjsku silu $\int_{x_1}^{x_2} f(x, t) dx$ koja djeluje na dani komad žice, čija nam je gustoća zadana, pa ju računamo kao integral od dane gustoće poprečne vanjske sile. Uočimo, primjenom Newton-Leibnitzove formule, jednadžbu (2.3) možemo zapisati ovako

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} p(x, t) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial q_y}{\partial x}(x, t) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x, t) dx.$$

Zatim, primjenom Teorema o funkcijama definiranim integralom na dobivenu jednadžbu, imamo

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial p}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial q_y}{\partial x}(x, t) - f(x, t) \right) dx = 0.$$

Prema Prvoj osnovnoj lemi dobivamo zakon sačuvanja impulsa u diferencijalnom obliku

$$\frac{\partial p}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial q_y}{\partial x}(x, t) - f(x, t) = 0. \quad (2.4)$$

Uvrstimo li linijsku gustoću količine gibanja (2.1) i kontaktnu silu (2.2) u zakon sačuvanja impulsa (2.4) dobivamo *jednadžbu gibanja*, odnosno titranja žice

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) = f(x, t). \quad (2.5)$$

Ako se žica nalazi u elastičnom sredstvu koje se opire deformaciji s koeficijentom elastičnosti $b \geq 0$, onda umjesto jednadžbe (2.5) imamo jednadžbu

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) + b(x)u(x, t) = f(x, t), \quad (2.6)$$

gdje član $b(x)u(x, t)$ predstavlja linijsku gustoću sile kojom sredstvo djeluje na žicu. Jednadžba (2.6) poznata je pod nazivom *valna jednadžba* i ona je linearna parcijalna diferencijalna jednadžba drugog reda.

Definicija 2. Za valnu jednadžbu (2.6) kažemo da je homogena ako je $f(x, t) = 0$, u suprotnom kažemo da je valna jednadžba nehomogena.

Valnu jednadžbu u punoj općenitosti ne možemo riješiti, stoga uvodimo dodatne pretpostavke uz koje će valna jednadžba biti rješiva. Valna jednadžba (2.6), uz pretpostavke da je žica homogena, napetost konstantna i nema elastičnog sredstva, odnosno

$$\rho = \text{const}, a = \text{const}, b = 0,$$

ima oblik

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \hat{f}(x, t), \quad (2.7)$$

gdje su

$$c^2 = \frac{a}{\rho}, \hat{f}(x, t) = \frac{f(x, t)}{\rho}.$$

2.1 Rubni i početni uvjeti

Rješenje valne jednadžbe, ako postoji, nije jedinstveno. Za određivanje jedinstvenog rješenja potrebno je specificirati uvjete na rubovima žice i početku vremenskog intervala. Postoji nekoliko vrsta rubnih uvjeta, među kojima su najvažniji Dirichletovi, Neumannovi i Robinovi uvjeti. Svi ovi uvjeti mogu biti zadani na oba kraja domene, ali ćemo ih ovdje opisati samo za lijevi kraj, dok se uvjeti na desnom kraju zadaju analogno.

Dirichletove rubne uvjete imamo kada je žica pričvršćena u rubovima. Tada je zadana vrijednost progiba u kraju žice koji je pričvršćen,

$$u(0, t) = m(t).$$

Slika 2.3 prikazuje slučaj kada je u lijevom kraju zadan Dirichletov rubni uvjet. Progib u krajevima žice također može ovisiti o vremenu.

Druga vrsta rubnih uvjeta su Neumannovi rubni uvjeti. Kod Neumannovih uvjeta u rubovima žice, umjesto progiba, zadana je poprečna kontaktna sila

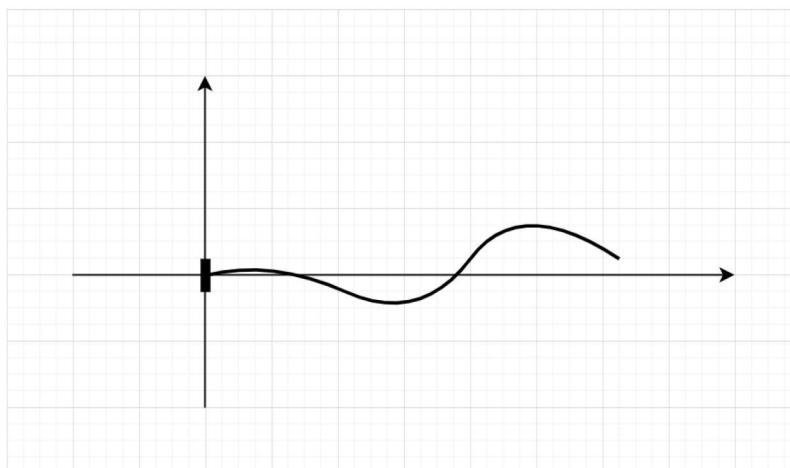
$$q_y(0, t) = n_1(t).$$

Kada uvrstimo poprečnu kontaktnu silu (2.2) dobivamo

$$a(0) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = n_1(t),$$

iz čega imamo

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = n(t),$$



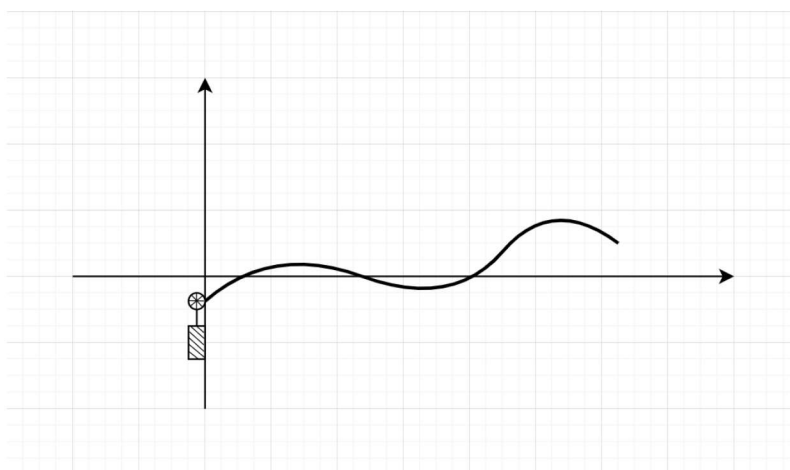
Slika 2.3: Dirichletov rubni uvjet u lijevom kraju žice

gdje je funkcija n definirana sa

$$n(t) = \frac{n_1(t)}{a(0)}.$$

Slika 2.4 prikazuje žicu kada je u lijevom kraju zadan Neumannov rubni uvjet. Slika prikazuje žicu čiji je lijevi kraj pričvršćen na kotač koji se može kretati vertikalno u oba smjera, na kojeg je pričvršćen uteg.

Posljednji rubni uvjet kojeg ćemo navesti naziva se Robinov rubni uvjet. U ovom



Slika 2.4: Neumannov rubni uvjet u lijevom kraju žice

slučaju također je zadana poprečna kontaktna sila, ali je njena vrijednost umnožak konstante κ i vrijednosti funkcije progiba u u kraju kojeg promatramo:

$$q_y(0, t) = \kappa u(0, t).$$

Primijenimo li sada Zakon ponašanja na Robinov uvjet dobivamo

$$a(0) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \kappa u(0, t),$$

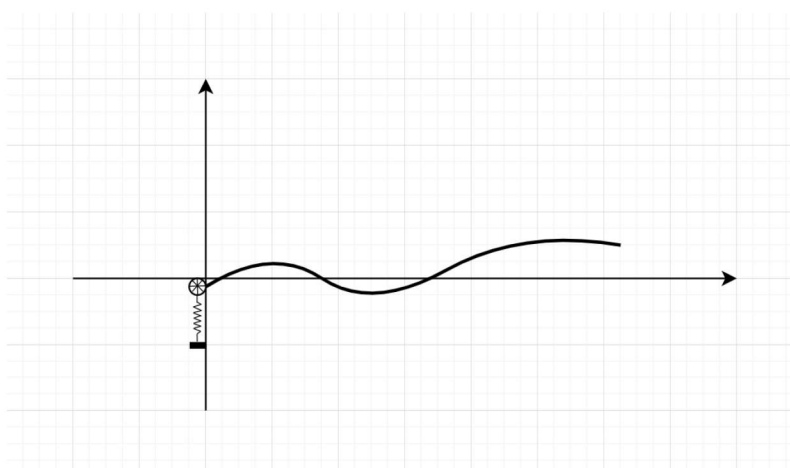
odnosno

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) - ku(0, t) = 0,$$

gdje je

$$k = \frac{\kappa}{a(0)}.$$

Slika 2.5 prikazuje žicu s Robinovim rubnim uvjetom u lijevom kraju, desni kraj je slobodan. Lijevi kraj žice pričvršćen je na kotač, koji se giba vertikalno i pričvršćen je na elastičnu oprugu konstante κ .



Slika 2.5: Robinov rubni uvjet u lijevom kraju žice

Napomena 1. Zapišimo rubne uvjete u lijevom i u desnom rubu žice u obliku

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) - \beta u(0, t) &= c(t) \\ \gamma \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) + \delta u(l, t) &= d(t), \end{aligned} \tag{2.8}$$

gdje su c i d zadane funkcije koje ovise o vremenskoj varijabli t , te $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zadane vrijednosti i vrijedi

$$\begin{aligned} \alpha, \beta, \gamma, \delta &\geq 0, \\ \alpha + \beta &> 0, \gamma + \delta > 0. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem $\alpha = 0$ i $\gamma = 0$ dobivamo Dirichletove rubne uvjete. Analogno, uvrštavanjem $\beta = 0$ i $\delta = 0$ dobivamo Neumannove rubne uvjete. Ako vrijedi $\alpha, \beta, \gamma, \delta \neq 0$, tada imamo Robinove rubne uvjete.

Osim rubnih uvjeta, za određivanje jedinstvenog rješenja potrebni su i početni uvjeti. Oni opisuju položaj, odnosno progib, i brzinu u početnom trenutku $t = 0$:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= v_0(x), \end{aligned}$$

gdje su početni položaj u_0 i početna brzina v_0 zadane funkcije koje ovise o prostornoj varijabli x .

Određivanje rješenja valne jednadžbe (2.6) za vrijednosti

$$x \in \langle 0, l \rangle, t \in \langle 0, \infty \rangle,$$

uz zadane početne i rubne uvjete, naziva se *početno-rubna zadaća*. Kao i valna jednadžba, početni i rubni uvjeti su također linearni. Ako žica koju promatramo nije ograničena, odnosno ako ju promatramo na intervalu $\langle -\infty, \infty \rangle$, onda ne zadajemo rubne uvjete. Tada govorimo o početnoj ili *Cauchyjevoj zadaći*.

2.1.1 Homogenizacija rubnih uvjeta

Ako rješenje u zadovoljava početno-rubnu zadaću

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) &= \hat{f}(x, t) \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) - \beta u(0, t) &= c(t) \\ \gamma \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) + \delta u(l, t) &= d(t) \\ u_0(x) = u(x, 0), v_0(x) &= \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \end{aligned}$$

i z je proizvoljna funkcija klase C^2 koja zadovoljava rubne uvjete, onda $v := u - z$ zadovoljava homogene rubne uvjete

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) - \beta v(0, t) &= 0 \\ \gamma \frac{\partial v}{\partial x}(l, t) + \delta v(l, t) &= 0. \end{aligned}$$

Uvrštevenjem nove funkcije v u valnu jednadžbu imamo:

$$\frac{\partial^2 (v + z)}{\partial t^2}(x, t) - c^2 \frac{\partial^2 (v + z)}{\partial x^2}(x, t) = \hat{f}(x, t).$$

Raspišemo li jednadžbu imamo:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x, t) - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t) = g(x, t)$$

gdje je:

$$g(x, t) = \hat{f}(x, t) + c^2 z''(x).$$

Dakle, valnu jednadžbu s nehomogenim rubnim uvjetima možemo svesti na isti tip valne jednadžbe, uz drugu funkciju \hat{f} , s homogenim rubnim uvjetima. Pripadni početni uvjeti su oblika:

$$u_0(x) = u(x, 0) - z(x), v_0(x) = \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0).$$

2.2 Princip superpozicije

Princip superpozicije jedno je od svojstava linearnih početno-rubnih zadaća. Ovaj princip nam daje važnu i korisnu tvrdnju: ako su funkcije u_i rješenja pripadnih početno-rubnih zadaća, tada je i njihova suma, odnosno superpozicija, također rješenje odgovarajuće početno-rubne zadaće.

Teorem 5. *Ako su funkcije $u_i \in C^2(\mathbb{R}^2)$ rješenja početno-rubne zadaće*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} &= \hat{f}_i(x, t) \\ u_i(x, 0) &= u_{0,i}(x), \quad \frac{\partial u_i}{\partial t}(x, 0) = v_{0,i}(x) \\ \alpha \frac{\partial u_i}{\partial x}(0, t) - \beta u_i(0, t) &= c_i(t) \\ \gamma \frac{\partial u_i}{\partial x}(l, t) - \delta u_i(l, t) &= d_i(t) \end{aligned} \tag{2.9}$$

za svaki $i = 1, \dots, n$, onda je superpozicija

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i(x, t), \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \tag{2.10}$$

rješenje početno-rubne zadaće

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \hat{f}_i(x, t) \\ u(x, 0) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i u_{0,i}(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_{0,i}(x) \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) - \beta u(0, t) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i(t) \\ \gamma \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) - \delta u(l, t) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i d_i(t). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Dokaz. Pokažimo najprije da funkcija u dana s (2.10) zadovoljava valnu jednadžbu iz (2.11). Uvrstimo li funkciju u u navedenu valnu jednadžbu, zbog linearnosti derivacije dobivamo

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i(x, t) \right) - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i(x, t) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_i(x, t) - \sum_{i=1}^n \lambda_i c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_i(x, t) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_i(x, t) - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_i(x, t) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \hat{f}_i(x, t). \end{aligned}$$

Time smo pokazali da funkcija u zadovoljava valnu jednadžbu. Pokažimo da zadovoljava također i rubne uvjete iz (2.11). Uvrstimo funkciju u u rubni uvjet za $x = 0$:

$$\begin{aligned} & \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i(0, t) \right) - \beta \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i(0, t) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha \frac{\partial u_i}{\partial x}(0, t) - \sum_{i=1}^n \lambda_i \beta u_i(0, t) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x}(0, t) - \beta u_i(0, t) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i(t). \end{aligned}$$

Time smo pokazali da funkcija u zadovoljava rubni uvjet za $x = 0$. Analogno se pokazuje da funkcija u zadovoljava i rubni uvjet u desnom kraju žice, odnosno u $x = l$. Također, uvrštavanjem funkcije u u početne uvjete možemo pokazati da zadovoljava i njih. Time smo pokazali da je tako definirana funkcija u rješenje početno-rubne zadaće navedene u teoremu. \square

2.3 Karakteristike valne jednadžbe

U ovom poglavlju analizirat ćemo karakteristike homogene valne jednadžbe, gdje vanjska sila ne djeluje na sustav. Faktorizacijom valne jednadžbe dobit ćemo transportnu jednadžbu, koja je bitna za razumijevanje širenja vala. Analizirat ćemo karakteristike transportne jednadžbe, koje nam daju uvid u ponašanje vala u prostoru i vremenu te nam olakšavaju analizu i rješavanje same valne jednadžbe. Promotrimo sada homogenu valnu jednadžbu, odnosno valnu jednadžbu (2.7) uz uvjet da je $\hat{f} = 0$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u = 0. \quad (2.12)$$

Prema Schwarzovoj lemi navedenu jednadžbu možemo faktorizirati u obliku

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0. \quad (2.13)$$

Označimo li

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} = w, \quad (2.14)$$

iz prethodno navedene jednadžbe vidimo da je

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) w = 0,$$

Jednadžba koju smo time dobili:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + c \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (2.15)$$

naziva se transportna jednadžba.

Neka je w rješenje transportne jednadžbe te neka je $x = x(t)$ neka glatka krivulja u xt -ravnini. Promotrimo vrijednosti funkcije $w = w(x(t), t)$ na krivulji x . Derivirajmo funkciju w prema pravilu za složeno deriviranje:

$$\frac{dw}{dt}(x(t), t) = x'(t) \frac{\partial w}{\partial x}(x(t), t) + \frac{\partial w}{\partial t}(x(t), t), \quad (2.16)$$

Ako za krivulju x uzmemo pravac, odnosno ako je

$$x'(t) = c,$$

jednadžba krivulje x u xt -ravnini dana je s

$$x - ct = const, \quad (2.17)$$

uz pretpostavku da vrijedi $c > 0$. Uz odabir takve krivulje x , derivacija funkcije w po varijabli t je oblika

$$\frac{dw}{dt}(x(t), t) = c \frac{\partial w}{\partial x}(x(t), t) + \frac{\partial w}{\partial t}(x(t), t),$$

što je prema (2.15) jednako 0. Iz gornje jednakosti zaključujemo da je

$$w(x(t), t) = const_2,$$

odnosno da na pravcima oblika $x - ct = const$ funkcija w poprima konstantnu vrijednost $const_2$. Označimo li s χ funkciju $const \rightarrow const_2$, dobivamo da je oblika

$$w(x, t) = \chi(x - ct), \quad (2.18)$$

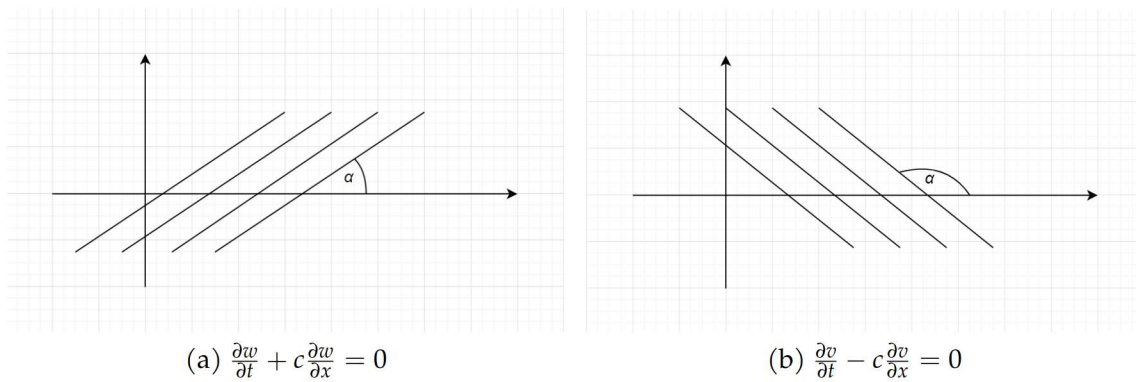
za neku nepoznatu funkciju χ . Pravci oblika (2.17) nazivaju se *karakteristike* transportne jednadžbe (2.15). Kako bi takve pravce prikazali u xt -ravnini, iz jednadžbe (2.17) izrazimo

$$t = \frac{1}{c}x - \frac{const}{c},$$

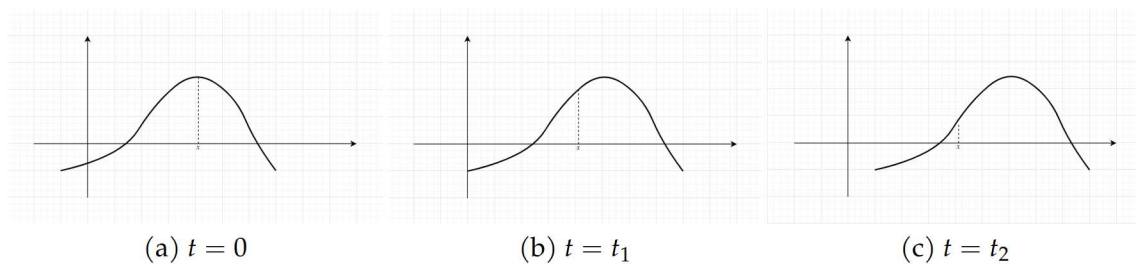
što je pravac s koeficijentom smjera $\frac{1}{c}$. Slika 2.6(a) prikazuje karakteristike transportne jednadžbe (2.15) u xt -ravnini. Tangens kuta α prikazanog na slici iznosi

$$\tan \alpha = \frac{1}{c},$$

i jednak je koeficijentu smjera danog pravca.



Slika 2.6: Karakteristike transportne jednadžbe



Slika 2.7: Promjena grafa funkcije desnog vala kroz vrijeme

Ako pogledamo vrijednosti funkcije w u fiksnom trenutku $t = 0$, imamo

$$w(x, 0) = \chi(x).$$

Isto tako, u nekom trenutku $t = t_1$, $t_1 > 0$ imamo

$$w(x, t_1) = \chi(x - ct_1).$$

Slika 2.7 prikazuje graf funkcije w u trenucima $t = 0 < t_1 < t_2$. Vidimo da graf funkcije w kroz vrijeme zadržava isti oblik, ali kako se vrijednost vremenske varijable t povećava, traslatira se u desno, stoga se funkcija w naziva *desni val*, a konstantu c nazivamo *brzina širenja vala*.

Napomena 2. Raspišemo li jednadžbu (2.12) u obliku

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0,$$

i označimo

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = v,$$

dobivamo transportnu jednadžbu

$$\frac{\partial v}{\partial t} - c \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (2.19)$$

Analognim postupkom kao i ranije, imamo da je funkcija v jednaka funkciji ϕ_- jedne varijable:

$$v(x, t) = \phi_-(x + ct). \quad (2.20)$$

Pravci oblika

$$x + ct = \text{const}$$

nazivaju se karakteristike jednadžbe (2.20) i funkcija v poprima konstantne vrijednosti na svim pravcima tog oblika. Slika 2.6(b) prikazuje takve pravce u xt -ravnini. Graf funkcije v se kroz vrijeme traslatira u lijevo i zbog toga se naziva lijevi val.

Za funkciju w znamo da zadovoljava (2.14) i (2.18) te iz toga imamo jednadžbu za rješenje u valne jednadžbe

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} = \chi(x - ct), \quad (2.21)$$

za neku proizvoljnu funkciju χ . Kako je u pitanju linearna jednadžba, možemo pokušati "pogoditi" jedno rješenje. Stoga, neka je ϕ_+ dovoljno glatka funkcija koja zadovoljava

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_+(x - ct) = \chi(x - ct). \quad (2.22)$$

Funkcija ϕ_+ je funkcija jedne varijable, pa kada raspišemo (2.22) dobivamo

$$\phi'_+(x - ct)(-c) - c\phi'_+(x - ct) = \chi(x - ct).$$

Funkcije ϕ i χ su funkcije iste varijable $\xi := x - ct$, pa vrijedi

$$\phi'_+(\xi) = -\frac{1}{2c}\chi(\xi),$$

odnosno, možemo pisati

$$\phi_+(\xi) = -\frac{1}{2c} \int_0^\xi \chi(y) dy.$$

Oduzmemo li sada jednadžbe (2.21) i (2.22) dobivamo jednadžbu

$$\frac{\partial}{\partial t}(u(x, t) - \phi_+(x - ct)) - c \frac{\partial}{\partial x}(u(x, t) - \phi_+(x - ct)) = 0.$$

Uočimo, označimo li

$$u(x, t) - \phi_+(x - ct) = v(x, t),$$

dobivamo transportnu jednadžbu (2.19), stoga vrijedi i (2.20), pa imamo

$$u(x, t) - \phi_+(x - ct) = \phi_-(x + ct).$$

Time smo dobili da je funkcija u oblika

$$u(x, t) = \phi_+(x - ct) + \phi_-(x + ct). \quad (2.23)$$

Tako definirana funkcija u zadovoljava homogenu valnu jednadžbu (2.12) i dana je kao superpozicija lijevog i desnog vala.

Tvrdnju da je u rješenje valne jednadžbe možemo potkrijepiti sljedećim teoremom.

Teorem 6 (vidjeti [1, 179, Teorem 3.1]). *Funkcija $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ je rješenje valne jednadžbe (2.12) ako i samo ako je oblika (2.23), gdje su $\phi_+, \phi_- \in C^2(\mathbb{R}^2)$.*

Dokaz. Neka je u oblika (2.23). Pokažimo da u zadovoljava valnu jednadžbu (2.12). Izračunajmo parcijalne derivacije od u :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \phi_+''(x - ct) + \phi_-''(x + ct) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \phi_+''(x - ct) + c^2 \phi_-''(x + ct).\end{aligned}$$

Uvrstimo li to u (2.12), dobit ćemo

$$c^2 \phi_+''(x - ct) + c^2 \phi_-''(x + ct) - c^2 \phi_+''(x - ct) - c^2 \phi_-''(x + ct) = 0,$$

te smo time smo pokazali da u zadovoljava valnu jednadžbu.

Kako bismo dokazali drugi smjer, pretpostavit ćemo da u zadovoljava valnu jednadžbu (2.12). Definirajmo nove varijable

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct.$$

Funkcija u sada postaje funkcija novih varijabli:

$$u(x, t) = u(\xi, \eta).$$

Koristeći teorem o složenom deriviranju, izračunat ćemo druge parcijalne derivacije funkcije u u novim varijablama:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.\end{aligned}$$

Uvrstimo li to u valnu jednadžbu, imamo

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) = 0,$$

odnosno, kada pojednostavimo izraz dobivamo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Iz ove jednakosti možemo zaključiti da je $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ konstanta po η , odnosno ovisi samo o varijabli ξ :

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \chi(\xi).$$

Kako bismo dobili funkciju u , integrirajmo navedenu jednakost:

$$u(\xi, \eta) = \int \chi(\xi) d\xi + \phi_-(\eta),$$

gdje je ϕ_- integracijska konstanta s obzirom na varijablu ξ . Označimo sada

$$\phi_+(\xi) = \int \chi(\xi) d\xi,$$

te uvrstimo u funkciju u :

$$u(\xi, \eta) = \phi_+(\xi) + \phi_-(\eta).$$

Time smo funkciju u zapisali kao sumu dviju funkcija od kojih jedna ovisi samo o ξ , a druga samo o η . Vratimo li početne varijable dobivamo oblik rješenja (2.23), odnosno rješenje se može zapisati kao suma dvaju funkcija koje ovise o $x - ct$ i $x + ct$, što je i trebalo pokazati. \square

2.4 D'Alembertova formula

U ovom poglavlju ćemo izvesti D'Alembertovu formulu za rješenje Cauchyjeve zadaće, koja se temelji na uvjetima za početni položaj i brzinu. Početno se rješenje izražava pomoću dvije nepoznate funkcije, koje određujemo uvrštavanjem u početne uvjete i integracijom. U konačnici, dobivamo eksplicitno rješenje u obliku D'Alembertove formule. Također, razmotrit ćemo slučajeve kada početni uvjeti imaju nižu regularnost, što vodi do pojave slabih rješenja i šokova, odnosno udarnih valova, na određenim karakteristikama sustava.

Za izvod D'Alembertove formule promotrimo Cauchyjevu zadaću

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \\ u_0(x) &= u(x, 0) \\ v_0(x) &= \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0). \end{aligned} \tag{2.24}$$

Rješenje valne jednadžbe je oblika (2.23). Uvrstimo li rješenje u u početni položaj imamo:

$$\phi_+(x) + \phi_-(x) = u_0(x). \tag{2.25}$$

Kako bismo rješenje u mogli uvrstiti u početnu brzinu, moramo ga prvo derivirati po varijabli t , zatim uvrstiti $t = 0$:

$$-c\phi'_+(x) + c\phi'_-(x) = v_0(x),$$

podijelimo navedenu jednakost s konstantom c , zatim integrirajmo po segmentu $[0, x]$:

$$-\phi_+(x) + \phi_-(x) = \frac{1}{c} \int_0^x v_0(\xi) d\xi + C, \quad C \in \mathbb{R} \tag{2.26}$$

Oduzmemo li (2.25) i (2.26), dobivamo jednadžbu za ϕ_+ :

$$\phi_+(x) = \frac{1}{2} \left(u_0(x) - \frac{1}{c} \int_0^x v_0(\xi) d\xi + C \right).$$

Zbrojimo li (2.25) i (2.26), dobivamo jednadžbu za ϕ_- :

$$\phi_-(x) = \frac{1}{2} \left(u_0(x) + \frac{1}{c} \int_0^x v_0(\xi) d\xi - C \right).$$

Uvrstimo dobivene ϕ_+ i ϕ_- u rješenje u :

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left(u_0(x - ct) - \frac{1}{c} \int_0^{x-ct} v_0(\xi) d\xi + C \right) + \frac{1}{2} \left(u_0(x + ct) + \frac{1}{c} \int_0^{x+ct} v_0(\xi) d\xi - C \right),$$

zatim sređivanjem izraza dobivamo formulu za rješenje u :

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (u_0(x - ct) + u_0(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(\xi) d\xi, \quad (2.27)$$

navedena formula za rješenje Cauchyjeve zadaće naziva se *D'Alembertova formula*.

Teorem 7. *Neka su $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$, $v_0 \in C^1(\mathbb{R})$. Tada Cauchyjeva zadaća (2.24) ima jedinstveno rješenje i ono je dano D'Alembertovom formulom.*

Dokaz. Dokaz je dan izvodom D'Alembertove formule iznad teorema. \square

Napomena 3. *D'Alembertova formula je korektna i za bitno slabije pretpostavke na u_0 i v_0 od onih navedenih u teoremu: $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$, $v_0 \in C^1(\mathbb{R})$. Stoga, uzmimo sada pretpostavke $u_0 \in C(\mathbb{R})$, te da u'_0 i v_0 imaju prekid prve vrste u nekoj točki $x_0 \in \mathbb{R}$, dok su izvan točke x_0 klase C^1 . D'Alembertova formula uz nove pretpostavke zadovoljava:*

- *uvjet početnog položaja: $u_0(x) = u(x, 0)$,*
- *druga parcijalna derivacija funkcije u postoji u svim točkama, osim onih za koje vrijedi $x - ct = x_0$ ili $x + ct = x_0$,*
- *funkcija u zadovoljava valnu jednadžbu u svim točkama, osim onih za koje vrijedi $x - ct = x_0$ i $x + ct = x_0$,*
- *uvjet početne brzine: $v_0(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)$, za sve točke osim $x = x_0$.*

Takvo rješenje Cauchyjeve zadaće nazivamo slabo rješenje, a gubitak regularnosti slabog rješenja na karakteristikama $x - ct = x_0$ i $x + ct = x_0$ nazivamo šokovi, odnosno udarni valovi.

3 | Početno-rubna zadaća

U ovom poglavlju bavit ćemo se problemom početno-rubne zadaće za homogenu valnu jednadžbu, koja se koristi za modeliranje različitih fizikalnih fenomena poput oscilacija žica. Valna jednadžba opisuje kako se promjene u vremenu dešavaju kroz prostor unutar određenih granica zadanih rubnim uvjetima, a početni uvjeti dodatno definiraju položaj i brzinu sustava u početnom trenutku.

Početno-rubna zadaća, kako je navedeno i u prethodnom poglavlju, sastoji se od *homogene valne jednadžbe*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (3.1)$$

rubnih uvjeta:

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad (3.2)$$

te početnih uvjeta:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x), \quad (3.3)$$

gdje je u_0 početni položaj, a v_0 početna brzina.

3.1 Fourierova metoda

Fourierova metoda, poznata i kao metoda separacije varijabli, jedna je od ključnih tehnika za rješavanje početno-rubnih zadaća. Ova metoda omogućuje nam da složeni problem valne jednadžbe razdvojimo na dva međusobno neovisna problema, od kojih se svaki odnosi na jednu varijablu: prostornu x i vremensku t . Na taj način možemo dobiti rješenja u obliku produkata funkcija koje ovise samo o jednoj varijabli. Rješenje ćemo ovom metodom tražiti u obliku:

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad X(x), T(t) \neq 0, \quad (3.4)$$

gdje su X i T funkcije jedne varijable.

Uvrstimo li (3.4) u valnu jednadžbu (3.1), imamo

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t),$$

odnosno

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

S lijeve strane znaka jednakosti gornjeg izraza je funkcija varijable t , dok je s desne strane funkcija varijable x , stoga izraz mora biti jednak konstanti:

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

što možemo zapisati u obliku običnih diferencijalnih jednažbi:

$$\begin{aligned} T''(t) + \lambda c^2 T(t) &= 0 \\ X''(x) + \lambda X(x) &= 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Uvrstimo li (3.4) u rubne uvjete imamo:

$$X(0)T(t) = 0, \quad X(l)T(t) = 0,$$

ranije smo pretpostavili $T(t) \neq 0$, iz čega slijedi

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0.$$

Dakle, funkcija X zadovoljava *rubnu zadaću*:

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0 \\ X(0) = 0, \quad X(l) &= 0, \end{aligned} \tag{3.6}$$

to je rubna zadaća za linearnu običnu diferencijalnu jednažbu drugog reda. U slučaju $\lambda \leq 0$ imamo samo trivijalno rješenje $X \equiv 0$. U suprotnom, za $\lambda > 0$ rješenje je netrivialna funkcija, odnosno X je svojstvena funkcija koja odgovara svojstvenoj vrijednosti λ :

$$X(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x). \tag{3.7}$$

Uvrstimo li rubne uvjete za X iz (3.6) u svojstvenu funkciju (3.7) imamo:

$$A = 0, \quad \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0,$$

iz čega direktno slijedi:

$$\lambda = \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Uvrštavanjem λ_n u (3.7), možemo definirati svojstvene funkcije:

$$X(x) = X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Nadalje, uvrstimo li λ_n u jednadžbu (3.5) imamo običnu diferencijalnu jednadžbu za T :

$$T''(t) + \frac{c^2 n^2 \pi^2}{l^2} T(t) = 0,$$

čije je opće rješenje dano s:

$$T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right), \quad A_n, B_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Uvrstimo li X_n i T_n u (3.4) imamo funkciju oblika:

$$u_n(x, t) = \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Sve funkcije takvog oblika zadovoljavaju valnu jednadžbu (3.1) i rubne uvjete (3.2) te se nazivaju *stojni valovi*.

Napomena 4. Označimo

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2},$$

te zapišimo u_n u obliku

$$u_n(x, t) = C_n \left(\frac{A_n}{C_n} \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) + \frac{B_n}{C_n} \sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Uočimo da vrijedi

$$\left| \frac{A_n}{C_n} \right|, \left| \frac{B_n}{C_n} \right| < 1, \quad \left(\frac{A_n}{C_n} \right)^2 + \left(\frac{B_n}{C_n} \right)^2 = 1,$$

stoga možemo zaključiti da postoji jedan broj ϕ_n tako da vrijedi

$$\frac{A_n}{C_n} = \sin(\phi_n), \quad \frac{B_n}{C_n} = \cos(\phi_n).$$

Primjenom adicijonog teorema za sinus, funkciju u_n možemo zapisati u obliku

$$u_n(x, t) = C_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{l} + \phi_n\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

gdje se $\frac{n\pi c}{l}$ naziva kružna frekvencija, a ϕ_n faza vala. Fiksiramo li proizvoljnu točku $x \in [0, l]$, ona titra istom kružnom frekvencijom i fazom vala, ali različitom amplitudom: $C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$. Točke $x \in [0, l]$ za koje vrijedi $u_n(x, t) = 0$ za svaki t nazivaju se čvorovi stojnog vala.

Stojni valovi općenito ne zadovoljavaju početne uvjete (3.3). Stoga ćemo rješenje u tražiti *Fourierovom metodom*, odnosno u obliku "beskonačne superpozicije" stojnih valova:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos \left(\frac{n\pi ct}{l} \right) + B_n \sin \left(\frac{n\pi ct}{l} \right) \right] \sin \left(\frac{n\pi x}{l} \right). \quad (3.8)$$

Pomoću početnih uvjeta odredit ćemo preostale nepoznanice A_n i B_n . Uvrštavanjem funkcije u u početni položaj imamo:

$$u(x, 0) = u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \left(\frac{n\pi x}{l} \right).$$

Kako bismo iskoristili početnu brzinu, potrebno je pronaći formalnu derivaciju funkcije u po varijabli t , derivirajući pripadni red član po član:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-A_n \frac{n\pi c}{l} \sin \left(\frac{n\pi ct}{l} \right) + B_n \frac{n\pi c}{l} \cos \left(\frac{n\pi ct}{l} \right) \right] \sin \left(\frac{n\pi x}{l} \right),$$

zatim uvrstiti $t = 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi c}{l} \sin \left(\frac{n\pi x}{l} \right).$$

Koeficijente A_n i B_n odredit ćemo iz Fourierovih redova za funkcije u_0 i v_0 .

Napomena 5. U slučaju da, umjesto Dirichletovih rubnih uvjeta u oba kraja, u lijevom kraju zadamo Neumannov rubni uvjet, a u desnom kraju zadržimo Dirichletov rubni uvjet, analognom postupkom dobivamo oblik rješenja početno-rubne zadaće za valnu jednadžbu:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos \left(\frac{(2n-1)\pi ct}{2l} \right) + B_n \sin \left(\frac{(2n-1)\pi ct}{2l} \right) \right] \cos \left(\frac{(2n-1)\pi x}{2l} \right).$$

Koeficijente A_n i B_n određujemo iz Fourierovih redova za u_0 i v_0 :

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \left(\frac{(2n-1)\pi x}{2l} \right),$$

$$v_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{(2n-1)\pi c}{2l} \cos \left(\frac{(2n-1)\pi x}{2l} \right).$$

Zadamo li u lijevom kraju Dirichletov, a u desnom Neumannov rubni uvjet, tada će rješenje imati oblik:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos \left(\frac{(2n-1)\pi ct}{2l} \right) + B_n \sin \left(\frac{(2n-1)\pi ct}{2l} \right) \right] \sin \left(\frac{(2n-1)\pi x}{2l} \right),$$

a koeficijente A_n i B_n ponovno određujemo iz Fourierovih redova za u_0 i v_0 :

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\right),$$

$$v_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{(2n-1)\pi c}{2l} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\right).$$

3.2 Fourierovi redovi

Kako bismo odredili rješenje početno-rubne zadaće za ograničenu žicu potrebno je razviti funkcije u_0 i v_0 u Fourierov red. Fourierov red je trigonometrijski red, on predstavlja beskonačnu sumu sinusa i kosinusa:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad (3.9)$$

za neke $a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Da bismo odredili navedene koeficijente, koristit ćemo sljedeću lemu:

Lema 3. Za $n, k \in \mathbb{N}$ vrijedi:

- $\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nx) \cos(kx) dx = \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$
- $\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(kx) dx = \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$
- $\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nx) \sin(kx) dx = 0$

Pomnožimo (3.9) s $\cos(kx)$, zatim formalno integrirajmo dobiveni izraz po varijabli x na segmentu $[0, 2\pi]$:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx = \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} \cos(kx) dx$$

$$+ \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) \cos(kx) + b_n \sin(nx) \cos(kx)) dx.$$

Primijetimo, $\cos(2k\pi) = 1$, za svaki $k \in \mathbb{N}_0$ stoga vrijedi

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx) dx = 0.$$

Sumu u gornjoj jednakosti integriramo član po član:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_0^{2\pi} \cos(nx) \cos(kx) dx \right.$$

$$\left. + b_n \int_0^{2\pi} \sin(nx) \cos(kx) dx \right) dx,$$

to možemo napraviti ako je red uniformno konvergentan.

Primjenom Leme 3 na prethodnu jednakost dobivamo formulu za računanje koeficijenta a_k :

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ako (3.9), umjesto s $\cos(kx)$, pomnožimo sa $\sin(kx)$ analognim postupkom dobivamo formulu za koeficijent b_k :

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

U slučaju da (3.9) samo integriramo po varijabli x na segmentu $[0, 2\pi]$, dobivamo koeficijent a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx.$$

Navedeni koeficijenti a_k, b_k i a_0 nazivaju se Fourierovi koeficijenti, a pripadni (3.9) naziva se Fourierov red za funkciju f .

Uočimo da vrijedi

$$|a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| \leq |a_n| + |b_n|,$$

stoga primjenom Weierstrassovog kriterija Fourierov red za funkciju f će konvergirati uniformno i apsolutno ako konvergira red $\sum(|a_n| + |b_n|)$.

Teorem 8. *Ako je funkcija $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna i po dijelovima klase C^1 , onda njezin Fourierov red konvergira uniformno i apsolutno.*

Pogledajmo neke posebne situacije koje će nam biti potrebne u nastavku.

Lema 4. *Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodična i po dijelovima neprekidna na segmentu $[0, 2\pi]$.*

- *Ako je funkcija f parna, onda je*

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = 0.$$

- *Ako je funkcija f neparna, onda je*

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

Neka je funkcija f definirana na segmentu $[0, \pi]$, odnosno neka je $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$. Funkciju f možemo proširiti po parnosti:

$$f(-x) = f(x), \quad x \in [0, \pi]$$

na segment $[-\pi, 0]$. Zatim, funkciju f možemo proširiti po periodičnosti sa segmenta $[-\pi, \pi]$ na cijeli \mathbb{R} . Tada se red

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx), \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

dobivene proširene funkcije f , naziva Fourierov red po kosinus funkcijama. Analogno, uz uvjet $f(0) = f(\pi) = 0$, funkciju f možemo proširiti po neparnosti:

$$f(-x) = -f(x), \quad x \in [0, \pi]$$

na segment $[-\pi, 0]$, zatim po periodičnosti i na cijeli \mathbb{R} . Tada se red

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx), \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

naziva Fourierov red po sinus funkcijama.

Teorem 9. *Neka je funkcija $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna i po dijelovima klase C^1 . Tada Fourierov red funkcije f po kosinus funkcijama konvergira uniformno i apsolutno prema f . Ako je dodatno $f(0) = f(\pi) = 0$, ista tvrdnja vrijedi za Fourierov red po sinus funkcijama.*

Izveli smo Fourierove redove za funkcije definirane na segmentu $[0, 2\pi]$, ali nama su Fourierovi redovi potrebni za funkcije definirane na segmentu $[0, 2l]$.

Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $2l$ -periodična. Definirajmo funkciju

$$y(x) := \frac{\pi x}{l},$$

takva funkcija će bijektivno i monotonno preslikati segment $[0, 2\pi]$ u segment $[0, 2l]$. Inverz navedene funkcije je

$$x = \frac{ly}{\pi}.$$

Tada je funkcija

$$\hat{f}(y) := f\left(\frac{ly}{\pi}\right) = f(x)$$

2π -periodična te njezin Fourierov red za funkciju \hat{f} ima oblik

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(ny) + b_n \sin(ny)),$$

iz čega, zamjenom varijabli dobivamo Fourierov red za funkciju f :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right),$$

uz koeficijente

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Analogno definiramo Fourierov red po kosinus, odnosno sinus funkcijama:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx.$$

Formalnim smo računom ranije dobili:

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

$$v_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi c}{l} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

ako u_0 i v_0 zadovoljavaju pretpostavke Teorema 9, onda su to Fourierovi redovi po sinus funkcijama za funkcije u_0 , odnosno v_0 , stoga su koeficijenti A_n i $B_n \frac{n\pi c}{l}$ Fourierovi koeficijenti navedenih redova, što znači da vrijedi:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx,$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^l v_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx. \quad (3.10)$$

Sljedećim teoremom ćemo opravdati navedeni postupak određivanja rješenja početno-rubne zadaće.

Teorem 10. *Neka funkcije u_0 i v_0 zadovoljavaju:*

- u_0'' je neprekidna i po dijelovima klase C^1
- v_0' je neprekidna i po dijelovima klase C^1
- uvjete kompatibilnosti: $u_0(0) = u_0(l) = u_0''(0) = u_0''(l) = v_0(0) = v_0(l) = 0$.

Tada je izrazom (3.8), gdje su A_n i B_n oblika (3.10), dobro definirana funkcija $u \in C^2([0, l] \times \mathbb{R}_0^+)$ koja je rješenje početno-rubne zadaće. Parcijalne derivoacije funkcije u reda manjeg ili jednakog 2, možemo dobiti formalnim deriviranjem reda član-po-član i svi ti redovi konvergiraju uniformno i apsolutno.

Napomena 6. U slučaju da je u lijevom kraju zadan Neumannov, a u desnom Dirichletov rubni uvjet, kako smo i ranije naveli, koeficijente A_n i B_n računamo iz Fourierovih redova za funkcije početnog položaja i početne brzine:

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\right),$$

$$v_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{(2n-1)\pi c}{2l} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\right).$$

Analognom postupkom određujemo navedene koeficijente:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\right) dx,$$

$$B_n = \frac{4}{(2n-1)\pi c} \int_0^l v_0(x) \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\right) dx.$$

Također, analogno određujemo koeficijente A_n i B_n u slučaju Dirichletovog rubnog uvjeta u lijevom i Neumannovog u desnom kraju:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\right) dx,$$

$$B_n = \frac{4}{(2n-1)\pi c} \int_0^l v_0(x) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\right) dx.$$

Kako bismo bolje razumili postupak, odredit ćemo rješenje početno-rubne zadaće za valnu jednadžbu primjenom Fourierove metode u sljedećem primjeru.

Primjer 1. Promotrimo osciliranje homogene, na krajevima učvršćene žice duljine $l = 6$, linijske gustoće $\rho = 4$, napete s $a = 16$. Udarac krutog ravnog čekića širine $\epsilon = 0.4$ pobuđuje gibanje žice u točki $x = 4$ tako da je početna brzina žice na segmentu $[3.8, 4.2]$ jednaka 2. Žica je u trenutku $t = 0$ postavljena horizontalno. Zapišimo početno-rubnu zadaću, zatim ju riješimo Fourierovom metodom.

Rješenje. Jednadžba gibanja, odnosno titranja žice glasi:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) = f(x, t).$$

Uvrstimo li zadane podatke $a = 16$, $\rho = 4$, $f = 0$ imamo:

$$4 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(16 \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) = 0,$$

odnosno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0,$$

što je homogena valna jednažba s konstantom $c^2 = 4$, odnosno $c = 2$.

Poznato nam je da je žica učvršćena u krajevima, što nam daje rubne uvjete:

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = u(6, t) = 0.$$

Žica se u početnom trenutku nalazi u horizontalnom položaju, odnosno početni položaj žice je jednak 0:

$$u(x, 0) = u_0(x) = 0.$$

Pobuđujemo titranje žice udarcem čekića na segmentu $[3.8, 4.2]$, čime je definirana početna brzina:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 3.8 \\ 2, & 3.8 \leq x < 4.2 \\ 0, & 4.2 \leq x \leq 6 \end{cases}.$$

Rješenje početno-rubne zadaće tražimo u obliku:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Uvrstimo poznate podatke:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{2n\pi t}{6}\right) + B_n \sin\left(\frac{2n\pi t}{6}\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{6}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi t}{3}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi t}{3}\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{6}\right). \end{aligned}$$

Koeficijente A_n i B_n određujemo iz Fourierovih redova za u_0 i v_0 :

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \\ B_n &= \frac{2}{n\pi c} \int_0^l v_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx. \end{aligned}$$

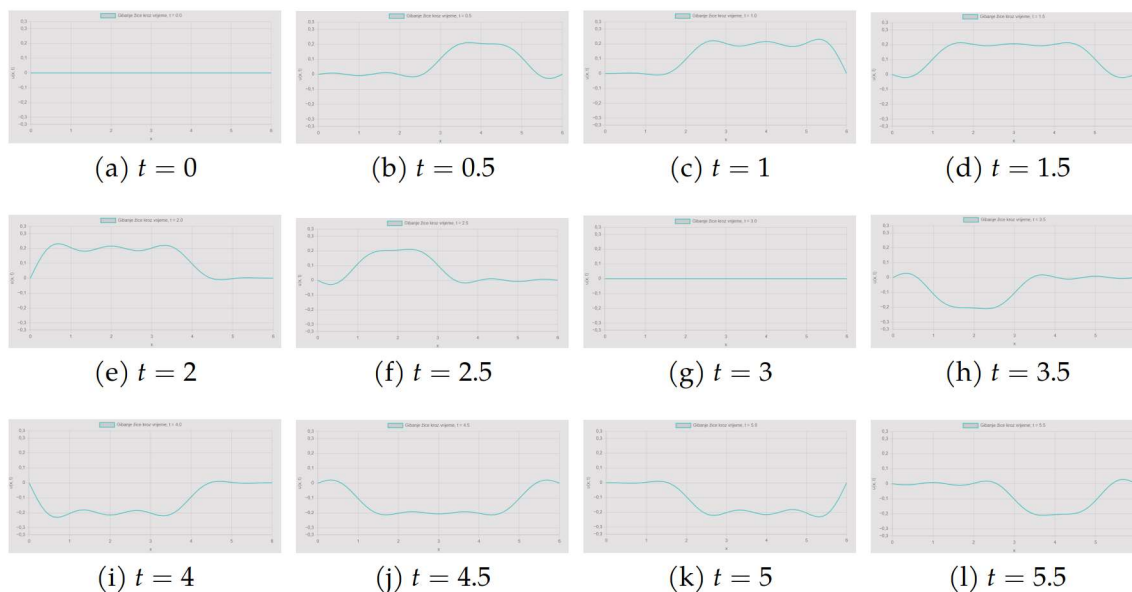
Iz $u_0(x) = 0$ direktno slijedi $A_n = 0$. Uvrstimo početnu brzinu i odredimo koeficijente B_n :

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{2n\pi} \int_{3.8}^{4.2} 2 \sin\left(\frac{n\pi x}{6}\right) dx = -\frac{1}{n\pi} \frac{12}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{6}\right) \Big|_{3.8}^{4.2} \\ &= -\frac{12}{n^2\pi^2} \left(\cos\left(\frac{4.2n\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{3.8n\pi}{6}\right) \right) \\ &= \frac{12}{n^2\pi^2} \left(\cos\left(\frac{19n\pi}{30}\right) - \cos\left(\frac{7n\pi}{10}\right) \right). \end{aligned}$$

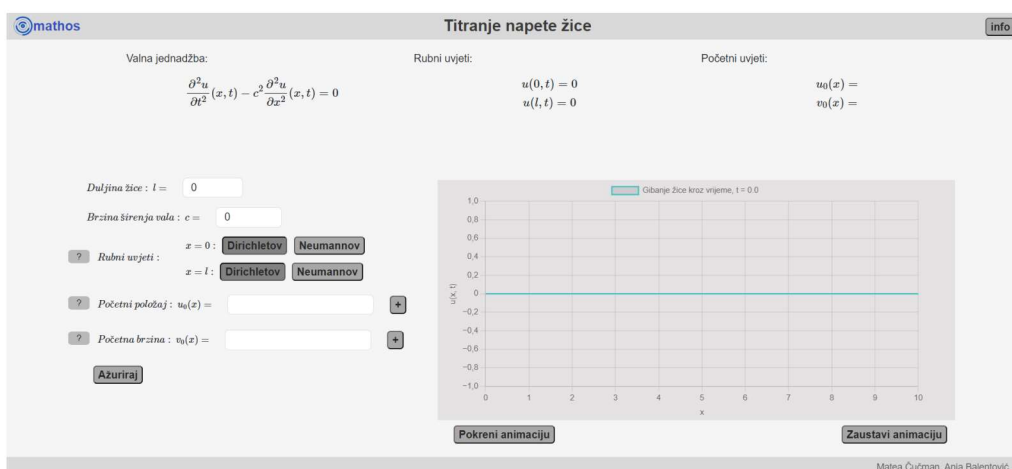
Uvrstimo koeficijente A_n i B_n u funkciju u :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{n^2\pi^2} \left(\cos\left(\frac{19n\pi}{30}\right) - \cos\left(\frac{7n\pi}{10}\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi t}{3}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{6}\right), \\ & \quad x \in [0, 6], t \geq 0, \end{aligned}$$

time smo odredili rješenje dane početno-rubne zadaće. Slika 3.1 daje vizualni prikaz rješenja ovog primjera kroz vrijeme.

Slika 3.1: Promjena grafa funkcije u kroz vrijeme

Ukoliko je rješenje početno-rubne zadaće jedinstveno, moguće ga je vizualizirati na grafu. Rješenja početno-rubnih zadaća uz zadane Dirichletove rubne uvjete, ili kombinaciju Dirichletovog i Neumannovog rubnog uvjeta, moguće je vizualizirati korištenjem web aplikacije (vidi [7]) čiji izgled je prikazan na Slici 3.2. U aplikaciji vidimo grafičko sučelje unutar kojeg unosimo duljinu žice, brzinu širenja vala, zadajemo rubne uvjete, te unosimo funkcije početnog položaja i brzine. Klikom na gumb *Ažuriraj*, na gornjoj polovici ekrana prikazat će se početno-rubna zadaća koju smo zadali, dok će se ispod toga, unutar koordinatnog sustava prikazati graf funkcije u . Pritiskom na gumb *Pokreni animaciju*, vidimo kako se funkcija u mijenja u stvarnom vremenu.



Slika 3.2: Web aplikacija za vizualizaciju titranja žice kroz vrijeme

Literatura

- [1] I. AGANOVIĆ, K. VESELIĆ, *Linearne diferencijalne jednađbe. Uvod u rubne probleme*, Element, Zagreb, 1997.
- [2] I. AGANOVIĆ, K. VESELIĆ, *Jednađbe matematičke fizike*, Školska knjiga, Zagreb, 1985.
- [3] I. AGANOVIĆ, K. VESELIĆ, *Matematički modeli i metode*, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku – Odjel za matematiku, Osijek, 2014.
- [4] K. BURAZIN, J. JANKOV, *Glazba titrajuće žice*, Osječki matematički list 14(2014), 1-22
- [5] Š. UNGAR, *Matematička analiza 3*, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet – Matematički odjel, Zagreb, 2002.
- [6] B. GULJAŠ, *Matematička analiza 1 i 2*, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet – Matematički odjel, Zagreb, 2018.
- [7] *Vizualizacija titranja žice*, dostupno na [\https://laplace.mathos.hr/titranje-zice/](https://laplace.mathos.hr/titranje-zice/).

Sažetak

Ovaj rad analizira titranje žice primjenom valne jednadžbe i odgovarajućih matematičkih metoda. Razmatraju se rubni i početni uvjeti te se objašnjavaju osnovne karakteristike valne jednadžbe. Posebna pažnja posvećena je D'Alembertovoj formuli, kao i Fourierovoj metodi i Fourierovim redovima za rješavanje početno-rubnih zadataka. Rad pruža uvid u matematičke tehnike koje omogućuju razumijevanje i modeliranje vibracija žice, s naglaskom na njihove primjene u znanosti i inženjeringu.

Ključne riječi

valna jednadžba, rubni i početni uvjeti, homogenizacija rubnih uvjeta, početno-rubna zadataka, karakteristike valne jednadžbe, D'Alembertova formula, Fourierova metoda, Fourierovi redovi

Naslov rada na engleskom jeziku

Summary

This paper analyzes the vibration of a string using the wave equation and relevant mathematical methods. It examines boundary and initial conditions, and explains the fundamental characteristics of the wave equation. Special attention is given to D'Alembert's formula, as well as Fourier's method and Fourier series for solving initial-boundary value problems. The paper provides insights into the mathematical techniques that enable the understanding and modeling of string vibrations, with a focus on their applications in science and engineering.

Keywords

wave equation, boundary and initial conditions, homogenization of boundary conditions, initial-boundary value problem, characteristics of the wave equation, D'Alembert's formula, Fourier method, Fourier series

Životopis

Moje ime je Matea Čučman, rođena sam 26.03.2003. u Slavonskom Brodu. Godine 2009. sam upisala Osnovnu školu Sibinjskih žrtava, Sibinj (tada Osnovna škola Ivan Mažuranić). Nakon završene osnovne škole, od 2017. do 2021. godine pohađala sam opći smjer Gimnazije Matija Mesić, Slavonski Brod. Odmah po završetku srednje škole upisala sam prijediplomski studij Matematika i računarstvo na Fakultetu primijenjene matematike i informatike (tada Odjel za matematiku), Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, kojeg sam završila 2024. godine.