Upotreba interaktivnih digitalnih alata u diferencijalnom računu

Pažur, Katarina

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
FAKULTET PRIMIJENJENE MATEMATIKE I INFORMATIKE

Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Upotreba interaktivnih digitalnih alata u diferencijalnom računu

ZAVRŠNI RAD

Mentor:
doc. dr. sc. Ivana Kuzmanović Ivičić

Student:
Katarina Pažur

Osijek, 2024

Sadržaj

Uvod

Diferencijalni račun je jedan od temelja matematičke analize, s ključnom ulogom u razumijevanju promjena i ponašanja funkcija. Kroz pojmove kao što su derivacija, nagib grafa, diferencijalni račun omogućuje analizu i modeliranje različitih fenomena u prirodnim i društvenim znanostima. Tradicionalni pristupi poučavanju diferencijalnog računa često se oslanjaju na teoriju i statične prikaze, što može predstavljati izazov u razumijevanju apstraktnih matematičkih koncepata.

S razvojem digitalne tehnologije, pojavili su se interaktivni alati koji pružaju nove mogućnosti za vizualizaciju i manipulaciju matematičkim pojmovima. Alati poput GeoGebre i Desmosa omogućuju dinamično istraživanje i eksperimentiranje s funkcijama i njihovim grafovima, čime olakšavaju dublje razumijevanje diferencijalnog računa.

U prvom poglavlju definirali smo pojam funkcije, pojam kodomene i domene funkcije, pojam grafa funkcije te pojam grafa funkcije. Naveli smo njihova svojstva, te primjere uz koje su definicije shvatljivije.

U drugom poglavlju definirali smo limes funkcije i neprekidnost, limes slijeva i limes zdesna, te također naveli primjere. Naveli smo također i vrste prekida funkcije u točki.

U trećem poglavlju glavni pojam su derivacije funkcije. Definirali smo pojam derivacije funkcije, naveli njezinu geometrijsku interpretaciju, te pokazali kako izgleda u koordinatnom sustavu. Objasnili smo crtanje i izračunavanje derivacije, te naveli još neke specifične derivacije.

Cilj ovog rada je istražiti kako se interaktivni digitalni alati mogu koristiti za poboljšanje učenja i poučavanja diferencijalnog računa. Matematički će se definirati ključni pojmovi poput derivacije, funkcije i nagiba grafa, te će se predložiti interaktivne ilustracije koje mogu pomoći učenicima u boljem razumijevanju ovih koncepata.

1 Funkcija

U matematici, funkcije predstavljaju ključni koncept za razumijevanje odnosa između različitih količina. Tako ćemo ovaj rad započeti s osnovnim pojmom koji svi trebaju usvojiti, a to je pojam funkcije.

1.1 Matematička definicija funkcije

Definicija 1.1. Neka su D i K bilo koja dva neprazna skupa. Postupak f koji svakom elementu $x \in D$ pridružuje točno jedan element $y \in K$ nazivamo funkcija ili preslikavanje s D u K. Ova funkcija se zapisuje kao

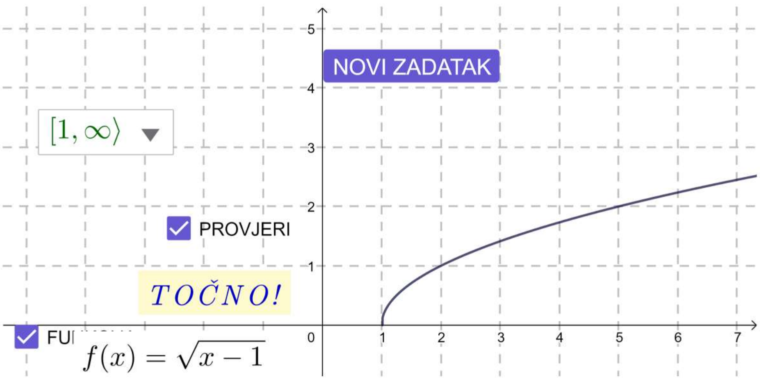
$$f : D \to K \quad \text{ili} \quad x \mapsto f(x), \quad x \in D.$$

Kao što možemo vidjeti u definiciji 1.1 je naglašeno da svakom elementu $x \in D$ mora biti pridružen točno jedan element skupa K, to govori da nikako ne smiju biti jednom elemetu iz skupa D pridružena dva ili više elemenata iz skupa K. Iz definicije funkcije također možemo odrediti i što je domena, a što kodomena te ih objasniti.

Domena (ili područje definicije) funkcije f, označena s D, je skup svih elemenata x kojima funkcija f pridružuje neku vrijednost iz skupa K. Drugim riječima, domena je skup iz kojeg funkcija f "uzima" svoje argumente.

Kodomena (ili područje vrijednosti) funkcije f, označena s K, je skup koji sadrži vrijednosti $f(x)$ za svaki x iz domene D.

Primjer 1.1. *Kako je GeoGebra interaktivni digitalni alat, tako u njoj možemo zadavati i zadatke. Tako postoje zadaci koji traže od korisnika da odredi skup koji bi bio domena funkcije. Jedan od takvih zadataka izgleda ovako:*



Slika 1: Aplet za određivanje domene funkcije, dostupno putem poveznice: https://www.geogebra.org/m/kdgz8qvc.

Zadatak od korisnika traži da za zadanu funkciju odredi skup koji je domena i onda provjeri točnost svoga odgovora. Kada je odabran točan odgovor prelazi se na iduću funkciju.

Također uz funkciju nam se vežu još dva vrlo bitna skupa, a to su slika funkcije i graf funkcije f.

Slika funkcije f označena sa $f(D)$ je skup svih elemenata $y \in K$ koji su rezultat primjene funkcije na neki element iz domene D. Drugim riječima, slika funkcije je podskup kodomene, sastavljen od svih vrijednosti koje funkcija zapravo postiže. Slika funkcije f iz domene D u kodomenu K preciznije je definirana kao:

$$f(D) = \{y \in K \mid y = f(x) \text{ za neki } x \in D\}.$$

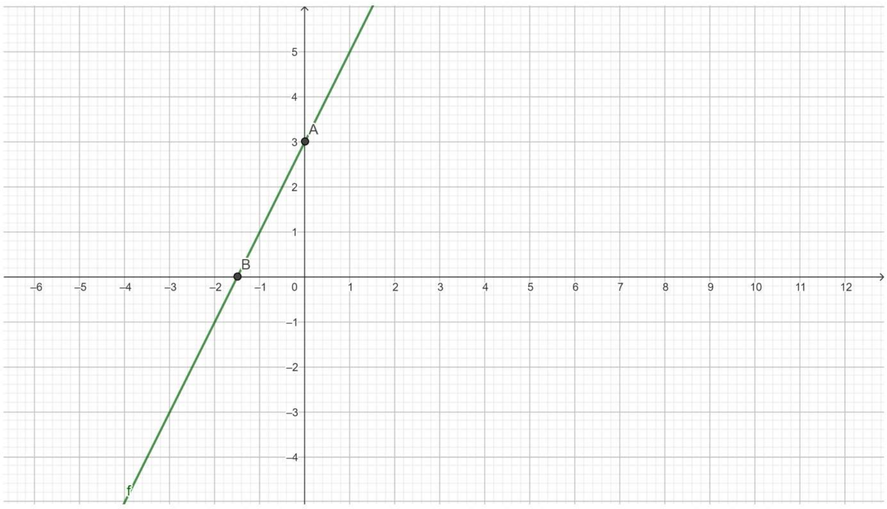
Graf funkcije f je skup uređenih parova (x, y), gdje je x element iz domene D, a $y = f(x)$ je odgovarajuća vrijednost iz kodomene K. Graf funkcije pruža vizualnu reprezentaciju funkcije u koordinatnom sustavu. Graf funkcije f definiran je kao skup:

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}.$$

1.2 Primjeri

Primjer 1.2. *Razmotrimo funkciju* $f(x) = 2x + 3$.

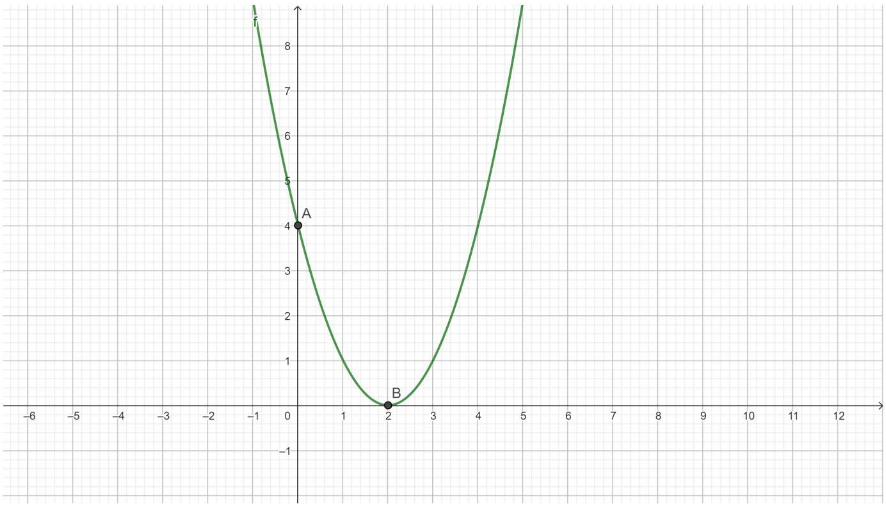
- *Domena:* $D = \mathbb{R}$, *funkcija je definirana za sve realne brojeve.*
- *Kodomena:* $K = \mathbb{R}$, *funkcija može poprimiti sve realne brojeve kao vrijednosti.*
- *Slika:* $f(D) = \mathbb{R}$, *kako je linearna funkcija, može poprimiti sve vrijednosti u* $\mathbb{R}$
- *Graf: Graf funkcije je pravac s nagibom 2 i presjekom y-osi u točki (0,3). Ekvivalentno, graf je skup svih točaka oblika (x, 2x+3), gdje je x realan broj.*



Slika 2: Graf linearne funkcije $f(x) = 2x + 3$.

Primjer 1.3. *Razmotrimo funkciju* $g(x) = x^2 - 4x + 4$.

- *Domena:* $D = \mathbb{R}$, *funkcija je definirana za sve realne brojeve.*
- *Kodomena:* $K = \mathbb{R}$, *funkcija može poprimiti sve realne brojeve kao vrijednosti.*
- *Slika:* $g(D) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$, *najmanja vrijednost ove funkcije je 0, pa slika funkcije uključuje sve nenegativne realne brojeve.*
- *Graf: Graf funkcije* $g(x) = x^2 - 4x + 4$ *je parabola koja dotiče x-os u točki s apscisom* $x = 2$ *i ima tjeme na toj točki.*



Slika 3: Graf kvadratne funkcije $f(x) = x^2 - 4x + 4$.

Napomena 1.1. Grafovi svih elementarnih funkcija mogu se lako dobiti u GeoGebri tako što se samo upiše pravilo pridruživanja. Nije potrebno unositi nikakve dodatne naredbe za crtanje (kao što je primjerice potrebno u programskom jeziku Mathematica).

2 Limes funkcije i neprekidnost

Analiza funkcija u matematici često zahtijeva dublje razumijevanje kako se funkcije ponašaju u blizini određenih točaka, što dovodi do dva ključna pojma: limes i neprekidnost. Ovi pojmovi ne samo da su temelji diferencijalnog i integralnog računa, već imaju i ključnu ulogu u mnogim područjima matematike i primijenjenih znanosti.

Limes funkcije omogućava da precizno analiziramo kako se funkcija ponaša dok se njezin argument približava određenoj točki. Kroz koncept limesa, možemo opisati ponašanje funkcije u slučajevima kada funkcija možda nije definirana ili kada se ponaša na složen način u toj točki. Ovo je posebno korisno za razumijevanje i rješavanje problema u kojima je važno kako se funkcija ponaša kada se argument "približava" određenoj vrijednosti.

Neprekidnost funkcije je povezana s pojmom limesa jer opisuje kako funkcija održava stabilnost svojih vrijednosti kada se njezin argument mijenja. Funkcija se smatra neprekidnom ako nema "prekida" ili "skakanja" u svom grafu, što znači da su limes funkcije i njezina stvarna vrijednost u toj točki usklađeni. U ovoj cjelini, najprije ćemo definirati pojam limesa, a nakon toga razmotrit ćemo pojam neprekidnosti.

2.1 Limes funkcije

Kada se bavimo funkcijama koje opisuju prirodne ili tehničke procese, često je važno znati što se događa s funkcijom kako se njezin argument približava nekoj određenoj točki, čak i ako funkcija u toj točki nije definirana ili se ponaša na složeniji način. Limes je temeljni pojam u matematici, posebno u analizi, jer omogućava precizno razumijevanje ponašanja funkcija u blizini određene točke. Ovaj pojam otvara vrata za daljnje istraživanje neprekidnosti, derivacija i integrala, čineći ga ključnim za daljnje razumijevanje i primjenu diferencijalnog računa.

U nastavku ćemo formalno definirati limes funkcije kako bismo bolje razumjeli ovaj koncept i njegovu primjenu. Najprije ćemo definirati gomilište skupa.

Definicija 2.1. Gomilište ili točka gomilanja skupa S je točka x takva da svaka njezina okolina sadrži barem jedan element skupa S različit od x, tj. točka x je točka gomilanja skupa S ako i samo ako za svaki $\epsilon > 0$, ϵ-okolina točke x sadrži barem jedan element skupa S koji je različit od x.

Definicija 2.2. Neka je $f : D \to \mathbb{R}$ funkcija definirana na skupu $D \subseteq \mathbb{R}$, i neka je c gomilište skupa D. Kažemo da funkcija f ima limes L u točki c ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takvo da za sve $x \in D$, za koje vrijedi $0 < |x - c| < \delta$, vrijedi i:

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

Označavamo to kao:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L.$$

Drugim riječima, funkcija f ima limes L u točki c ako, kad god se x dovoljno približi c, vrijednosti funkcije $f(x)$ postaju proizvoljno bliske vrijednosti L.

Limes slijeva i limes zdesna odnose se na ponašanje funkcije kada se argumenti funkcije približavaju točki s lijeve ili s desne strane te točke. Ova razlika postaje posebno važna u situacijama kada funkcija može imati različito ponašanje na lijevoj i desnoj strani točke, što može utjecati na njezinu ukupnu neprekidnost ili na njezinu vrijednost u toj točki.

Definicija 2.3. Neka je $f : D \to \mathbb{R}$ funkcija definirana na skupu $D \subseteq \mathbb{R}$. Funkcija f ima limes L kada se x približava točki c slijeva ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takvo da za sve $x \in D$ koji zadovoljavaju $c - \delta < x < c$, vrijedi:

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

Označavamo to kao:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L^-.$$

Također, analogno nam slijedi i definicija za limes zdesna.

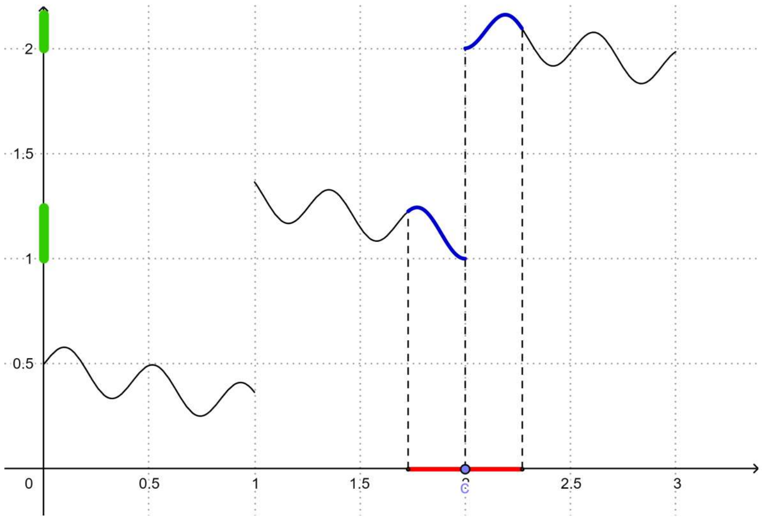
Definicija 2.4. Neka je $f : D \to \mathbb{R}$ funkcija definirana na skupu $D \subseteq \mathbb{R}$. Funkcija f ima limes L kada se x približava točki c zdesna ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takvo da za sve $x \in D$ koji zadovoljavaju $c < x < c + \delta$, vrijedi:

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

Označavamo to kao:

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L.$$

Limes slijeva i limes zdesna nazivamo jednostranim limesima. Pogledajmo primjere jednostranih limesa na grafu i u apletu:



Slika 4: Aplet za intuitivnu definiciju limesa, dostupno putem poveznice:
https://www.geogebra.org/m/dbbjyqhb.

Tu možemo vidjeti primjere funkcija koje imaju ili nemaju limese. Ovaj aplet služi nam da intiuitivno vidimo značenje definicije limesa. Limes funkcije u točki a ($\lim_{x\to a} f(x)$) postoji samo ako su oba jednostrana limesa jednaka. To znači da mora biti:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x).$$

Ako su limes slijeva i limes zdesna jednaki, onda kažemo da funkcija ima limes u toj točki, i on je jednak toj zajedničkoj vrijednosti.

Ako se ova dva limesa razlikuju, onda limes ne postoji, iako jednostrani limesi mogu postojati. Navest ćemo i dva primjera samog izračunavanja limesa.

Primjer 2.1. *Razmotrimo funkciju:*

$$f(x) = \frac{2x-4}{x-1}.$$

Želimo izračunati:

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x-4}{x-1}.$$

Ako izravno zamijenimo x s 1, dobijamo:

$$f(1) = \frac{2\cdot 1-4}{1-1} = \frac{-2}{0},$$

što je neodređeno.

Pojednostavimo funkciju:

$$\frac{2x-4}{x-1} = \frac{2(x-2)}{x-1}.$$

Za izračun limesa, analiziramo ponašanje funkcije kad x dolazi s lijeva i s desna:
- Kada $x \to 1^-$:

$$\frac{2(x-2)}{x-1} \to -\infty.$$

- Kada $x \to 1^+$:

$$\frac{2(x-2)}{x-1} \to +\infty.$$

Primjer 2.2. *Razmotrimo funkciju:*

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}.$$

Želimo izračunati:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}.$$

Ako izravno zamijenimo x s 1, dobijamo:

$$f(1) = \frac{1^2-1}{1-1} = \frac{0}{0},$$

što je neodređeno.

Pojednostavimo funkciju faktoriziranjem brojnika:

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1),$$

tada:

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}.$$

Za $x \neq 1$, možemo skratiti $x-1$ u brojniku i nazivniku:

$$f(x) = x + 1.$$

Sada izračunavamo limes:

$$\lim_{x\to 1}(x+1).$$

Zamijenimo x s 1:

$$\lim_{x\to 1}(x+1) = 1 + 1 = 2.$$

Dakle:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2.$$

Iako funkcija f nije definirana u točki $x = 1$, limes funkcije u toj točki postoji i on je jednak 2.

2.2 Neprekidnost

Nakon što smo detaljno istražili pojam limesa prirodan je sljedeći korak analizirati koncept neprekidnosti funkcije. Neprekidnost je ključan matematički pojam koji opisuje stabilnost funkcijskih vrijednosti u blizini određenih točaka i ima duboke implikacije u analizi i primjeni funkcija.

Razumijevanje neprekidnosti funkcije omogućava nam da uočimo i karakteriziramo ponašanje funkcije na način koji nije uvijek očigledan iz samo jednostavnih formula. Kada kažemo da je funkcija neprekidna u određenoj točki, to znači da ne postoje "prekidi" ili "skokovi" u njenom grafu u toj točki. U matematičkom smislu, funkcija je neprekidna u točki ako je limes funkcije u toj točki jednak stvarnoj vrijednosti funkcije u toj točki.

U ovom radu podsjetit ćemo se samo nekih najvažnijih definicija i obilježja neprekidnosti, dovoljno da možemo nastaviti na derivacije.

Tako ćemo započeti s osnovnom definicijom koja govori o neprekidnosti funkcije u točki, a ona glasi:

Definicija 2.5. Neka je f funkcija definirana na otvorenom intervalu koji sadrži točku a. Funkcija f je neprekidna u točki a ako je ispunjen sljedeći uvjet:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

To znači da:

- Limes funkcije f kada x teži prema a mora postojati i biti konačan.
- Vrijednost funkcije u točki a mora biti jednaka ovom limesu.

Drugim riječima, funkcija f je neprekidna u točki a ako, kada se x približava a, vrijednosti funkcije $f(x)$ približavaju vrijednost $f(a)$ bez obzira na to s koje strane se x približava a. Kažemo da je funkcija f neprekidna, ako je neprekidna u svakoj točki svoje domene.
Kada funkcija nije neprekidna u nekoj točki kažemo da ona u toj točki ima prekid. Kada kažemo da funkcija ima prekid u točki, mislimo na to da funkcija ne ispunjava uvjete neprekidnosti u toj točki. Postoji nekoliko vrsta prekida funkcije u točki.

Uklonjivi prekid nastaje kada funkcija nije definirana u točki $x = a$, ali su limesi slijeva i zdesna u toj točki konačni i jednaki.

Definicija 2.6. Funkcija f ima uklonjivi prekid u točki $x = a$ ako $f(a)$ nije definirana, ali su:

$$\lim_{x \to a^-} f(x)$$

i

$$\lim_{x \to a^+} f(x)$$

konačni i jednaki.

Primjer 2.3. *Razmotrimo funkciju:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \textit{ako } x \neq 2 \\ \textit{nije definirano}, & \textit{ako } x = 2 \end{cases}.$$

U točki $x = 2$, limes slijeva i limes zdesna su oba jednaka 4, ali funkcija nije definirana u toj točki.

Prekid prve vrste, ili skok, nastaje kada funkcija ima različite jednostrane limese u točki, ili kada funkcija u točki ima skok vrijednosti.

Definicija 2.7. Funkcija f ima skok u točki $x = a$ ako:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x),$$

gdje $\lim_{x\to a^-} f(x)$ označava limes slijeva i $\lim_{x \to a^+} f(x)$ označava limes zdesna.

Primjer 2.4. *Razmotrimo funkciju:*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako } x < 0 \\ 2, & \text{ako } x \geq 0 \end{cases}.$$

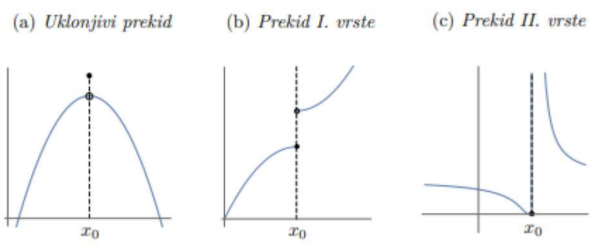
U točki $x = 0$, limes slijeva je 1, dok je limes zdesna 2. Funkcija ima skok u toj točki.

Prekid druge vrste nastaje kada limes funkcije u točki ne postoji. Ovo se može dogoditi kada funkcija oscilira ili raste prema beskonačnosti kada se približava točki.

Primjer 2.5. *Razmotrimo funkciju:*

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

U točki $x = 0$, funkcija f oscilira prema beskonačnosti, što znači da limes ne postoji.



Slika 5: Vrste prekida. [1, str. 134]

Uz same definicije važno je znati i koja osnovna svojstva možemo primjeniti kod neprekidnih funkcija.

- Zbroj neprekidnih funkcija: Ako su f i g dvije funkcije koje su neprekidne na istom skupu D, tada je njihova suma $f + g$ također neprekidna na tom skupu.

- Umnožak neprekidnih funkcija: Ako su f i g dvije funkcije koje su neprekidne na istom skupu D, tada je njihov umnožak $f \cdot g$ također neprekidan na tom skupu.

- Kompozicija neprekidnih funkcija: Ako su f i g neprekidne funkcije, tada ako je njihova kompozicija $f \circ g$ definirana, također je neprekidna na svojoj domeni.

Ta svojstva pokazat ćemo na nekim primjerima.

Primjer 2.6. *Razmotrimo funkcije:*

$$f(x) = x^2 \quad i \quad g(x) = 3x + 2.$$

Obje funkcije su neprekidne na cijelom skupu $\mathbb{R}$, pa je njihova suma:

$$(f + g)(x) = x^2 + 3x + 2,$$

koja je također neprekidna na $\mathbb{R}$.

Primjer 2.7. *Razmotrimo funkcije:*

$$f(x) = e^x \quad i \quad g(x) = \sin(x).$$

Obje funkcije su neprekidne na cijelom skupu $\mathbb{R}$, pa je njihov umnožak:

$$(f \cdot g)(x) = e^x \cdot \sin(x),$$

koji je također neprekidan na $\mathbb{R}$.

Primjer 2.8. *Razmotrimo funkcije:*

$$f(x) = \sqrt{x} \quad i \quad g(x) = x^2.$$

Ako je $x \geq 0$, funkcije su neprekidne i njihova kompozicija je:

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2} = |x|,$$

koja je također neprekidna za $x \in \mathbb{R}$.

3 Derivacija funkcije

Nakon što smo se detaljno upoznali s pojmovima limesa i neprekidnosti funkcija, dolazimo do jednog od najvažnijih koncepata u diferencijalnom računu — derivacije.

Derivacija funkcije u određenoj točki predstavlja brzinu promjene funkcije u toj točki. Formalno, to je granica omjera promjena funkcije kada se promjena argumenta približava nuli. Derivacija omogućava da uočimo kako funkcija reagira na male promjene u svojoj nezavisnoj varijabli i pruža ključne informacije o ponašanju funkcije poput nagiba njezinog grafa i točaka ekstremnih vrijednosti.

3.1 Definicija derivacije

Definicija derivacije funkcije u matematici opisuje kako se funkcija mijenja u određenoj točki. Evo formalne definicije derivacije:

Definicija 3.1. Neka je f funkcija definirana na nekom intervalu koji sadrži točku x_0. Kažemo da je funkcija f diferencijabilna u točki x_0 ako postoji konačan limes:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Ako ovaj limes postoji i konačan je, onda je f diferencijabilna u x_0, a $f'(x_0)$ se naziva derivacija funkcije f u toj točki.

Uz derencijabilnost u točki možemo povezati i neprekidnost u toj točki.

Teorem 3.1. *[1, str. 149]Ako je funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabilna u točki $x_0 \in (a, b)$, onda je ona i neprekidna u toj točki.*

Dokaz. Funkcija f je neprekidna u točki x_0 ako je

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Kako je:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \right) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

to je

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

□

Kako je definirana diferencijabilnost funkcije u točki možemo dalje definirati:

Definicija 3.2. [1, str. 152] Kažemo da je realna funkcija f : (a,b) $\to \mathbb{R}$ derivabilna ili diferencijabilna na intervalu (a, b) ako je derivabilna u svakoj točki $x_0 \in$ (a, b). Funkciju $f' : I \to \mathbb{R}$ nazivamo derivacija funkcije f.

Derivacija funkcije može se intuitivno razumjeti kroz nekoliko međusobno povezanih pojmova: prirast, omjer prirasta, linearni aproksimant i tangenta. Kada razmatramo funkciju f, prirast funkcije Δf opisuje promjenu vrijednosti funkcije kada promijenimo argument x za određenu vrijednost Δx. Ovaj prirast izražava se kao

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Omjer prirasta, tj. omjer ove promjene funkcije i promjene argumenta, daje prosječnu brzinu promjene funkcije na intervalu $[x, x + \Delta x]$, što možemo zapisati kao:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

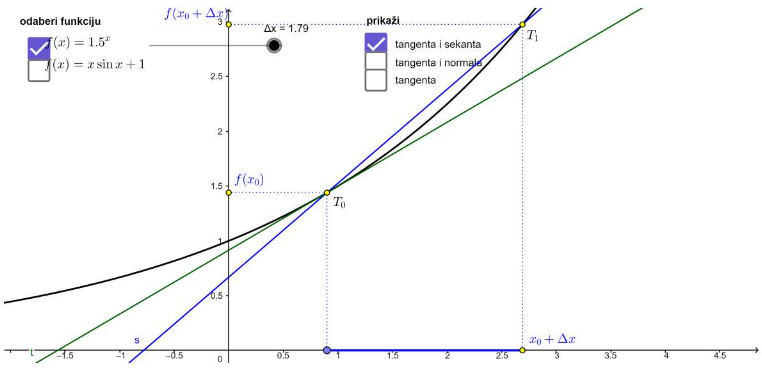
Derivacija funkcije u točki x predstavlja granicu ovog omjera prirasta kada Δx teži nuli. Formalno, derivacija $f'(x)$ uz ove pojmove definirala bi se:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Ova granica govori o trenutnoj brzini promjene funkcije, odnosno o tome kako se funkcija ponaša u vrlo malom okolnom području točke x.

Pojednostavljeno, geometrijska interpretacija bi glasila: kako se Δx smanjuje, sekanta s se približava tangenti t, pri čemu je sekanta pravac kroz točke $(x_0, f(x_0))$ i $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$, a tangenta je pravac koji dira graf funkcije u točki $(x_0, f(x_0))$. U granici kada Δx teži nuli, sekanta se podudara s tangentom, čime sekanta prelazi u tangentu.

Takav jedan primjer možemo vidjeti na idućoj slici iz GeoGebre.



Slika 6: Aplet za definiciju derivacije, dostupan putem poveznice: https://www.geogebra.org/m/kuz6hmyg.

Slika pruža vizualnu interpretaciju pojma derivacije, prikazujući kako sekanta (koja predstavlja prosječnu brzinu promjene) prelazi u tangentu (koja predstavlja trenutnu brzinu promjene) dok razmak između dvije točke na grafu postaje sve manji. Slika dolazi iz apleta kojeg se može otvoriti putem poveznice ili QR-koda. Aplet nudi slike za 2 različite funkcije te se sekante i tangente mogu maknuti ili prikazati.

Iz te geometrijske interpretacije točno vidimo kako crtamo graf takve jedne derivacije. Počinjemo s grafom funkcije f. Izaberemo nekoliko točaka na ovom grafu u kojima želimo izračunati derivaciju. U svakoj od tih točaka crtamo tangentu. Nagib te tangente nam govori koliko funkcija f brzo raste ili pada u toj točki. Ako je nagib tangente pozitivan, to znači da se vrijednost funkcije u toj točki povećava. Ako je nagib negativan, vrijednost funkcije pada. Ako je tangenta horizontalna, funkcija se u toj točki ne mijenja. Tangentu kao pojam još nismo formalno definirali pa učinimo to sada.

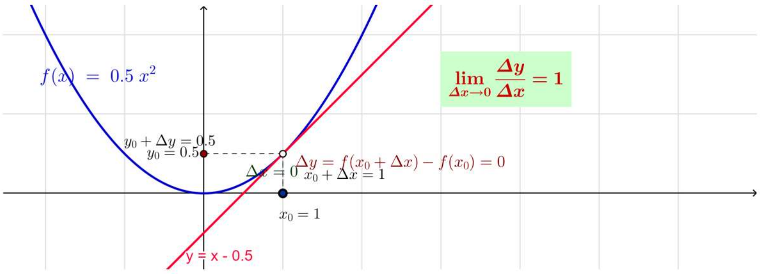
Definicija 3.3. Neka je f funkcija definirana na intervalu oko točke x_0, i neka je f derivabilna u x_0. Tangenta na krivulju $y = f(x)$ u točki $(x_0, f(x_0))$ je pravac koji prolazi kroz tu točku i ima nagib (koeficijent smjera) jednak derivaciji funkcije f u toj točki, tj. $f'(x_0)$. Jednadžba tangente može se zapisati kao:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

gdje su:

- $f(x_0)$ je ordinata točke u kojoj tangenta dodiruje krivulju.

- $f'(x_0)$ je nagib (koeficijent smjera) tangente, odnosno brzina promjene funkcije u točki x_0.



Slika 7: Aplet za tangentu na graf funkcije, pristupiti možemo putem poveznice: https://www.geogebra.org/m/cyuewtvq.

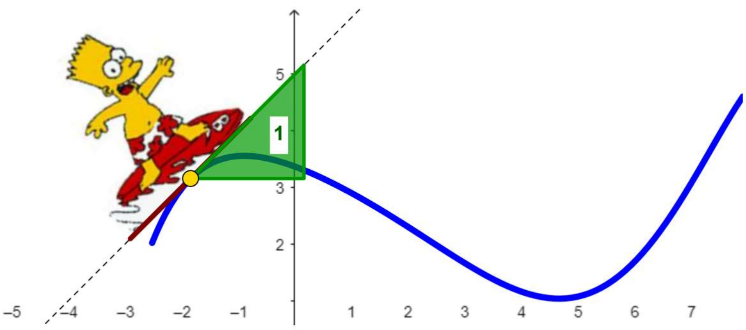
Na grafu možemo vidjeti kako je nacrtana tangenta na graf funkcije, te ukoliko otvorimo priloženi aplet iz GeoGebre točno nam je opisano kako smo do te tangente došli.

Kao što možemo vidjeti u apletu nagib tangente u točki $(x_0, f(x_0))$ može se izračunati kao limes. U točki x_0 nagib tangente zadan je kao:

$$\text{Nagib} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Dok je nagib grafa funkcije jednak nagibu tangente.

Primjer 3.1. *Nagib grafa funkcije može se prikazati i na mlađim korisnicima prilagođeniji način pomoću interaktivnih alata.*



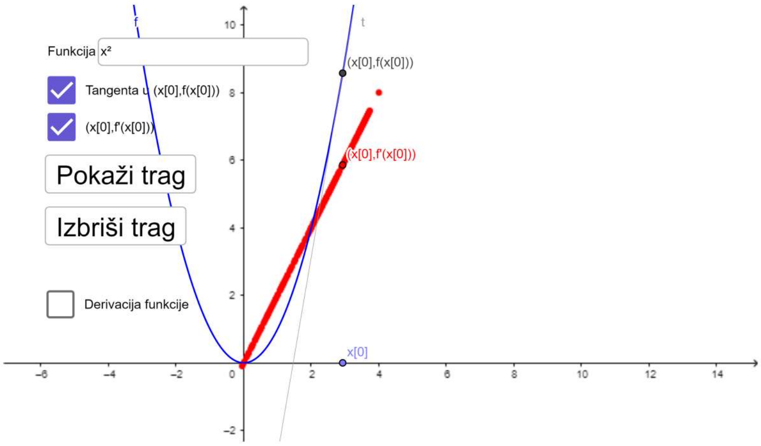
Slika 8: Aplet za nagib grafa funkcije, može mu se pristupiti putem poveznice: https://www.geogebra.org/m/gsxwj9hr

Tako ovdje vidimo tangentu kao "dasku za surfanje" koju kad uđemo u aplet možemo pomicati i vidjeti kako se mijenja nagib pravca ovisno u kojoj se točki nalazimo.

Upoznati sa svim pojmovima možemo nastaviti na graf drivacije funkcije. Da bismo dobili graf derivacije funkcije, bilježimo vrijednost nagiba tangente za svaku od izabranih točaka. Na grafu derivacije, apscise ostaju iste kao na originalnom grafu funkcije, ordinate prikazuju vrijednosti nagiba tangente. Ovo daje novi graf koji pokazuje kako se brzina promjene funkcije mijenja duž x-osi.

Dakle, graf derivacije funkcije prikazuje vrijednosti nagiba tangente u različitim točkama na originalnom grafu funkcije. Ovaj graf omogućuje da vidimo kako se funkcija ponaša, na temelju promjena u brzini njenog rasta ili pada.

Takav proces crtanja najjasnije ćemo objasniti uz pomoć GeoGebrinog apleta:



Slika 9: Aplet za graf derivacije funkcije, može mu se pristupiti putem poveznice: https://www.geogebra.org/m/fawwzznr.

U tom apletu možemo točno vidjeti kako za određenu funkciju nastaju točke koje se kasnije spajaju u graf derivacije funkcije. U aplet se može upisati proizvoljna funkcija i povlačenjem točke vidimo kako nastaje "trag" koji spajanjem u graf postaje graf derivacije funkcije.

Nakon što smo geometrijski interpretirali derivaciju kao nagib tangente na grafu funkcije, sada ćemo pristupiti izračunavanju derivacije koristeći koncept omjera promjena ili pomaka. Ovaj pristup omogućuje razumijevanje derivacije kao mjere brzine promjene funkcije u odnosu na malu promjenu nezavisne varijable x.

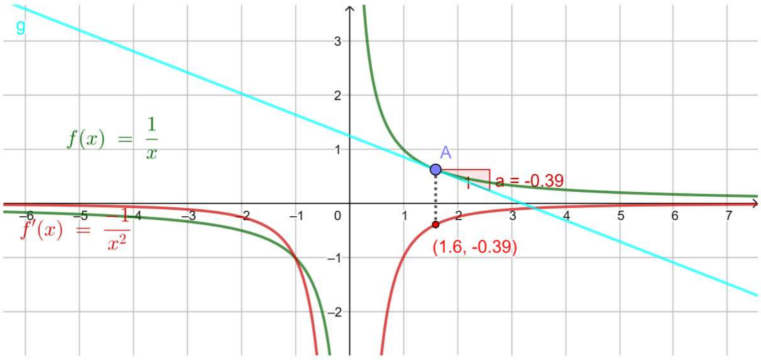
Za funkciju f, promjena u vrijednosti funkcije kada se x promijeni za mali iznos Δx iznosi $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$. Omjer te promjene, odnosno omjer Δf i Δx, daje prosječnu brzinu promjene funkcije između točaka x i $x + \Delta x$:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Ovaj omjer promjena pruža aproksimaciju za derivaciju funkcije u točki x. Kada je Δx dovoljno malen, omjer postaje sve bliži stvarnoj derivaciji $f'(x)$, što omogućuje da izračunamo derivaciju pomoću vrlo malih pomaka.

U mnogim praktičnim situacijama, dovoljno je uzeti mali pomak Δx kako bismo procijenili derivaciju funkcije. Ova metoda je korisna za intuitivno razumijevanje kako se funkcija mijenja u neposrednoj blizini određene točke. Iako formalna definicija koristi granicu (limes) kada Δx teži nuli, pomak je jednostavniji način za početno razumijevanje i računanje derivacija.

Pogledat ćemo kako to izgleda na stvarnom primjeru funkcije.



Slika 10: Aplet za postupak računanja derivacije, dostupano putem poveznice: https://www.geogebra.org/m/ydk89ymp.

Na slici vidimo graf funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ (zeleno), derivaciju funkcije $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ (crveno), i tangentu na grafu funkcije u točki A. Tangenta je nacrtana plavom bojom.

Točka A je točka na grafu funkcije f s apscisom $x = 1.6$ u kojoj izračunavamo derivaciju $f'(x)$. Derivacija funkcije u točki A (odnosno, u točki $x = 1.6$) je geometrijski prikazana kao nagib tangente u toj točki. Na slici, vrijednost derivacije u toj točki iznosi $f'(x) = -0.39$.

Što se događa kada pomičemo točku A? Kada pomičemo točku A duž grafa funkcije f, zapravo mijenjamo vrijednost x u kojoj računamo derivaciju funkcije f u točki. Kako se točka A pomiče, mijenja se nagib tangente na grafu, što znači da se mijenja i vrijednost derivacije $f'(x)$ u toj točki. Ovaj nagib može biti pozitivan, negativan ili jednak nuli, ovisno o obliku grafa funkcije u tom području. Na taj način, točka A omogućuje dinamičko vizualiziranje kako se derivacija (nagib tangente) mijenja u različitim točkama na grafu funkcije.

U GeoGebrinom apletu možemo pomicati točku A i vizualno vidjeti kako geometrijska interpretacija zapravo odgovara izračunavanju derivacije, također korisnik može sam unijeti funkciju za koju želi izračunati derivaciju, te vidjeti kako izgleda derivacija, a kako sama funkcija.

3.2 Derivacija zbroja, razlike, umnoška i kvocijenta

Nakon što smo definirali derivaciju, važno je razumjeti kako se derivacija ponaša u odnosu na osnovne operacije poput zbroja, razlike, umnoška i kvocijenta funkcija. Ove osnovne operacije omogućavaju da izražavamo složenije funkcije na jednostavniji način, a pravila za derivaciju ovih operacija omogućavaju jednostavno deriviranje funkcija dobivenih od osnovnih funkcija primjenom tih računskih operacija.

Teorem 3.2. *[9, str. 94] Neka su funkcije $f, g : I \to \mathbb{R}$ derivabilne u točki $x \in I$. Tada vrijedi:*

1. *$f + g$ je derivabilna u x i vrijedi:*

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

2. *$f - g$ je derivabilna u x i vrijedi:*

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$

3. $f \cdot g$ je derivabilna u x i vrijedi:

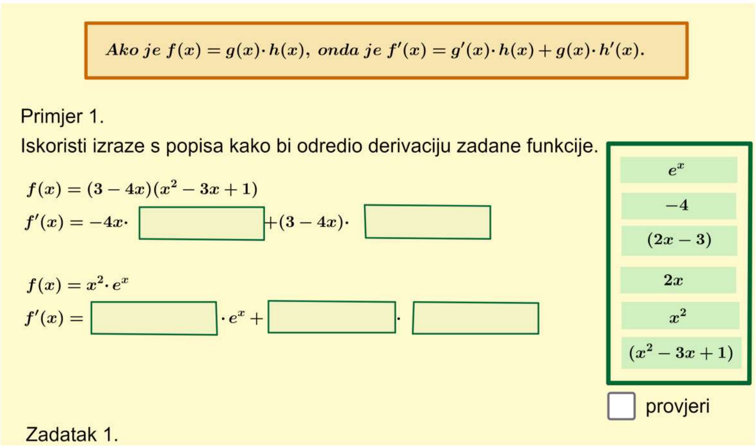
$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

4. ako je $g(x) \neq 0$, onda je $\frac{f}{g}$ derivabilna u x i vrijedi:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

Dokaz. Dokaz vidi u [9, str. 94 i 95] □

Primjer 3.2. *Također se u GeoGebri mogu izraditi zadatci razne vrste. Tako imamo primjer zadatka za derivaciju umnoška i kvocijenta funkcija. Kada pogledamo aplet u njemu se nalaze dva podzadatka u kojima korisnik mora spojiti izraze sa točnim mjestima u jednadžbi na koja one pripadaju. To je još jedan koristan način kako možemo provjeriti stečeno znanje.*



Slika 11: Aplet za primjer postupka računanja derivacije, dostupano putem poveznice: https://www.geogebra.org/m/prtsk3ck.

3.3 Derivacija složene funkcije

Kada se bavimo derivacijom složene funkcije, primjenjujemo idući teorem. Ovaj teorem omogućava izračunavanje derivacije funkcije koja je kompozicija dviju ili više funkcija.

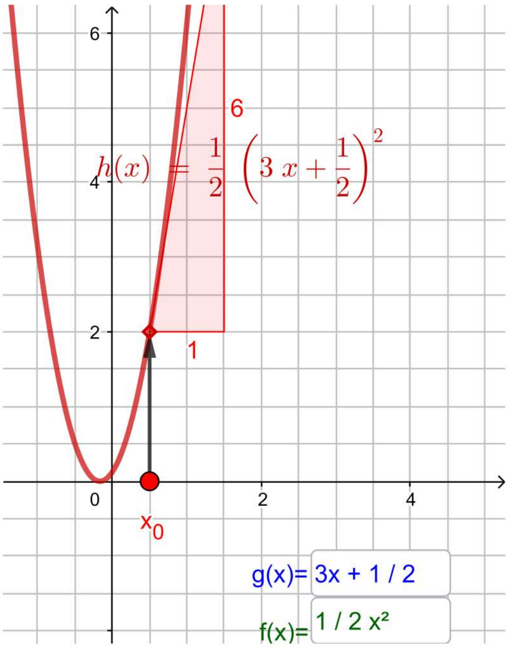
Teorem 3.3. *[1, str. 154] Neka su f i g realne funkcije, takve da je kompozicija $f \circ g$ definirana. Neka je također g derivabilna u x_0, a f u točki $g(x_0)$. Tada vrijedi:*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Dokaz. Za dokaz vidjeti [9, str. 96]. □

Taj teorem još nazivamo lančano pravilo. Lančano pravilo omogućava efikasno izračunavanje derivacija složenih funkcija analizom i kombiniranjem derivacija njihovih sastavnih dijelova.

Primjer 3.3. *Pomoću GeoGebre kreiran je zadatak za izračunavanje derivacije kompozicije dviju funkcija.*



Slika 12: Aplet za primjer postupka računanja derivacije, dostupano putem poveznice: https://www.geogebra.org/m/kv223vbz.

U zadatku objašnjen je postupak kako bi korisnici sami trebali izračunati derivaciju kompozicije dviju funkcija i dan je početni primjer. Obje početne funkcije mogu se proizvoljno promijeniti i vidjeti koji bi bio rezultat derivacije njihove kompozicije.

3.4 Derivacije nekih elementarnih funkcija

U ovom odjeljku razmotrit ćemo derivacije nekih elementarnih funkcija koje se često pojavljuju u matematici i primijenjenim znanostima. Najčešće derivacije takvih funkcija radimo pomoću već poznatih tablica derivacija.

Derivacije trigonometrijskih funkcija

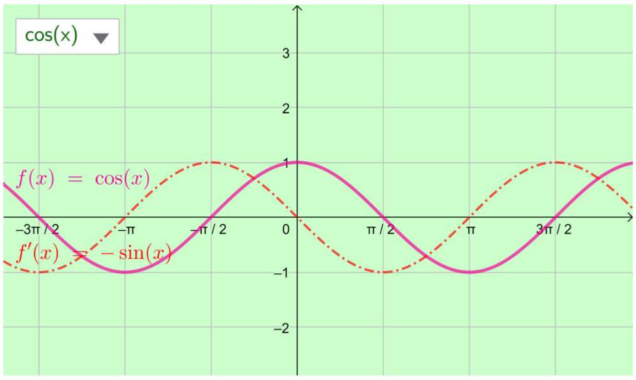
Derivacije trigonometrijskih funkcija ključne su za analizu periodičnih fenomena u matematici i fizici. Osnovna pravila uključuju:

- Derivacija funkcije sinus $\sin(x)$ je kosinus $\cos(x)$:
$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x).$$
- Derivacija funkcije kosinus $\cos(x)$ je negativni sinus $-\sin(x)$:
$$\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x).$$

- Derivacija tangensa $\mathrm{tg}(x)$ je $\frac{1}{\cos^2 x}$:

$$\frac{d}{dx}\,\mathrm{tg}(x) = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Primjer 3.4. *Derivacija funkcije kosinus.*



Slika 13: Aplet derivacije trigonometrijskih funkcija, dostupno na poveznici: https://www.geogebra.org/m/qnw3mayc

Također i derivacije preostale tri funkcije mogu se vidjeti u GeoGebrinom apletu dostupnom putem priložene poveznice i QR koda.

Derivacija eksponencijalne funkcije

Eksponencijalna funkcija $e : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ i neki $a \in \mathbb{R}$.

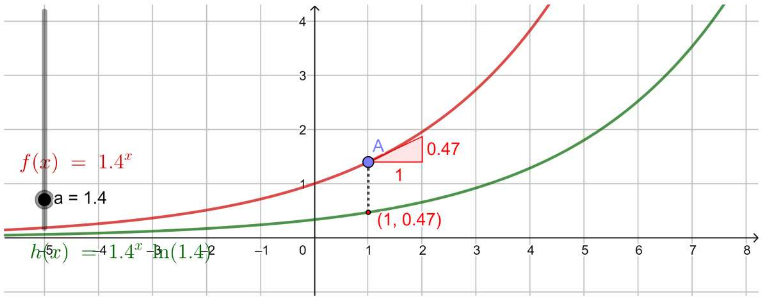
$$(e^a)' = \lim_{x \to a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = e^a \cdot \lim_{x-a \to 0} \frac{e^{x-a} - 1}{x - a} = e^a.$$

Dakle, vidimo kako je eksponencijalna funkcija derivabilna u za svaki realan broj a i da je $\forall x \in \mathbb{R}$ $(e^x)' = e^x$.

Nadalje, za eksponencijalnu funkciju s bazom a, $a > 0$ definiranu kao $a^x = e^{x ln\, a}$ vrijedi:

$$(a^x)' = e^{x ln\, a} \cdot ln\ a = a^x ln\, a.$$

Pogledajmo kako bi to izgledalo grafički.



Slika 14: Aplet za derivaciju eksponencijalne funkcije, dostupno na poveznici: https://www.geogebra.org/m/jfxnvs7t.

Kada otvorimo priloženu aktivnost možemo vidjeti kako se promjenom baze a u eksponencijalnoj funkciji mijenja oblik njezine derivacije. Također možemo potvrditi i kada broj a odgovara broju e, tada je i graf derivacije funkcije jednak grafu funkcije, tj. derivacija je jednaka samoj funkciji.

Derivacija logaritamske funkcije

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}, \forall x > 0.$$

Postupak izvođenja ove formule možemo pogledati u [1, str. 154].

Za funkciju $f(x) = \log_a(x)$, derivacija se može izračunati pomoću prirodnog logaritma. Prvo, izrazimo logaritam s bazom a kao:

$$f(x) = \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)},$$

gdje je $\ln(x)$ prirodni logaritam, a $\ln(a)$ je konstanta.

Koristeći pravilo za derivaciju kvocijenta, dobivamo:

$$(\log_a(x))' = \frac{1}{\ln(a)} \cdot (\ln(x))'.$$

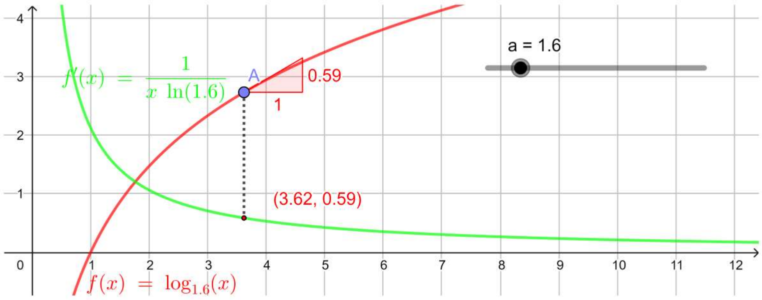
Kombinirajući sve ovo, dobivamo:

$$(\log_a(x))' = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln(a)}.$$

Dakle, derivacija funkcije $f(x) = \log_a(x)$ je:

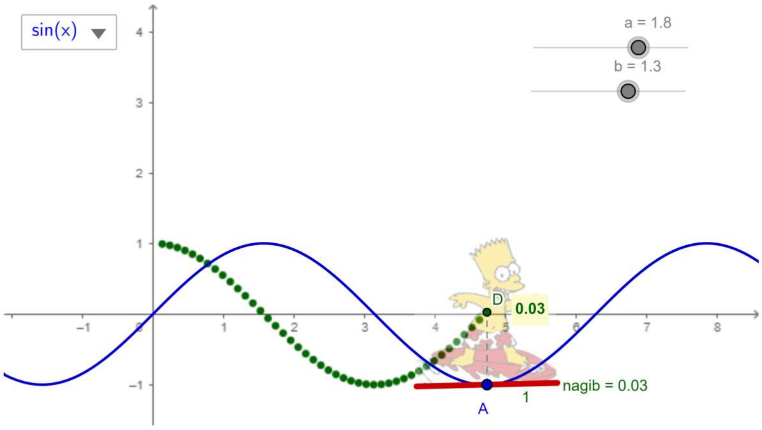
$$(\log_a(x))' = \frac{1}{x\ln(a)}.$$

Geometrijski prikaz derivacije eksponencijalnih funkcija s raznim bazama možemo vidjeti u apletu sa Slike 15.



Slika 15: Aplet za derivaciju logaritamske funkcije, dostupno na poveznici: https://www.geogebra.org/m/wzr9swrm.

Primjer 3.5. *Za neke mlađe korisnike dosta je teško shvatiti sam pojam derivacije, ali uz pomoć GeoGebrinih apleta može im se to predočiti na njima zanimljiviji način. Tako postoji još jedan aplet u kojem je deriviranje nekih elementarnih funkcija prikazano kao surfanje Barta Simpsona.*



Slika 16: Zabavni aplet za deriviranje, dostupno putem poveznice: https://www.geogebra.org/m/senpbqp3.

Aplet ujedinjuje više specifičnih funkcija za koje se mogu pogledati animacije kako Bart "surfa" grafom te funkcije dok usputno crta derivaciju iste.

Preostale derivacije elementarnih funkcija mogu se pronaći u [11, str. 14].

3.5 Derivacije višeg reda

Koncept derivacije funkcije važan je u različitim granama matematike i primijenjenih znanosti, kao što su analiza i fizika, jer omogućava detaljno ispitivanje ponašanja funkcije.

Neka je f funkcija koja je n-puta diferencijabilna. Derivacija prvog reda funkcije f označava se kao $f'(x)$ ili $\frac{d}{dx}f(x)$, dok derivacija drugog reda označava se kao $f''(x)$ ili $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$. Općenitije, derivacija n-tog reda označava se kao $f^{(n)}(x)$ ili $\frac{d^n}{dx^n}f(x)$.

Računanje derivacija viših redova

Derivacija drugog reda izračunava se kao derivacija prve derivacije:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right).$$

Opća derivacija n-tog reda funkcije f može se izračunati ponovnim primjenjivanjem pravila derivacije te se može definirati induktivno:

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'.$$

U ovom zapisu $f^{(n)}$ predstavlja n-tu derivaciju te funkcije f, a također po dogovoru vrijedi $f^{(0)} = f$.

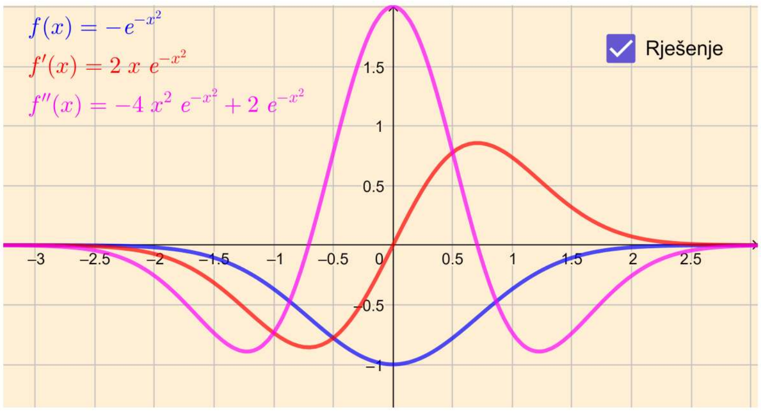
Derivacije viših redova pružaju korisne informacije o ponašanju funkcije, kao što su njena zakrivljenost i lokalni ekstremi. U fizici, na primjer, drugi red derivacije može opisivati ubrzanje, dok treći red može ukazivati na promjene u ubrzanju. Tako postoje i razlike u grafovima. U analizi funkcija i njihovih derivacija, možemo razlikovati graf funkcije od grafova njenih prvih i drugih derivacija pomoću određenih svojstava:

Graf funkcije prikazuje oblik funkcije i njezine vrijednosti u odnosu na x.

Graf prve derivacije prikazuje nagibe funkcije $f(x)$. Na ovom grafu, točke gdje je $f'(x) = 0$ mogu odgovarati točkama minimuma i maksimuma funkcije $f(x)$. Ako funkcija $f(x)$ raste, $f'(x)$ će biti pozitivan, a ako opada, $f'(x)$ će biti negativan. Graf prve derivacije pokazuje kako se nagib funkcije mijenja.

Preostaje nam još graf druge derivacije. On nam prikazuje zakrivljenost funkcije $f(x)$. Ako je $f''(x)$ pozitivan, funkcija $f(x)$ je konveksna (zakrivljena prema gore). Ako je $f''(x)$ negativan, funkcija je konkavna (zakrivljena prema dolje). Na grafu druge derivacije, nul-točke (gdje je $f''(x) = 0$) predstavljaju točke infleksije funkcije $f(x)$, gdje se zakrivljenost mijenja.

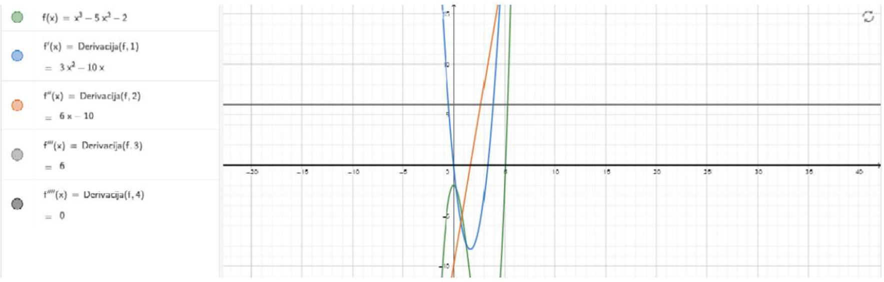
Pogledajmo kako to izgleda na grafu neke određene funkcije.



Slika 17: Aplet za derivacije višeg reda, dostupno na poveznici: https://www.geogebra.org/m/fvqz76qe.

Vidimo kako aplet daje mogućnost da pogledamo sliku bez natpisa koji je graf funkcije, a koji graf određene derivacije. Time aplet daje mogućnost da prvo pogledamo grafički prikaz i provjerimo možemo li sami zaključiti koji je graf funkcije, a koji graf određene derivacije. Na taj način možemo provjeriti svoje ili znanje nekog drugog korisnika.

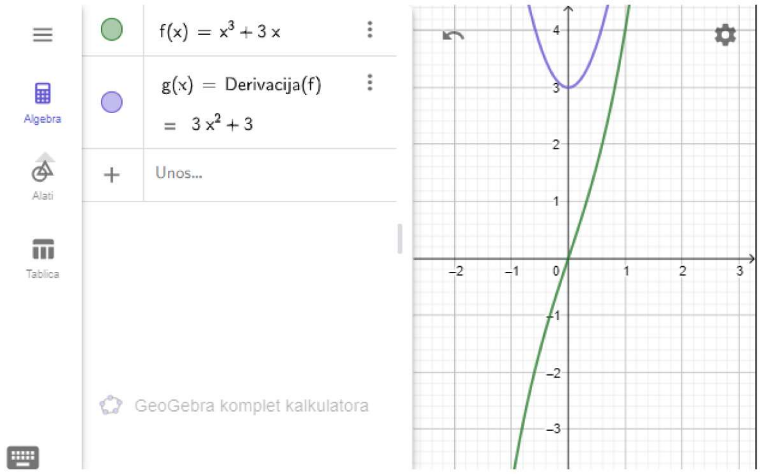
Primjer 3.6. ***Prve četiri derivacije funkcije.***
Ovo je primjer još jednog GeoGebrinog apleta napravljenog za pomoć s derivacijama višeg reda. Ovom apletu možemo unijeti bilo koju funkciju i on će nam izračunati koje su prve 4 derivacije te funkcije te nam također nacrtati njihove grafove. Možemo odmah vidjeti odgovara li ponašanje grafova prve dvije derivacije onome što bi ti grafovi tebali predstavljati, te vidimo kako se ponašaju i neke derivacije viših redova.



Slika 18: Aplet za primjer prvih 4 derivacija, dostupno na poveznici: https://www.geogebra.org/m/mmxyst3b.

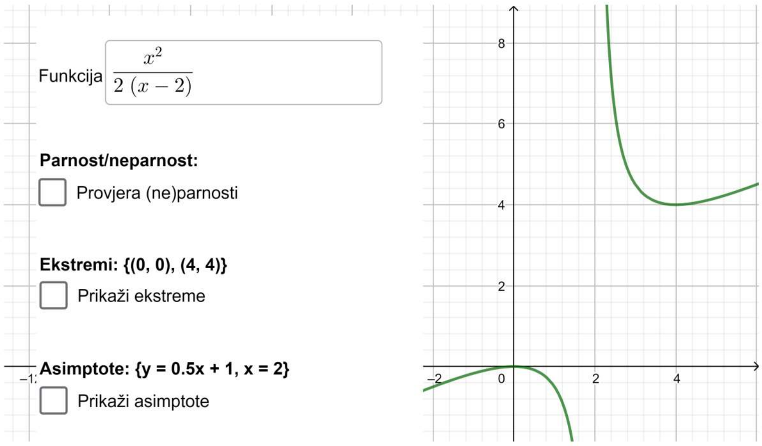
3.6 Istraživanje derivacija u Geogebri

Do sada smo kroz rad upoznali neke osnovne pojmove diferencijalnog računa i vidjeli kako se oni prikazuju u digitalnom alatu GeoGebra. Istaknut ćemo još dva apleta koja nisu spomenuta do sad, a saželi su u sebi neke osnovne pojmove za lakše snalaženje u samom programu za početnike i osnovne pojmove koji su bitni za diferencijalni račun.
Prvi takav aplet sadrži u sebi video koji objašnjava kako nacrtati i postaviti neke osnovne pojmove poput funkcije, klizača, tangente, nagiba i slične. Uz to sadrži i grafički kalkulator uz koji onda za vrijeme gledanja video korisnici apleta mogu isprobati nacrtati i iskoristiti naučeno.



Slika 19: Aplet za istraživanje GeoGebre, pristupiti se može pomoću poveznice: https://www.geogebra.org/m/m7tmk5f4.

Drugi takav aplet nudi da upišemo neku svojevoljnu funkciju čiji graf se prikaže. Kroz aplet možemo na grafu provjeriti parnost, ekstreme, asimptote, prve dvije derivacije i još neke elemente funkcije. Kako su to neki od bitnijih pojmova vezanih uz diferencijalni račun, aplet se čini kao dosta koristan za pogledati i imati spremljen, ako u nekom trenutku zatreba kao pomoć u učenju.



Slika 20: Aplet za učenje pojmova uz GeoGebru, pristupiti se može pomoću poveznice: https://www.geogebra.org/m/cwpf67vd.

4 Zaključak

U ovom radu dali smo pregled osnovnih pojmova o funkcijama, limesima i derivacijama, ključnim aspektima u matematici. Kroz analizu funkcija i njihovu promjenu, analizirali smo kako se limes koristi za analizu ponašanja funkcije u okolini neke točke te kako se derivacija koristi za mjerenje brzine promjene funkcije.

Posebno smo se fokusirali na primjenu GeoGebre, interaktivnog alata koji nam je omogućio da jasno vizualiziramo ove pojmove. GeoGebra se pokazala kao izuzetno koristan alat za geometrijske interpretacije. Kroz dinamičko crtanje grafova funkcija, tangenti i derivacija, mogli smo vizualno pratiti kako se funkcije mijenjaju i kako derivacije predstavljaju nagib tangenti u određenim točkama.

Vidjeli smo kako je lakše učiti i razumjeti matematičke koncepte kada ih možemo vidjeti i neposredno promatrati. Interaktivnost koju GeoGebra pruža omogućuje bolje razumijevanje složenih matematičkih ideja, čime olakšava proces učenja i pomaže u dubljem shvaćanju gradiva. Ovaj pristup ne samo da čini učenje zanimljivijim, već i učinkovitijim, pružajući jasniju sliku o tome kako matematički pojmovi funkcioniraju u praksi.

Literatura

[1] D. Jukić, R. Scitovski, Matematika I, Odjel za matematiku, Osijek, 2017.

[2] https://www.geogebra.org/t/derivative

[3] https://www.geogebra.org/search/derivacije

[4] J. Stewart, Calculus 7th Edition, McMaster University and University of Toronto, Brooks/Cole, Cengage Learning, Belmont, 2008.

[5] S. Kurepa, Matematiča analiza 1, Tehnička knjiga, Zagreb, 1989.

[6] S. Kurepa, Matematiča analiza 2, Tehnička knjiga, Zagreb, 1990.

[7] D. Jukić, R. Scitovski, Matematika I, Elektrotehnički fakultet Osijek, Osijek, 1998.

[8] W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, Mc Graw-Hill, Book Company, 1964.

[9] B. Guljaš, Matematička analiza I i II, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno - matematički fakultet - Matematički odjel, Zagreb, 2012.

[10] K. Burazin, J. Jankov, I. Kuzmanović, I. Soldo, Primjene diferencijalnog i integralnog računa funkcije jedne varijable, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek, 2017.

[11] I. Jelačić, Primjene derivacije funkcije jedne varijable u geometriji (Diplomski rad), Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek, 2021.

Sažetak

Ovaj rad istražuje upotrebu interaktivnih digitalnih alata u učenju i poučavanju diferencijalnog računa. Matematički se definiraju ključni pojmovi poput derivacija i funkcija, a zatim se predlažu interaktivne ilustracije koje mogu pomoći učenicima da bolje razumiju te koncepte. Analiziraju se prednosti i izazovi korištenja alata kao što je GeoGebra.

Ključne riječi

digitalni alati, diferencijalni račun, interaktivna matematika, GeoGebra

Using Interactive Digital Tools in Differential Calculus

Summary

This paper explores the use of interactive digital tools in the learning and teaching of differential calculus. Key mathematical concepts such as derivatives and functions are defined, and then interactive illustrations are proposed to help students better understand these concepts. The advantages and challenges of using tools like GeoGebra are analyzed.

Keywords

digital tools, differential calculus, interactive mathematics, GeoGebra

Životopis

Ja sam Katarina Pažur. Rođena sam 28. rujna 1998. godine u gradu Varaždinu. Osnovnu školu završila sam u Osnovnoj školi Vladimira Nazora u Budinšćini. Srednju školu pohađala sam u Gimnaziji Antuna Gustava Matoša u Zaboku, a završila sam opću gimaziju. Nakon toga upisala sam Sveučilišni prijediplomski studij Matematika na Odjelu za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku, koji je sada postao Fakultet primijenjene matematike i informatike. Uz obrazovanje od svojeg osnovnoškolskog uzrasta aktivan sam član Dobrovoljnog vatrogasnog društva Budinšćina te u sklopu društva često radim s djecom. Time sam potaknuta i na daljni rad s djecom te se nadam upisu na nastavnički studij.