Ravnoteža žice

Balentović, Anja

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike

Studij
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika i računarstvo

Ravnoteža žice

Završni rad

Mentor:

prof. dr. sc. Krešimir Burazin
doc. dr. sc. Jelena Jankov Pavlović

Student:

Anja Balentović

Osijek, 2024.

Sadržaj

1 | Uvod

Ravnoteža žice predstavlja ključno područje istraživanja u mehanici kontinuuma. Problem ravnoteže žice osobito je važan u konstrukcijama koje uključuju napete elemente, poput mostova, kablova, te različitih telekomunikacijskih sustava. Cilj ovog završnog rada je detaljno analizirati ravnotežu žice, te kroz matematičke modele i fizikalne principe prikazati kako se definiraju napetost i progib žice.

U osnovi, ravnoteža žice je opisana jednadžbom ravnoteže koju ćemo izvesti na primjeru napete elastične žice. Jednadžba ravnoteže je linearna diferencijalna jednadžba drugog reda koja će zajedno s rubnim uvjetima činiti rubnu zadaću, čiji pronalazak rješenja nam je od interesa u ovom radu.

Ponašanje žice u krajevima opisat ćemo rubnim uvjetima, te zatim njihovu homogenizaciju koja rubnu zadaću svodi na ekvivalentnu rubnu zadaću, samo s homogenim rubnim uvjetima. Ispitat ćemo jedinstvenost rješenja u dva slučaja, kada je koeficijent elastičnosti jednak nuli i različit nuli. U Poglavlju 6 izvest ćemo jednažbu ravnoteže u slučaju koncentriranog djelovanja sile i uvjete transmisije. Konačno, na samom kraju definirat ćemo Greenovu funkciju, te pokazati kako se koristi za rješavanje rubne zadaće.

Kada bi žica, zbog nekih vanjskih utjecaja, bila pomaknuta iz ravnotežnog položaja, tada bi imali pojavu titranja žice. Više o tome se može pronaći u radu [4], gdje je titranje žice analizirano na primjeru žice gitare i klavira, te je po uzoru na spomenuti rad napravljena stranica [5] za vizualizaciju titranja žice.

2 | Ravnoteža žice

Ravnoteža je stanje u kojem tijelo miruje. Općenito, ravnoteža podrazumijeva balans tijela, odnosno sposobnost tijela da ostane stabilno, bilo u stanju mirovanja ili tijekom kretanja. Kažemo da je objekt u ravnoteži ako se njegov položaj u odnosu na referentni objekt ne mijenja, odnosno ako se ne pomiče u odnosu na taj objekt.
Ravnoteža je prisutna u raznim sustavima, pri čemu razlikujemo različite vrste ravnoteže. Neki od najčešćih tipova ravnoteže uključuju termodinamičku ravnotežu, hidrostatičku ravnotežu, mehaničku ravnotežu i toplinsku ravnotežu.
Materijalna točka je u ravnoteži ako je vektorski zbroj sila koje na nju djeluju jednak nuli. Kruto tijelo je u ravnoteži ako je vektorski zbroj svih sila koje na njega djeluju jednak nuli i ako je algebarski zbroj svih momenata sila, s obzirom na svaku od tri bilo koje međusobno okomite osi, jednak nuli.

Kako bismo omogućili jasno praćenje i razumijevanje rada, uvodimo sljedeće pojmove:

Definicija 1. (*Zakon ravnoteže sila*) *Ako je tijelo u ravnoteži, zbroj svih sila koje djeluju na bilo koji komad* (*dio*) *tijela jednak je nuli.*

Lema 1. (*Osnovna lema*) *Ako je funkcija* $h \in C([0,l])$ *i ako je za svaki* $x_1, x_2 \in [0,l]$

$$\int_{x_1}^{x_2} h(\xi)\, d\xi = 0,$$

onda je i $h(x) = 0$, *za svaki* $x \in [0,l]$.

2.1 Ravnoteža napete žice

Neka interval $[0,l]$ na x-os predstavlja položaj tanke žice, napete čivijom, npr. kao na gitari. *Tanka* znači da joj je masa mala, pa ju zanemarujemo. **Kontaktna sila** je sila koja opisuje djelovanje jednog komada žice na drugi koji mu je susjedan; ovisi samo o položaju njihovog kontakta, a ne o samim komadima. Kontaktnu silu u točki $x \in (0,l)$ označit ćemo s $a(x)$: to je sila kojom dio (x,l) djeluje na dio $(0,x)$. Ona je *uzdužna* ili *longitudinalna* što znači da djeluje u smjeru dužine žice i naziva se *napetost* žice.

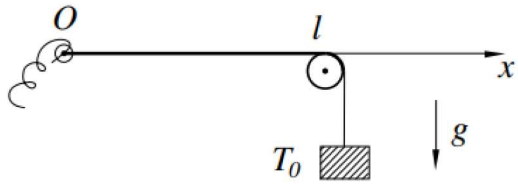
Primjenjujući zakon ravnoteže na proizvoljni komad žice $(x_1, x_2) \subseteq [0,l]$ vrijedi

$$a(x_2) - a(x_1) = 0,$$

tj.

$$a(x) = c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}.$$

Dakle, u promatranom slučaju napetost je konstantna u svakoj točki segmenta $[0, l]$, pa tako i u krajnjoj $a(l)$, gdje se $a(l)$ određuje kao napetost koju nam daje ta čivija. Umjesto čivijom, žicu možemo horizontalno napeti i utegom težine T_0 (Slika 1), pri čemu je napetost $a(l) = T_0$.



Slika 2.1: Žica napeta utegom

Promotrimo sada tešku žicu koja slobodno visi, gdje izraz *teška* znači da na nju djeluje sila teža. Žica je napeta, u ovom slučaju svojom težinom i na nju ne djeluje nijedna druga sila. Označimo s $T(x_1, x_2)$ težinu komada (x_1, x_2). Primijenimo li zakon ravnoteže na taj komad imamo

$$a(x_2) - a(x_1) + T(x_1, x_2) = 0.$$

Posebno, ako stavimo da je $x_1 = x,\ x_2 = l$, dobijemo

$$a(l) - a(x) + T(x, l) = 0.$$

Ako kraj slobodno visi to znači da je $a(l) = 0$, jer na njega odozdo ne djeluje nijedna sila. Onda slijedi

$$a(x) = T(x, l),$$

iz čega je

$$a(x) > 0,\ x \in [0, l).$$

Ako na kraj objesimo uteg težine $T_0 > 0$, onda je $a(l) = T_0$ i napetost je

$$a(x) = T(x, l) + T_0, \tag{2.1}$$

iz čega slijedi

$$a(x) > 0,\ x \in [0, l).$$

Ovisno o tome kakva je žica određujemo silu težu, a u radu ćemo ju računati za homogenu žicu. Žica je *homogena* kad ima jednaku linijsku gustoću mase ρ u svakoj točki (masa jedinice duljine žice). Masa komada žice $[x_1, x_2]$ se onda računa kao pripadni integral

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\, dx = \rho(x_2 - x_1).$$

Tada je $T(x_1, x_2) = \rho g(x_2 - x_1)$, pa uvrštavanjem u (2.1) dobivamo

$$a(x) = \rho g(l - x) + T_0.$$

Općenitije, težina obješene žice predstavlja specijalan slučaj uzdužne linijske sile koja je raspoređena po žici s gustoćom $\phi(x) > 0,\ x \in (0, l)$. Tada je ukupna linijska sila na komad (x_1, x_2) jednaka

$$\int_{x_1}^{x_2} \phi(\xi)\, d\xi.$$

Nadalje, ukupna sila na taj komad je

$$a(x_2) - a(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} \phi(\xi)\, d\xi,$$

pa iz zakona ravnoteže imamo

$$a(x_2) - a(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} \phi(\xi)\, d\xi = 0.$$

Ako stavimo $x_1 = x$ i $x_2 = l$ te ako uz linijske sile djeluje i kontaktna sila $a(l) = T_0 > 0$, imamo

$$a(x) = T_0 + \int_{x}^{l} \phi(\xi)\, d\xi.$$

Pogledajmo uzdužno napetu žicu na koju dodatno djeluje vanjska (*poprečna* ili *transverzalna*) sila u fiksiranoj ravnini, odnosno sila okomita na žicu, tj. x-os. Kako se žica deformira pod utjecajem vanjske sile, da bi se žica *malo* deformirala pretpostavit ćemo da je vanjska sila 'puno manja' od sile napetosti, što znači da se njezin ravnotežni položaj koji leži u ravnini vanjske sile, malo razlikuje od segmenta $[0, l]$.
Deformacijom točka $x \in (0, l)$ prijeđe u položaj $P(x) = (x, u(x)) \in \mathbb{R}^2$ (Slika 2), gdje $u(x)$ označava progib (vertikalni pomak) točke x. Onda je deformirana žica opisana grafom funkcije $y = u(x)$, a u točki x izrazom $u'(x)$ opisana je mjera deformacije. Uvjetom

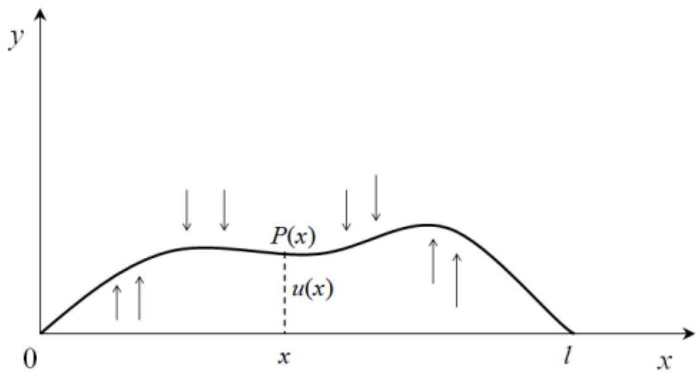
$$|u'(x)| \ll 1, \forall x \in (0, l), \tag{2.2}$$

iskazujemo pretpostavku da je deformacija mala. Sada iz

$$|u(x) - u(0)| = \left| \int_0^x u'(\xi)\, d\xi \right| \leq \int_0^x |u'(\xi)|\, d\xi \ll x < l,$$

tj. iz

$$\frac{|u(x) - u(0)|}{l} \ll 1$$



Slika 2.2: Poprečne sile

zaključujemo da je progib $u(x) - u(0)$ malen u usporedbi s duljinom žice pri maloj deformaciji.
Ako promotrimo još element duljine žice, zbog (2.2) vrijedi

$$ds = \sqrt{1 + u'^2(x)}dx \approx dx,$$

što znači da male deformacije ne uzrokuju istezanje žice.

Kontaktnu silu u točki $P(x)$ i označit ćemo s $\vec{q} = (q_x, q_y)$. Preciznije, to je sila kojom dio $\overline{P(x)P(l)}$ žice djeluje na dio $\overline{P(0)P(x)}$. Onda zakon ravnoteže za proizvoljni komad $\overline{P(x_1)P(x_2)}$ glasi

$$\vec{q}(x_2) - \vec{q}(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} \vec{f}(\xi)\, d\xi = 0,$$

ili u komponentama

$$q_x(x_2) - q_x(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} f_x(\xi)\, d\xi = 0, \tag{2.3}$$

$$q_y(x_2) - q_y(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} f_y(\xi)\, d\xi = 0, \tag{2.4}$$

gdje je $\vec{f} = (f_x, f_y)$ gustoća vanjske sile.

Kao posljedicu malih deformacija imamo *zakon ponašanja* koji nam govori kako se tijelo ponaša, tj. od kakvog materijala je ono načinjeno. Uzet ćemo

$$\vec{q}(x) = a(x)\vec{T}(x),$$

gdje je $\vec{T}(x)$ jedinični tangencijalni vektor na graf funkcije u točki x:

$$\vec{T}(x) = \frac{\vec{i} + u'(x)\vec{j}}{\sqrt{1 + (u'(x))^2}}.$$

Zbog (2.2) vrijedi

$$\vec{T}(x) \approx \vec{i} + u'(x)\vec{j},$$

stoga kad raspišemo kontaktnu silu po komponentama imamo

$$q_x(x) = a(x), \tag{2.5}$$

$$q_y(x) = a(x)u'(x). \tag{2.6}$$

Prema Newton-Leibnizovoj formuli za (2.3) i (2.4) vrijedi

$$\int_{x_1}^{x_2} (q_x'(\xi) + f_x(\xi))\, d\xi = 0,$$

$$\int_{x_1}^{x_2} (q_y'(\xi) + f_y(\xi))\, d\xi = 0.$$

Prema *Osnovnoj lemi* slijedi

$$q_x'(x) + f_x(x) = 0, \tag{2.7}$$

$$q_y'(x) + f_y(x) = 0, \tag{2.8}$$

što se naziva *zakon ravnoteže u diferencijalnom obliku*.
Uvrštavanjem (2.5) u (2.7), te (2.6) u (2.8), dobijemo

$$a'(x) + f_x(x) = 0, \tag{2.9}$$

$$(a(x)u'(x))' + f_y(x) = 0. \tag{2.10}$$

Iz jednadžbe (2.9) određujemo napetost, a jednadžba (2.10) se naziva *jedadžba ravnoteže*.

Ako se žica dodatno nalazi u elastičnom sredstvu, onda uz navedene linijske sile djeluje i linijska sila s gustoćom koja je suprotna progibu, tj. oblika

$$-b(x)u(x),$$

gdje je $b(x) \geq 0$ zadani koeficijent elastičnosti sredstva, u tom slučaju umjesto (2.4) imamo

$$q(x_2) - q(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} (f(\xi) - b(\xi)u(\xi))\, d\xi = 0. \tag{2.11}$$

Uvrštavanjem (2.6) u (2.11) dobivamo

$$a(x_2)u'(x_2) - a(x_1)u'(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} (f(\xi) - b(\xi)u(\xi))\, d\xi = 0, \tag{2.12}$$

što je **integralni oblik zakona ravnoteže (integralna jednadžba ravnoteže)**. Korištenjem Newton-Lebnizove formule i *0snovne leme* na (2.12) dobivamo jednadžbu

$$(a(x)u'(x))' + f(x) - b(x)u(x) = 0 \tag{2.13}$$

koju zovemo **diferencijalnom jednadžbom ravnoteže**.

To je obična diferencijalna jednadžba 2. reda, funkcije a i b su njeni koeficijenti, a f je slobodni član. Za $f = 0$ jednadžba je *homogena*, inače je *nehomogena*. Funkcija u koja zadovoljava jednadžbu ravnoteže zove se **ravnotežno stanje** ili **ravnotežni položaj (progib)**.

3 | Rubni uvjeti

U daljnjem pretpostavljamo da je

$$a \in C^1([0,l]), \;\; b \in C([0,l])$$

i vrijedi

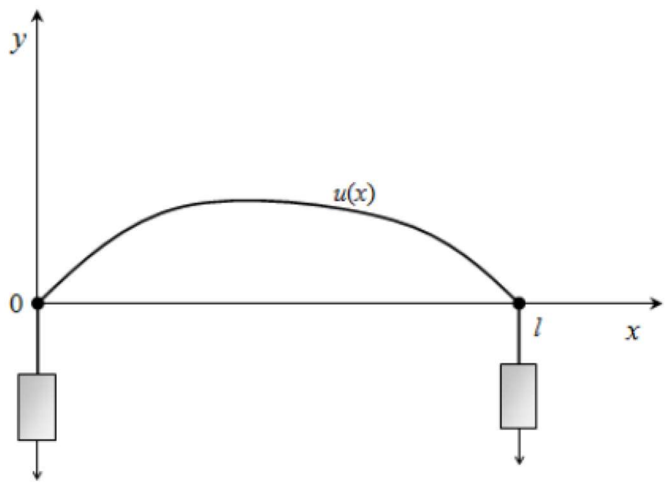
$$\begin{aligned} a(x) &> 0, \; x \in [0,l], \\ b(x) &\geq 0, \; x \in [0,l]. \end{aligned}$$

Uz zadane funkcije a, b i f jednadžba ravnoteže (2.13) ima beskonačno mnogo rješenja. Kako bi izdvojili jedno rješenje moramo uzeti u obzir i ponašanje žice na krajevima $x = 0$ i $x = l$. Ono je opisano *rubnim uvjetima*, a određivanje ravnotežnog položaja koje zadovoljava rubne uvjete naziva se *rubna zadaća*.
Opisat ćemo nekoliko osnovnih rubnih uvjeta, a to su *Dirichletov, Neumannov* i *Robinov*.

Ako nam je lijevi ili desni kraj učvršćen s utegom ili čivijom to znači da imamo zadanu vrijednost progiba u tom kraju i rubni uvjet glasi

$$u(0) = 0 \quad ili \quad u(l) = 0,$$

gdje ako je točka $x = 0$ govorimo o lijevom kraju, a ako je u pitanju točka $x = l$ govorimo o desnom kraju.



Slika 3.1: Dirichletov rubni uvjet

Dodatno možemo fiksirati progib u bilo koju vrijednost c pa onda imamo rubni uvjet

$$u(l) = c,$$

koji nazivamo *Dirichletovim* rubnim uvjetom.

Ako je umjesto progiba zadana kontaktna sila, tada se radi o *Neumanovom* rubnom uvjetu, npr. situacija kao što je dana na Slici 3.2. Duž y-osi imamo žlijeb po kojem se kotač može gibati slobodno gore i dolje, a na njega je pričvršćen lijevi kraj žice. Na kotač još objesimo uteg težine c, pa je vertikalna komponenta kontaktne sile jednaka

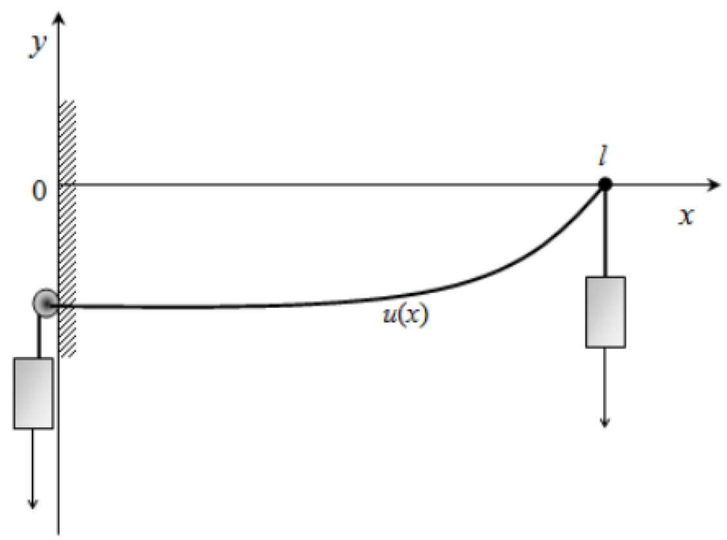
$$q_y(0) = c.$$

Primjenimo zakon ponašanja (2.6):

$$a(0)u'(0) = c,$$

iz čega slijedi

$$u'(0) = \frac{c}{a(0)}.$$



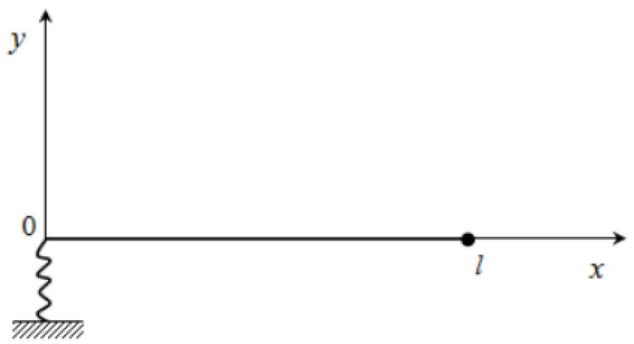
Slika 3.2: Neumannov rubni uvjet

Slučaj kada imamo samo kotač bez utega znači da je $c = 0$, tj. kažemo da je lijevi kraj slobodan i rubni uvjet onda glasi

$$u'(0) = 0.$$

Ako je npr. kraj $x = 0$ s fiksnom podlogom povezan elastičnom oprugom koja ima koeficijent elastičnosti κ, onda je kontaktna sila jednaka

$$q_y(0) = \kappa u(0).$$



Slika 3.3: Robinov rubni uvjet

Iskoristimo zakon ponašanja (2.6):

$$a(0)u'(0) = \kappa u(0),$$

tj. podijelimo s $a(0)$

$$u'(0) - \frac{\kappa}{a(0)} u(0) = 0.$$

Označimo sa $\beta = \frac{\kappa}{a(0)}$ i dobivamo *Robinov* rubni uvjet

$$u'(0) - \beta u(0) = 0.$$

Za kraj $x = l$ imamo kontaktnu silu

$$q_y(l) = -\kappa u(l)$$

i analognim postupkom Robinov rubni uvjet glasi

$$u'(l) + \beta u(l) = 0.$$

Poopćenje gore navedenih uvjeta su rubni uvjeti:

$$\alpha u'(0) - \beta u(0) = c, \tag{3.1}$$

$$\gamma u'(l) + \delta u(l) = d, \tag{3.2}$$

gdje su $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$ i vrijedi

$$\begin{aligned} \alpha + \beta > 0, \\ \gamma + \delta > 0. \end{aligned}$$

Ako je $\alpha = 0$, rubni uvjet (3.1) je Dirichletov, a ako je $\beta = 0$ onda je Neumannov. Za $c, d = 0$ kažemo da su rubni uvjeti *homogeni*, a u suprotnom su *nehomogeni*. Jednadžba ravnoteže (2.13) zajedno sa uvjetima (3.1) i (3.2) čini **rubni problem** ili **rubnu zadaću**.

Primjer 1. *Teška homogena žica duljine l, linijske gustoće ρ, napeta je i učvršćena na lijevom kraju utegom mase m, dok joj je desni kraj učvršćen za kotač koji se može slobodno kotrljati po poprečnom žlijebu. Za kotač je vezan uteg težine c. Naći ravnotežni progib ako se žica nalazi u polju sile teže koja djeluje poprečno na nju.*

Rješenje. Žica je učvršćena na lijevom kraju, što nam daje *Dirichletov* rubni uvjet

$$u(0) = 0, \tag{3.3}$$

a u desnom kraju imamo *Neumannov* rubni uvjet koji zadaje kontaktnu silu na rubu koja je jednaka baš težini c utega koji je vezan za kotač. Ovdje je bitno dobro odrediti predznak te kontaktne sile u smjeru y-osi. Uteg vuče žicu prema dolje u smjeru sile teže, što je suprotan smjer od y-osi, pa je kontaktna sila u smjeru y-osi dana s $q_y(l) = -c$. *Neumannov* rubni uvjet onda glasi

$$u'(l) = \frac{-c}{a(l)}. \tag{3.4}$$

Nadalje, horizontalnih vanjskih sila nemamo, pa je $f_x = 0$. Ako nemamo uzdužne sile, napetost je konstantna i iznosi $a(x) = mg$ pa je (3.4) jednako

$$u'(l) = \frac{-c}{mg}. \tag{3.5}$$

Žica se ne nalazi u elastičnom sredstvu pa imamo jednadžbu ravnoteže (1.32), gdje je f_y gustoća sile teže u smjeru y-osi koju moramo izračunati. Sila teža djeluje suprotno od smjera y-osi, te imamo zadanu linijsku gustoću (to je masa jedinice duljine) pa je sila teža dana s

$$F = -\left(\int_a^b \rho(x)\,dx\right) g = \int_a^b (-\rho(x)g)\,dx.$$

Da bismo dobili silu težu, moramo integrirati gustoću sile, pa je gustoća sile teže u ovom slučaju $-\rho g$. Jednadžba ravnoteže (1.32) onda glasi

$$(mg\,u'(x))' - \rho g = 0,$$

tj.

$$u''(x) = \frac{\rho}{m}.$$

Integriramo po x

$$u'(x) = \frac{\rho}{m}x + c_1, \tag{3.6}$$

gdje je c_1 proizvoljna konstanta. Uvrstimo $x = l$ i iskoristimo (3.5), nalazimo konstantu

$$c_1 = \frac{-c - \rho l g}{mg}.$$

Nju uvrstimo u (3.6) i opet integriramo po x, dobivamo

$$u(x) = \frac{\rho}{m}\frac{x^2}{2} - \frac{c+\rho l g}{mg}x + c_2,$$

gdje je c_2 proizvoljna konstanta koju dobijemo kada iskoristimo rubni uvjet (3.3), tj. $c_2 = 0$ i progib onda glasi

$$u(x) = \frac{\rho}{m}\frac{x^2}{2} - \frac{c+\rho l g}{mg}x.$$

Primjer 2. *Teška homogena žica duljine l, linijske gustoće ρ, napeta je i učvršćena na lijevom kraju utegom mase m, dok joj je desni kraj slobodan. Naći ravnotežni progib ako se žica nalazi u polju sile teže koja djeluje poprečno na nju. Dodatno se žica nalazi u elastičnom sredstvu koje se linearno elastično opire progibu žice s konstantnim koeficijentom elastičnosti b.*

Rješenje. Lijevi kraj je učvršćen, a desni slobodan, pa redom imamo uvjete

$$u(0) = 0, \quad u'(l) = 0. \tag{3.7}$$

Kao i u prethodnom zadatku, gustoća sile teže jednaka je $-\rho g$. Također, uzdužnih sila nemamo, pa je napetost konstantna i jednaka $a(x) = mg$. Žica se nalazi u elastičnom sredstvu, te jednadžba ravnoteže (2.13) u ovom slučaju izgleda

$$(mg\, u'(x))' - \rho g - bu(x) = 0,$$

tj.

$$u''(x) - \frac{b}{mg}u(x) = \frac{\rho}{m}. \tag{3.8}$$

Zbog jednostavnosti označit ćemo s $k = \sqrt{\frac{b}{mg}}$, pa (3.8) izgleda

$$u''(x) - k^2 u(x) = \frac{\rho}{m}. \tag{3.9}$$

To je obična diferencijalna jednadžba 2. reda s konstantnim koeficijentima, pa prvo tražimo opće rješenje pripadne homogene jednadžbe:

$$\lambda^2 - k^2 = 0 \;=>\; \lambda = \pm k,$$

te pripadno rješenje onda glasi

$$u_h = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Partikularno rješenje nehomogene jednadžbe računamo na sljedeći način:

$$\begin{aligned} u_p(x) &= C, \\ u_p'(x) &= 0, \\ u_p''(x) &= 0, \end{aligned}$$

pa to uvrstimo u (3.9)

$$-k^2C = \frac{\rho}{m}.$$

Izjednačimo koeficijente uz odgovarajuće potencije i dobivamo

$$C = -\frac{\rho g}{b},$$

te je opće rješenje nehomogene jednadžbe onda jednako

$$u(x) = u_h(x) + u_p(x) = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx} - \frac{\rho g}{b}. \tag{3.10}$$

Da bi dobili jedinstveno rješenje za progib iskoristimo još rubne uvjete (3.7) i dobivamo konstante

$$c_1 = \frac{\rho g}{b(1+e^{2kl})}, \quad c_2 = \frac{\rho g}{b} \frac{e^{2kl}}{1+e^{2kl}},$$

koje uvrstimo u (3.10).

4 | Homogenizacija rubnih uvjeta

Lema 2 (vidjeti [1, Lema 4.3]). *Ako je funkcija* $u_i \in C^2([0,l])$, $i = 1, 2, \dots n$, *rješenje rubne zadaće*

$$(au_i')' - bu_i + f_i = 0,$$

$$\alpha u_i'(0) - \beta u_i(0) = c_i,$$

$$\gamma u_i'(l) + \delta u_i(l) = d_i,$$

onda je superpozicija $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i, \ \lambda_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, 2, \dots n$, *rješenje rubne zadaće*

$$(au')' - bu + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0,$$

$$\alpha u'(0) - \beta u(0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i,$$

$$\gamma u'(l) + \delta u(l) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i.$$

Princip superpozicije koji je dan u Lemi 2 omogućuje jednostavan postupak homogenizacije rubnih uvjeta, koji se sastoji u sljedećem. Neka je u rješenje rubne zadaće

$$(au')' - bu + f = 0, \tag{4.1}$$

$$\alpha u'(0) - \beta u(0) = c, \tag{4.2}$$

$$\gamma u'(l) + \delta u(l) = d, \tag{4.3}$$

i $z \in C^2([0,l])$ proizvoljna funkcija koja zadovoljava rubne uvjete (4.2) i (4.3). Onda $v = u - z$ zadovoljava homogene rubne uvjete te uvrštavanjem $u = v + z$ u (4.1) dobijemo

$$(av')' - bv + g = 0, \tag{4.4}$$

gdje je

$$g = f + (az')' - bz,$$

te zajedno s homogenim rubnim uvjetima

$$\alpha v'(0) - \beta v(0) = 0, \tag{4.5}$$

$$\gamma v'(l) + \delta v(l) = 0, \tag{4.6}$$

dobivamo rubnu zadaću (4.4)-(4.6) koja je *ekvivalentna* rubnoj zadaći (4.1)-(4.3) u sljedećem smislu: *funkcija u je rješenje zadaće* (4.1)-(4.3) *onda i samo onda ako je funkcija v rješenje zadaće* (4.4)-(4.6).

Ukratko, postupak homogenizacije bi značilo da rubnu zadaću (4.1)-(4.3) uvijek možemo svesti na rubnu zadaću (4.4)-(4.6), s homogenim rubnim uvjetima.

5 | Jedinstvenost rješenja

Promotrit ćemo dva slučaja, kada je koeficijent elastičnosti jednak 0 ($b = 0$), te kada je različit od 0 ($b \neq 0$). Pokazali smo da nehomogne uvjete lako možemo reducirati na homogene, tako da ćemo u daljnjem pretpostaviti da su rubni uvjeti homogeni.

5.1 Slučaj $b = 0$

Ako je $b = 0$, onda je rubna zadaća oblika

$$(a(x)u'(x))' + f(x) = 0, \tag{5.1}$$

$$\alpha u'(0) - \beta u(0) = 0, \tag{5.2}$$

$$\gamma u'(l) + \delta u(l) = 0, \tag{5.3}$$

te neka je u rješenje te zadaće. Iz (5.1) slijedi:

$$u'(x) = -\frac{1}{a(x)} \int_0^x f(y)\, dy + \frac{c_1}{a(x)}, \tag{5.4}$$

odnosno funkcija

$$u(x) = -\int_0^x \frac{d\xi}{a(\xi)} \int_0^\xi f(y)\, dy + c_1 \int_0^x \frac{d\xi}{a(\xi)} + c_2, \tag{5.5}$$

je opće rješenje jednadžbe (5.1), gdje su c_1 i c_2 proizvoljne realne konstante. Uvrštavanjem $x = 0$ u (5.4) i (5.5) slijedi

$$\begin{aligned} c_1 &= a(0)u'(0), \\ c_2 &= u(0), \end{aligned}$$

te iz prvog rubnog uvjeta (5.2) pomoću tih jednakosti imamo da je

$$\alpha \frac{c_1}{a(x)} - \beta c_2 = 0. \tag{5.6}$$

Uvrstimo li $x = l$ u (5.4) i (5.5) i te izraze uvrstimo u rubni uvjet (5.3) slijedi jednakost

$$\begin{aligned}&\gamma\left(-\frac{1}{a(l)}\int_0^l f(y)\,dy+\frac{c_1}{a(l)}\right)\\&+\delta\left(-\int_0^l\frac{d\xi}{a(\xi)}\int_0^\xi f(y)\,dy+c_1\int_0^l\frac{d\xi}{a(\xi)}+c_2\right)\\&=0,\end{aligned}$$

tj.

$$\left(\frac{\gamma}{a(l)}+\delta\int_0^l\frac{d\xi}{a(\xi)}\right)c_1+\delta c_2=\frac{\gamma}{a(l)}\int_0^l f(y)\,dy+\delta\int_0^l\frac{d\xi}{a(\xi)}\int_0^\xi f(y)\,dy. \quad (5.7)$$

Dakle, jednakosti (5.6) i (5.7) čine linearni sustav za nepoznanice c_1 i c_2. Determinanta sustava je

$$\Delta=\frac{1}{a(0)}\alpha\delta+\frac{1}{a(l)}\beta\gamma+\beta\delta\int_0^l\frac{d\xi}{a(\xi)}.$$

Razlikujemo dva slučaja:

(i) $\beta+\delta>0$

Tada je $\Delta>0$, pa sustav ima jedinstveno rješenje, a rubna zadaća ima jedinstveno rješenje dano formulom (5.5). U tom slučaju imamo eksplicitnu formulu za rješenje.

(ii) $\beta=\delta=0$

Tada je $\Delta=0$, pa sustav ili nema rješenje ili rješenje nije jedinstveno. Rubni uvjeti su $u'(0)=u'(l)=0$, tj. oba kraja su slobodna. Zbog α, $\gamma>0$ iz (5.6) i (5.7) slijedi

$$c_1=0,$$

$$\int_0^l f(y)\,dy=0, \quad (5.8)$$

te je uvjet (5.8) nužan i dovoljan uvjet da bi sustav dan jednakostima (5.6) i (5.7) imao rješenje. To rješenje je $(0,c_2)$ za proizvoljni $c_2\in\mathbb{R}$ i rješenje rubne zadaće dano je s

$$u(x)=-\int_0^x\frac{d\xi}{a(\xi)}\int_0^\xi f(y)\,dy+c_2. \quad (5.9)$$

Dakle, zaključujemo da u slučaju (i) rubna zadaća (5.1)-(5.3) ima jedinstveno rješenje dano s (5.5), gdje su c_1 i c_2 jedinstvena rješenja sustava (5.6)-(5.7). U slučaju (ii) rubna zadaća ima rješenje ako i samo ako je zadovoljen uvjet (5.8); u tom slučaju rješenja rubne zadaće ima beskonačno mnogo i dana su s (5.9), odnosno rješenje je određeno do na kruti pomak.

5.2 Slučaj $b \neq 0$

Ako je $b \neq 0$, onda se rješenje rubne zadaće

$$-(a(x)u'(x))' + b(x)u(x) = f(x), \tag{5.10}$$

$$\alpha u'(0) - \beta u(0) = 0, \tag{5.11}$$

$$\gamma u'(l) + \delta u(l) = 0, \tag{5.12}$$

ne može eksplicitno izraziti formulom (kao kod slučaja $b = 0$), ali u nastavku ćemo dokazati jedinstvenost tog rješenja, ukoliko postoji.

Teorem 1. *Ako je $c = d = 0$, te $b \neq 0$, onda rubna zadaća (5.10)-(5.12) može imati najviše jedno rješenje.*

Dokaz. Neka su u_1, u_2 rješenja rubne zadaće i $u(x) = u_1(x) - u_2(x),\ x \in [0, l]$. Zbog *principa superpozicije* u zadovoljava:

$$(a(x)u'(x))' - b(x)u(x) = 0, \tag{5.13}$$

$$\alpha u'(0) - \beta u(0) = 0, \tag{5.14}$$

$$\gamma u'(l) + \delta u(l) = 0. \tag{5.15}$$

Pomnožimo li (5.13) s $u(x)$ i integriramo od 0 do l, dobivamo

$$\int_0^l (a(x)u'(x))'u(x)\,dx - \int_0^l b(x)u^2(x)\,dx = 0,$$

tj. nakon parcijalne integracije u prvom članu s lijeve strane slijedi

$$\int_0^l (a(x)(u'(x))^2 + b(x)u^2(x))\,dx + a(0)u'(0)u(0) - a(l)u'(l)u(l) = 0. \tag{5.16}$$

Tada razlikujemo četiri slučaja:

(i) $\beta, \gamma > 0$

Iskoristimo rubne uvjete (5.14) i (5.15) na način da ih redom podijelimo s β i γ:

$$u(0) = \frac{\alpha}{\beta}u'(0),\ u'(l) = -\frac{\delta}{\gamma}u(l),$$

te uvrstimo u (5.16)

$$\begin{aligned} &\int_0^l (a(x)(u'(x))^2 + b(x)u^2(x))\,dx \\ &+ \frac{\alpha}{\beta}a(0)(u'(0))^2 + \frac{\delta}{\gamma}a(l)(u(l))^2 = 0. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Svaki član u (5.17) je nenegativan, pa kako imamo sumu nenegativnih sumanda onda je svaki sumand jednak nuli. Od interesa su nam:

$$\int_0^l a(x)(u'(x))^2\,dx = 0, \tag{5.18}$$

$$\int_0^l b(x)u^2(x)\,dx = 0. \tag{5.19}$$

Kako je $\alpha > 0$, iz (5.18) slijedi $u'(x) = 0$, tj. u je konstantan. Opet iskoristimo rubni uvjet (5.14) iz kojeg slijedi da je $u(0) = 0$, pa iz $u(x) = const.$ imamo $u(x) = 0$, tj. $u_1(x) = u_2(x)$.

Slučajevi (ii) i (iii) se analiziraju analogno.

(ii) $\beta, \delta > 0$

(iii) $\alpha, \delta > 0$

(iv) $\alpha, \gamma > 0$

Unutar ovog slučaja promatramo podslučaj $\beta = \delta = 0$, tj. kada su oba kraja slobodna i rubni uvjeti su jednaki

$$u'(0) = u'(l) = 0.$$

Tada je (5.16) jednako

$$\int_0^l a(x)(u'(x))^2\,dx + \int_0^l b(x)u^2(x)\,dx = 0.$$

Opet imamo da je suma nenegativnih brojeva jednaka nuli, pa analogno kao u slučaju (i) vrijedi (5.18) i (5.19). Iz (5.18) analogno slijedi da je $u(x) = const.$ Kako je $b(x) \geq 0$ i $b(x) \neq 0$, $b(x)$ je onda pozitivno na nekom intervalu, pa iz (5.19) slijedi da je $u(x) = 0$, tj. $u_1(x) = u_2(x)$.

□

6 | Koncentrirano djelovanje

Ako gustoću vanjske sile koja djeluje na žicu označimo s f, onda je ukupna vanjska sila na komad $\overline{P(x_1)P(x_2)}$ jednaka

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx.$$

Nadalje, označimo

$$F(x) = \int_0^x f(\xi)\,d\xi,$$

tj.

$$F'(x) = f(x),$$

te po Newton-Leibnizovoj formuli vanjsku silu na spomenuti komad možemo izraziti kao

$$F(x_2) - F(x_1), \tag{6.1}$$

što je općentije zadavanje sile.

Definicija 1. *Kažemo da funkcija F opisuje silu intenziteta $F_0 \neq 0$ koncentriranu u točki $x_0 \in (0, l)$, ako je*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < x_0 \\ F_0, & x \geq x_0. \end{cases}$$

Ukupna sila na žicu, prema (6.1) je

$$F(l) - F(0) = F_0.$$

Za potpunije razumijevanje, pogledat ćemo dvije situacije koje su ključne u ovom kontekstu:

(i) $x_0 \notin [x_1, x_2]$
Ovo povlači da smo strogo lijevo ili strogo desno od x_0, zbog čega je F i u točki x_1 i u točki x_2 jednak 0 ili F_0. Onda je ukupna sila na komad $\overline{P(x_1)P(x_2)}$: $F(x_2) - F(x_1) = 0$.

(ii) $x_0 \in (x_1, x_2)$
U točki x_2 vrijednost je F_0, a u točki x_1 je 0. Onda je ukupna sila na komad $\overline{P(x_1)P(x_2)}$: $F(x_2) - F(x_1) = F_0$.

Time se opravdava da je sila *koncentrirana* u x_0. Pokazat ćemo da *koncentrirana sila* nema gustoću, tj. da ne postoji integrabilna funkcija f takva da je

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = F(x_2) - F(x_1), \quad \forall x_1,\, x_2 \in [0,l]. \tag{6.2}$$

Na $(0, x_1)$ i (x_1, l) F je konstantna, pa je integral (6.2) jednak nuli. Onda je prema *Osnovnoj lemi* $f(x) = 0$, za $x \neq x_0$. Međutim,

$$\int_0^l f(x)\,dx = F(l) - F(0) = F_0,$$

odnosno imamo funkciju $f(x) = 0$, a integral te funkcije različit je od nule. Slijedi da je f zapravo Diracova masa u točki x_0 i ovim smo pokazali da *koncentrirana sila* nema gustoću koja je integrabilna funkcija.

Promotrimo situaciju kada na žicu djeluje koncentrirana sila. Pretpostavimo da je žica u elastičnom sredstvu te su b i u neprekidne funkcije. Primijenimo zakon ravnoteže sila na komad $\overline{P(x_1)P(x_2)}$:

$$q(x_2) - q(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} b(x)u(x)\,dx + F(x_2) - F(x_1) = 0. \tag{6.3}$$

Također, bitno je napomenuti da možemo uz koncentriranu silu imati još dodatnu silu koja ima neku gustoću. Tipična situacija bila bi da imamo tešku žicu koja se nalazi u polju gravitacijske sile, za koju znamo da ima gustoću. Izvod u nastavku odgovara i toj situaciji, samo se još dodatno pojavi komponenta od te gravitacijske sile.

Analogno kao ranije razlikovat ćemo dvije situacije. Ako $x_0 \notin (x_1, x_2)$, tj. ili smo lijevo ili desno od x_0, onda je koncentrirana sila jednaka nuli i (6.3) je jednak

$$q(x_2) - q(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} b(x)u(x)\,dx = 0. \tag{6.4}$$

Zbog Newton-Lebnizove formule (6.4) možemo zapisati kao

$$\int_{x_1}^{x_2} (q'(x) - b(x)u(x))\,dx = 0,$$

pa prema *Osnovnoj lemi* slijedi

$$q'(x) - b(x)u(x) = 0, \text{ za } x < x_0 \text{ } i \text{ } x > x_0.$$

Primijenimo li zakon ponašanja (1.26) dobivamo jednadžbu ravnoteže:

$$(a(x)u'(x))' - b(x)u(x) = 0, \text{ za } x < x_0 \text{ } i \text{ } x > x_0. \tag{6.5}$$

Dakle, jednadžba vrijedi za $x \neq x_0$.

S druge strane, ako je $x_0 \in (x_1, x_2)$ onda je koncentrirana sila jednaka F_0 i imamo

$$q(x_2) - q(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} b(x)u(x)\,dx + F_0 = 0. \tag{6.6}$$

Na (6.6) djelujemo limesima kad $x_1 \to x_0^-$ i $x_2 \to x_0^+$ i dobivamo

$$q(x_0^+) - q(x_0^-) + F_0 = 0.$$

Primijenimo li zakon ponašanja (1.26) i podijelimo s $a(x_0)$, možemo zaključiti da je

$$u'(x_0^+) - u'(x_0^-) = -\frac{F_0}{a(x_0)}. \tag{6.7}$$

Tome pridodamo još uvjet neprekidnosti progiba (žica nije pukla) koji zapisujemo kao

$$u(x_0^+) = u(x_0^-),$$

pa zajedno s (6.7) te uvjete nazivamo *uvjete transmisije*. Zaključujemo da nam u slučaju *koncentriranog* djelovanja sile, lijevo i desno od točke x_0 vrijedi (6.5), a u samoj toj točki dodatno još vrijede *uvjeti transmisije*.

7 | Greenova funkcija

Uz standardne pretpostavke dodatno pretpostavljamo da je $b \neq 0$ ili $\beta + \delta > 0$, što osigurava jedinstvenost rješenja rubne zadaće

$$(a(x)u'(x))' - b(x)u(x) = 0, \tag{7.1}$$

$$\alpha u'(0) - \beta u(0) = 0, \tag{7.2}$$

$$\gamma u'(l) + \delta u(l) = 0. \tag{7.3}$$

Dodatno, uz navedene rubne uvjete neka na žicu u točki $\xi \in (0, l)$ djeluje koncentrirana sila $F_0 = 1$. To znači da ravnotežni progib, kojeg ćemo označiti s u_ξ, zadovoljava jednadžbu ravnoteže lijevo i desno od točke ξ, rubne uvjete, te uvjete transmisije:

$$\begin{gathered} (a(x)u_\xi'(x))' - b(x)u_\xi(x) = 0, \text{ na } (0, \xi) \\ \alpha u_\xi'(0) - \beta u_\xi(0) = 0. \end{gathered} \tag{7.4}$$

$$\begin{gathered} (a(x)u_\xi'(x))' - b(x)u_\xi(x) = 0, \text{ na } (\xi, l) \\ \gamma u_\xi'(l) + \delta u_\xi(l) = 0. \end{gathered} \tag{7.5}$$

$$\begin{aligned} & u_\xi(\xi^+) - u_\xi(\xi^-) = 0, \\ & u_\xi'(\xi^+) - u_\xi'(\xi^-) = -\frac{1}{a(\xi)}. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Izraze (7.4) i (7.5) nazivat ćemo redom *lijeva* rubna zadaća, odnosno *desna* rubna zadaća.

Definicija 2. *Funkciju* $G : (0, l) \times (0, l) \to \mathbb{R}$ *definiranu izrazom* $G(x, \xi) := u_\xi(x)$ *nazivamo Greenova funkcija rubne zadaće.*

U nastavku ćemo se baviti egzistencijom Greenove funkcije gdje će nam koristiti sljedeći rezultat koji govori o rješenjima (7.4), odnosno (7.5).

Lema 3. *Svako rješenje rubne zadaće* (7.4), *odnosno* (7.5), *ima oblik* $u(x) = Cv(x)$, *gdje je C konstanta, a v jedno fiksno rješenje rubne zadaće* (7.4), *odnosno* (7.5).

Dokaz. Svako rješenje jednadžbe (7.1) na $(0, l)$ je oblika

$$u = A_1 u_1 + A_2 u_2, \tag{7.7}$$

gdje su u_1 i u_2 dva linearno nezavisna rješenja te jednadžbe i A_1, A_2 konstante. Ako npr. promatramo *lijevu* rubnu zadaću, onda ćemo u rubni uvjet u lijevom kraju $(7.4)_2$ uvrstiti rješenje (7.7)

$$\alpha u'(0) - \beta u(0) = \alpha(A_1 u_1'(0) + A_2 u_2'(0)) - \beta(A_1 u_1(0) + A_2 u_2(0)) = 0. \tag{7.8}$$

Označit ćemo s $a_1 = \alpha u_1'(0) - \beta u_1(0)$ i $a_2 = \alpha u_2'(0) - \beta u_2(0)$, te onda izraz (7.8) možemo zapisati kao

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 = 0. \tag{7.9}$$

Izračunamo li Wronskijan od u_1, u_2 u točki nula, tj. determinantu Wronskog, imamo da je

$$W(u_1, u_2; 0) = \begin{vmatrix} u_1(0) & u_2(0) \\ u_1'(0) & u_2'(0) \end{vmatrix} = u_1(0)u_2'(0) - u_2(0)u_1'(0). \tag{7.10}$$

Barem jedan od brojeva a_1, a_2 različit je od nule, jer bi inače iz uvjeta $a_1 = a_2 = 0$ i $\alpha + \beta > 0$ slijedilo da je (7.10) jednako nula, a to zbog linearne nezavisnosti funkcija u_1 i u_2 nije moguće. Zato imamo dva slučaja:

(i) $a_1 \neq 0$

Izraz (7.9) možemo podijeliti s a_1 pa imamo

$$A_1 = -\frac{a_2}{a_1} A_2,$$

te kad uvrstimo ovo u (7.7) i izlučimo A_2 dobijemo

$$u = A_2 \left(-\frac{a_2}{a_1} u_1 + u_2 \right). \tag{7.11}$$

Primijetimo da u zagradi imamo linearnu kombinaciju rješenja u_1 i u_2, što je također rješenje rubne zadaće koje ćemo označit s v pa je (7.11) jednako $A_2 v$, tj. Av.

(ii) $a_2 \neq 0$

U ovom slučaju, postupamo jednako samo što djelimo s a_2 i imamo

$$A_2 = -\frac{a_1}{a_2} A_1,$$

te kad uvrstimo ovo u (7.7) i izlučimo A_1 dobijemo

$$u = A_1 \left(u_1 - \frac{a_1}{a_2} u_2 \right) = Av.$$

Tako smo pokazali da se svako rješenje rubne zadaće može zapisati kao umnožak konstante A i jednog fiksnog rješenja rubne zadaće v.

Analogno dokazujemo i za *desnu* rubnu zadaću (7.5), samo promatramo sve u točki l. □

Uvodimo još jednu pomoćnu lemu.

Lema 4. *Označimo li s* $W(x) := W(x;\ u_1, u_2)$ *Wronskijan rješenja* u_1 *i* u_2 *jednadžbe* (7.1) (*uz standardne pretpostavke*), *onda je* $a(x)W(x)$ *konstanta na* $[0, l]$.

Dokaz. Pretpostavljamo da je $a \in C^1$, $W \in C^1$ i znamo da je $W = u_1 u_2' - u_2 u_1'$. Cilj je pokazati da je $(aW)' = 0$, time ćemo pokazati da je $a(x)W(x)$ konstanta na $[0, l]$. Dakle, uvrstimo i deriviramo:

$$(aW)' \;=\; u_1' a u_2' + u_1(a u_2')' - u_2' a u_1' - u_2(a u_1')',$$

gdje možemo uočiti da je $(a u_2')' = b u_2$ i $(a u_1')' = b u_1$:

$$(aW)' \;=\; u_1' a u_2' + u_1 b u_2 - u_2' a u_1' - u_2 b u_1,$$

pa možemo pokratiti prvi član s trećim, a drugi sa zadnjim te dobivamo da je $(aW)' = 0$, tj. aW je konstanta na $[0, l]$. □

Kad iskoristimo Lemu 3 slijedi

$$u_\xi(x) = \begin{cases} C u_1(x), & x \leq \xi \\ D u_2(x), & x \geq \xi, \end{cases} \tag{7.12}$$

gdje su u_1 i u_2 fiksna rješenja *lijeve* rubne zadaće, odnosno *desne* rubne zadaće, a C i D konstante (koje ovise o ξ). Sada iskoristimo uvjete transmisije (7.6):

$$\begin{aligned} C u_1(\xi) - D u_2(\xi) &= 0, \\ C u_1'(\xi) - D u_2'(\xi) &= \frac{1}{a(\xi)}, \end{aligned} \tag{7.13}$$

što ćemo promatrati kao linearni sustav za C i D. Primijetimo da je determinanta tog sustava $W(\xi; u_1, u_2)$, te kad bi ona bila nula onda bi u_1 i u_2 bile linearno zavisne, pa bi obje bile rješenje lijeve i desne rubne zadaće, iz čega imamo da je $u_1 = u_2 = 0$. Drugim riječima, kako bi osigurali jedinstveno rješenje spomenute rubne zadaće determinanta tog sustava mora biti različita od nule i rješenje sustava (7.13) je

$$\begin{aligned} C &= -\frac{u_2(\xi)}{a(\xi)W(\xi)}, \\ D &= -\frac{u_1(\xi)}{a(\xi)W(\xi)}. \end{aligned}$$

Ako dodatno primijenimo Lemu 4 slijedi da je

$$C = -\frac{u_2(\xi)}{a(0)W(0)},$$
$$D = -\frac{u_1(\xi)}{a(0)W(0)}.$$

Zbog jednostavnosti, odaberemo u_1 i u_2 takve da je $a(0)W(0) = -1$, te izraze C i D uvrstimo u (7.12). Tako slijedi da je ravnotežni progib jednak

$$u_\xi(x) = \begin{cases} u_1(x)u_2(\xi), & x \leq \xi \\ u_2(x)u_1(\xi), & x \geq \xi. \end{cases}$$

Sljedeći teorem, kojeg smo upravo dokazali, opisuje Greenovu funkciju.

Teorem 2. *Uz standardne pretpostavke te $b \neq 0$ ili $\beta + \delta > 0$, Greenova funkcija rubne zadaće dana je izrazom*

$$G(x,\xi) = \begin{cases} u_1(x)u_2(\xi), & 0 \leq x \leq \xi \leq l \\ u_2(x)u_1(\xi), & 0 \leq \xi \leq x \leq l, \end{cases} \tag{7.14}$$

gdje su u_1 i u_2 netrivijalna rješenja lijeve rubne zadaće, odnosno desne rubne zadaće, redom, koja zadovoljavaju uvjet $a(0)W(0) = -1$.

Neka svojstva Greenove funkcije iskazana su u sljedećem korolaru.

Korolar 1. *Uz pretpostavke Teorema 2 vrijedi:*

(i) $G(x,\xi) = G(\xi,x)$ *(simetričnost)*

(ii) $G \in C([0,l] \times [0,l])$ *(neprekidnost)*

(iii) $(\forall (x,\xi) \in (0,l) \times (0,l))\ G(x,\xi) \neq 0.$

Dokaz. Tvrdnje *(i)* i *(ii)* direktno slijede, pa ćemo dokazati samo tvrdnju *(iii)*. Neka je $G(\overline{x},\overline{\xi}) = 0$, za neke $\overline{x},\overline{\xi} \in (0,l)$. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavit ćemo da je $\overline{x} < \overline{\xi}$, tj.

$$u_1(\overline{x})u_2(\overline{\xi}) = 0.$$

Iz ovoga slijede dva slučaja:

$$u_1(\overline{x}) = 0 \quad \text{ili} \quad u_2(\overline{\xi}) = 0.$$

Ako je $u_1(\overline{x}) = 0$, budući da je u_1 rješenje lijeve rubne zadaće, slijedi da je u_1 rješenje rubne zadaće na $(0,\overline{x})$. Rješenje rubne zadaće je jedinstveno pa je $u_1 = 0$ na $(0,\overline{x})$, iz čega imamo da je

$$W(x; u_1, u_2) = 0, \quad \text{za} \ \ x \in (0,\overline{x}).$$

To je kontradikcija s linearnom nezavisnosti u_1 i u_2, pa je $G(x,\xi) \neq 0$, za svaki $(x,\xi) \in (0,l) \times (0,l)$.
Drugi slučaj $u_2(\overline{\xi}) = 0$ analizira se analogno kao prvi slučaj. □

7.1 Rješavanje rubne zadaće pomoću Greenove funkcije

Teorem 3. *Uz standardne pretpostavke, te $b = 0$ ili $\beta + \gamma > 0$, ako na žicu u točkama ξ_i, $i = 1, \dots, n$, djeluju koncentrirane sile F_i, $i = 1, \dots, n$, onda je ravnotežni progib dan s*

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} F_i G(x, \xi_i).$$

Dokaz. Slijedi direktno iz principa superpozicije za koncentrirano djelovanje. □

Teorem 4. *Uz pretpostavke Teorema 3, ako na žicu djeluje sila gustoće f, onda je ravnotežni progib dan s*

$$u(x) = \int_0^l G(x, \xi) f(\xi)\, d\xi. \tag{7.15}$$

Dokaz. Uočimo kako je ovo ujedno i dokaz egzistencije rješenja rubne zadaće. Ideja je pokazati da je ovako zadan u zaista rješenje jednadžbe ravnoteže na $[0, l]$. Iz (7.14) i (7.15) slijedi

$$u(x) = u_2(x) \int_0^x u_1(\xi) f(\xi)\, d\xi + u_1(x) \int_x^l u_2(\xi) f(\xi)\, d\xi, \tag{7.16}$$

zatim deriviramo (7.16), te nakon jednostavnog tehničkog računa dobijemo

$$u'(x) = u_2'(x) \int_0^x u_1(\xi) f(\xi)\, d\xi + u_1'(x) \int_x^l u_2(\xi) f(\xi)\, d\xi.$$

Pomnožimo prethodni izraz s $a(x)$ i opet deriviramo:

$$\begin{aligned}(a(x)u'(x))' = (a(x)u_2'(x))' \int_0^x u_1(\xi) f(\xi)\, d\xi + a(x)u_2'(x)u_1(x)f(x) \\ + (a(x)u_1'(x))' \int_x^l u_2(\xi) f(\xi)\, d\xi - a(x)u_1'(x)u_2(x)f(x),\end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned}(a(x)u'(x))' = b(x)u_2(x) \int_0^x u_1(\xi) f(\xi)\, d\xi + b(x)u_1(x) \int_x^l u_2(\xi) f(\xi)\, d\xi \\ + a(x)f(x)(u_2'(x)u_1(x) - u_1'(x)u_2(x)).\end{aligned}$$

Uočimo kako je izraz $(u_2'(x)u_1(x) - u_1'(x)u_2(x))$ jednak $W(x)$, te kada iskoristimo $a(0)W(0) = -1$ slijedi

$$\begin{aligned}(a(x)u'(x))' = b(x)u_2(x) \int_0^x u_1(\xi) f(\xi)\, d\xi \\ + b(x)u_1(x) \int_x^l u_2(\xi) f(\xi)\, d\xi - f(x).\end{aligned}$$

Izlučimo $b(x)$, a $u_1(x)$ i $u_2(x)$ stavimo pod integrale i možemo uočiti kako će se pojaviti definicija Greenove funkcije:

$$(a(x)u'(x))' = b(x) \int_0^l G(x,\xi) f(\xi)\, d\xi - f(x),$$

što je jednako

$$(a(x)u'(x))' = b(x)u(x) - f(x).$$

Time je pokazano da je u rješenje jednadžbe ravnoteže na $[0,l]$. Provjerimo još rubne uvjete. Kako bi provjerili rubni uvjet u lijevom kraju, koristit ćemo definiciju Greenove funkcije (Definicija 2), činjenicu da je u lijevom kraju $x < \xi$ i to da je $u(x)$ dan s (7.15). Tada slijedi

$$\alpha u'(0) - \beta u(0) = \int_0^l (\alpha u'_\xi(0) - \beta u_\xi(0)) f(\xi)\, d\xi = 0.$$

Drugi rubni uvjet dokazuje se analogno. □

Literatura

[1] I. Aganović, K. Veselić, *Jednadžbe matematičke fizike*, Školska knjiga, Zagreb, 1985.

[2] I. Aganović, K. Veselić, *Linearne diferencijalne jednadžbe, Uvod u rubne uvjete*, Element, Zagreb, 1997.

[3] I. Aganović, K. Veselić, *Matematički modeli i metode*, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku – Odjel za matematiku, Osijek, 2014.

[4] K. Burazin, J. Jankov, *Glazba titrajuće žice*, Osječki matematički list 14(2014), 1-22

[5] *Vizualizacija titranja žice*, dostupno na https://laplace.mathos.hr/titranje-zice/.

Sažetak

U ovom završnom radu analizirana je ravnoteža žice. Za napetu elastičnu žicu prikazan je izvod jednadžbe ravnoteže, koja je linearna diferencijalna jednadžba drugog reda. Analizirani su različiti rubni uvjeti kao što su Dirichletov, Neumannov i Robinov, koji definiraju progib i napetost žice u rubovima. Iskazan je princip superpozicije koji je bitan za postupak homogenizacije rubnih uvjeta i općenito kod određivanja ravnotežnog položaja. Dokazana je jedinstvenost rješenja za specifične slučajeve, te je na kraju samog rada obrađeno koncentrirano djelovanje i korištenje Greenove funkcije za rješavanje rubne zadaće.

Ključne riječi

progib, napetost, ravnoteža žice, jednadžba ravnoteže, rubni uvjet, rubna zadaća, koncentrirana sila, Greenova funkcija

Equilibrium of the Wire

Summary

This thesis analyzes the equilibrium of the wire. For a stretched elastic wire, the derivation of the equilibrium equation, which is a second-order linear differential equation, is presented. Various boundary conditions, such as Dirichlet, Neumann, and Robin, which define the deflection and tension of the wire at its ends, are analyzed. The principle of superposition, important for the homogenization of boundary conditions and the general determination of the equilibrium position, is discussed. The uniqueness of the solution in specific cases is proven, and finally, concentrated forces and the use of Green's function to solve the boundary value problem are addressed.

Keywords

deflection, tension, balance of wire, equilibrium equation, boundary condition, boundary value problem, concentrated force, Green's function

Životopis

Rođena sam 2003. u Slavonskom Brodu. Pohađala sam Osnovnu školu "Vjekoslav Klaić" u Garčinu od 2009. do 2017. godine. Gimnaziju "Matija Mesić", prirodoslovno-matematički smjer, završila sam 2021. godine. Iste godine sam upisala sveučilišni prijediplomski studij Matematika i računarstvo na Odjelu za matematiku, sada Fakultetu primijenjene matematike i informatike, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku.