# Hermiteovi polinomi

**Prpić, Vanesa**

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike

Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

# Hermiteovi polinomi

Završni rad

Mentor:
**prof. dr. sc. Mihaela Ribičić Penava**

Student:
**Vanesa Prpić**

Osijek, 2024.

# Sadržaj

# 1 | Uvod

U ovom radu dan je pregled Hermiteovih polinoma. Riječ polinom dolazi od grčke riječi *poly* (mnogo) i latinske riječi *nomen* (ime), a prvi put ju je upotrijebio Franşis Vléte u 17. stoljeću. Hermiteovi polinomi su ortogonalni polinomi, a značajan interes za takve polinome se javio nešto kasnije, odnosno tek u 19. stoljeću kada je P.L. Chebyshev proučavao verižne razlomke. Zbog niza dobrih svojstava, imaju veliku primjenu u raznim granama numeričke matematike. Važnost polinoma je i u tome što pomoću njih možemo aproksimirati razne složene funkcije do željene preciznosti, a zbog svoje važnosti, polinomi su stoljećima bili okupacija mnogih matematičara. Hermiteovi polinomi su nastali rješavanjem diferencijalnih jednadžbi drugog reda.

U radu su predstavljeni Hermiteovi polinomi koji pripadaju otrogonalnim polinomima na segmentu $\langle -\infty, +\infty \rangle$. Uveo ih je francuski matematičar Charles Hermite, po kojem su i dobili naziv. Unutar poglavlja o Hermiteovim polinomima navedena su njihova osnovna svojstva, kao i diferencijalna jednadžba te rekurzivne relacije koje zadovoljavaju. Njihova svojstva, poput ortogonalnosti i zadovoljavanja diferencijalne jednadžbe drugog reda, čini ih korisnima u rješavanju problema s oscilatorima. Osim toga, koriste se u statistici u teoriji normalne distribucije, kao i u numeričkoj analizi. Na kraju su opisane relacije koje zadovoljavaju, pojedini teoremi te primjena polinoma u fizici.

# 2 | Osnovni pojmovi i rezultati

U ovom poglavlju navest ćemo osnovne definicije i tvrdnje koje će nam koristiti u daljnjim razmatranjima Hermiteovih polinoma.

Za izvor definicija ćemo korisititi [2], [4], [8] i [13].

**Definicija 2.0.1.** Funkciju $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiranu s

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad n \in \mathbb{N}_0\,,\ a_i \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0$$

nazivamo **polinom** n-tog stupnja nad $\mathbb{R}$. Brojeve $a_i \in \mathbb{R}$ zovemo koeficijenti polinoma, broj $a_0$ slobodni koeficijent, a $a_n$ vodeći koeficijent.

U nastavku ćemo navesti Taylorov red, koji omogućava aproksimaciju funkcije kao beskonačnu sumu polinomskih članova.

**Definicija 2.0.2** (Taylorov red)**.** Neka je $f : \langle c-r, c+r\rangle \to \mathbb{R}$ funkcija klase $C^\infty$ na intervalu $\langle c-r, c+r\rangle$. Red potencija

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

nazivamo Taylorov red funkcije f oko točke c.

U nastavku slijede definicije funkcije izvodnice niza brojeva i funkcije izvodnice niza funkcija.

**Definicija 2.0.3.** Kažemo da je funkcija $G(x)$ funkcija izvodnica niza $(c_n)$ ako postoji prikaz

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n x^n}{n!}.$$

**Definicija 2.0.4.** Kažemo da je funkcija $G(x,t)$ funkcija izvodnica niza funkcija $(h_n(x))$ ako postoji prikaz

$$G(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n(x)t^n}{n!}.$$

**Teorem 2.0.1** (Binomni teorem)**.** *Za $n \in \mathbb{N}$ i sve $x, y \in \mathbb{C}$ vrijedi*

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + y^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

**Definicija 2.0.5.** Kažemo da je niz $a_n$ zadan rekurzivnom relacijom, ako postoji veza oblika

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k}), \ \ n \geq k$$

pri čemu je $f$ neka funkcija, a početne vrijednosti $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ su poznate.

**Definicija 2.0.6.** Funkciju $\Gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ zadanu formulom

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

nazivamo Gama funkcija.

**Napomena 2.0.1.** *Gama funkcija se istom formulom može definirati i za vrijednosti kompleksnog argumenta $x$, uz uvjet da je $Re x > 0$.*

Više o svojstvima i primjenama Gama funkcije može se pronaći u [6] i [11].

**Propozicija 2.0.1** (Leibnizovo pravilo)**.** *Neka su $f$ i $g$ $n-$puta derivabilne funkcije. Tada je produkt $f \cdot g$ $n-$puta derivabilna funkcija čija je $n-$ta derivacija dana izrazom*

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(n-i)} g^{(i)},$$

*pri čemu je $f^{(j)}$ $j-$ta derivacija funkcije $f$.*

# 3 | Hermiteovi polinomi

Hermiteovi polinomi nose naziv po Charlesu Hermiteu[1] koji ih je definirao 1864. godine. C. Hermite se bavio istraživanjem teorije brojeva, otrogonalnih polinoma, eliptičkih funkcija i algebre. On je prvi dokazao da je e, baza prirodnih logaritama, broj koji se ne može dobiti kao korijen polinoma s cjelobrojnim koeficijentima.

## 3.1 Funkcija izvodnica

Do eksplicitnog izraza za Hermiteove polinome možemo doći pomoću funkcija izvodnica.

**Definicija 3.1.1.** Hermiteovi polinomi $H_n$, $n \in \mathbb{N}_0$ definiraju se pomoću funkcije izvodnice formulom

$$e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!}.$$

Funkcija izvodnica za Hermiteove polinome dana je izrazom

$$G(x,t) = e^{2tx-t^2} \tag{3.1}$$

za $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{C}$.

Funkcija (3.1) nema singulariteta, pa se može razviti u Taylorov red u okolini točke $t = 0$. Prema tome imamo razvoj

$$e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!}, \tag{3.2}$$

gdje je

[1] Charles Hermite (1822. - 1901.) - francuski matematičar

$$
\begin{aligned}
H_n(x) &= \frac{d^n}{dt^n} e^{2tx-t^2}|_{t=0} \\
&= \frac{d^n}{dt^n} e^{x^2-(x-t)^2}|_{t=0} \\
&= e^{x^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-(x-t)^2}|_{t=0} \\
&= (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2}\right).
\end{aligned}
$$

Stoga se često u literaturi Hermiteovi polinomi definiraju i na sljedeći način.

**Definicija 3.1.2.** Hermiteovi polinomi $H_n$, $n \in \mathbb{N}_0$ definirani su sljedećim izrazom

$$
H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.3}
$$

Izraz (3.3) je u literaturi poznat kao Rodriguesova formula za Hermiteove polinome.

## 3.2 Diferencijalna jednadžba

Deriviranjem izraza (3.2) po varijabli $x$ dobivamo

$$
2te^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} H_n'(x) \frac{t^n}{n!},
$$

odnosno

$$
2t \sum_{n=0}^{+\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} H_n'(x) \frac{t^n}{n!},
$$

odakle slijedi

$$
2nH_{n-1}(x) = H_n'(x). \tag{3.4}
$$

Sličnim postupkom, ali deriviranjem po varijabli $t$ dobivamo

$$
2(x-t) \sum_{n=0}^{+\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} H_n(x) \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}
$$

iz čega slijedi

$$
2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) = H_{n+1}(x). \tag{3.5}
$$

Uočimo kako je iz (3.4)

$$H_{n-1}(x) = \frac{H_n'(x)}{2n}, \tag{3.6}$$

iz čega dodatno slijedi

$$\begin{aligned} H_{n+1}'(x) &= 2(n+1)H_n(x) \\ &= 2nH_n(x) + 2H_n(x), \end{aligned} \tag{3.7}$$

a iz (3.5) je

$$H_{n-1}(x) = \frac{2xH_n(x) - H_{n+1}(x)}{2n}. \tag{3.8}$$

Izjednačavanjem jednakosti (3.6) i (3.8) dobivamo

$$H_n'(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x),$$

odnosno

$$2xH_n(x) = H_n'(x) + H_{n+1}(x).$$

Nakon deriviranja gornje jednakosti dobivamo

$$2xH_n'(x) + 2H_n(x) = H_{n+1}'(x) + H_n''(x),$$

što se može zapisati na sljedeći način

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + H_{n+1}'(x) - 2H_n(x) = 0. \tag{3.9}$$

Uvrštavanjem (3.7) u (3.9) dobivamo

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0,$$

iz čega očito slijedi da je $H_n$ jedno partikularno rješenje jednadžbe

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0. \tag{3.10}$$

Diferencijalna jednadžba (3.10) se naziva Hermiteova diferencijalna jednadžba.

## 3.3 Opći izraz

Kako bismo došli do općenitog izraza za Hermiteov polinom, pretpostavit ćemo da diferencijalna jednadžba

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0 \tag{3.11}$$

ima partikularno rješenje u obliku polinoma

$$P_k(x) = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k, \quad a_0 \neq 0. \tag{3.12}$$

Ukoliko uvrstimo rješenje (3.12) u jednadžbu (3.11) i izjednačimo vodeći koeficijent s nulom, dobit ćemo $k = n$. Možemo zaključiti da je partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe polinom stupnja $n$.

Stoga, u jednadžbu (3.11) možemo uvrstiti

$$y = P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}, \quad a_0 \neq 0.$$

Na taj način dobivamo jednadžbu

$$\sum_{k=0}^{n-2} (n-k)(n-k-1) a_k x^{n-k-2} - 2 \sum_{k=0}^{n} (n-k) a_k x^{n-k} + 2n \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} = 0.$$

Ako u prvoj sumi zamjenimo $k+2$ sa $k$, dobivamo

$$\sum_{k=2}^{n} (n-k+2)(n-k+1) a_{k-2} x^{n-k} + 2 \sum_{k=0}^{n} k a_k x^{n-k} = 0,$$

$$2a_1 x^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} [(n-k+2)(n-k+1) a_{k-2} + 2k a_k] x^{n-k} = 0. \tag{3.13}$$

Iz jednakosti (3.13) slijedi

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, \\ a_k &= -\frac{(n-k+2)(n-k+1)}{2k} a_{k-2}, \quad k = (2, 3, \cdots). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Konačno, možemo zaključiti da su svi koeficijenti $a_i$ s neparnim indeksom jednaki nuli, a koeficijente s parnim indeksom možemo odrediti pomoću (3.14) te dobivamo

$$a_2 = -\frac{n(n-1)}{2 \cdot 2} a_0, \ a_4 = -\frac{(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4} a_2, \ \cdots \ , a_{2k} = -\frac{(n-2k+2)(n-2k+1)}{2 \cdot 2k} a_{k-2}.$$

Množenjem gore navedenih jednakosti, dobivamo

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{n!}{(n-2k)!} \frac{1}{2^{2k} \cdot k!} a_0.$$

Kako bismo dobili baš Hermiteov polinom, uzet ćemo $a_0 = 2^n$, stoga je

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{n!}{k!(n-2k)!} 2^{n-2k}.$$

Dakle,

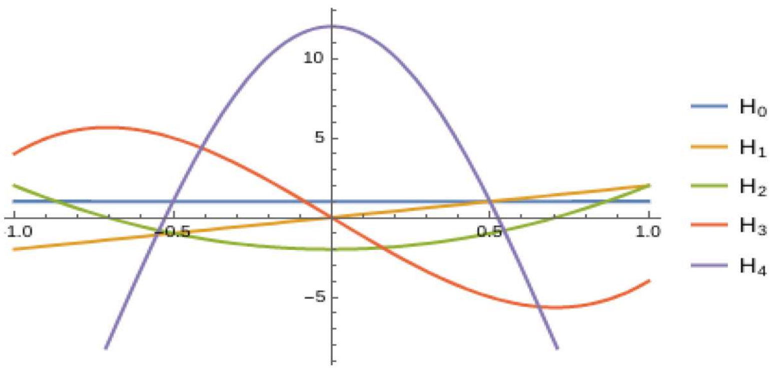
$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k} \tag{3.15}$$

je Hermiteov polinom stupnja n, obično ga označavamo s $H_n$, i pišemo

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}.$$

Navedimo prvih nekoliko Hermiteovih polinoma $H_n(x)$:

$$\begin{aligned}
H_0(x) &= 1, \\
H_1(x) &= 2x, \\
H_2(x) &= 4x^2 - 2, \\
H_3(x) &= 8x^3 - 12x, \\
H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12, \\
H_5(x) &= 32x^5 - 160x^3 + 120x, \\
H_6(x) &= 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120, \\
H_7(x) &= 128x^7 - 1344x^5 + 3360x^3 - 1680x.
\end{aligned}$$




Slika 3.1: Prvih pet Hermiteovih polinoma $H_n(x)$

Uz oznaku $H_n$ za Hermiteove polinome još se koristi oznaka $H_n^*$, a navedeni polinomi su definirani s

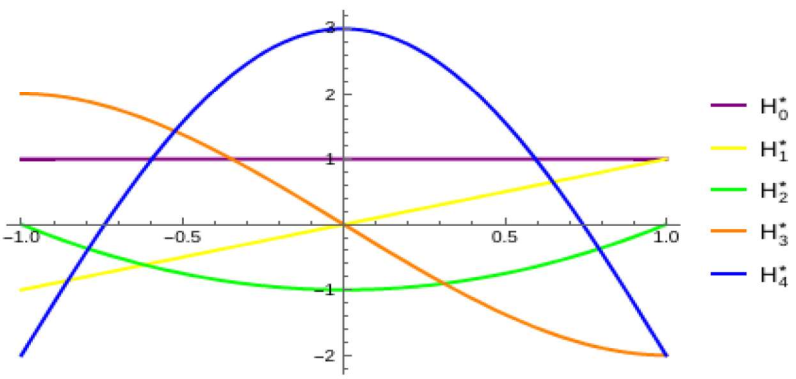
$$H_n^*(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2/2}). \tag{3.16}$$

Između gore nevedenih polinoma i Hermiteovih polinoma postoji sljedeća veza

$$H_n^*(x) = 2^{-n/2} H_n \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right).$$

Nadalje, navedimo prvih nekoliko Hermiteovih polinoma $H_n^*(x)$:

$$\begin{aligned}
H_0^*(x) &= 1, \\
H_1^*(x) &= x, \\
H_2^*(x) &= x^2 - 1, \\
H_3^*(x) &= x^3 - 3x, \\
H_4^*(x) &= x^4 - 6x^2 + 3, \\
H_5^*(x) &= x^5 - 10x^3 + 15x, \\
H_6^*(x) &= x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15, \\
H_7^*(x) &= x^7 - 21x^5 + 105x^3 - 105x.
\end{aligned}$$




Slika 3.2: Prvih pet Hermiteovih polinoma $H_n^*(x)$

## 3.4 Ortogonalnost Hermiteovih polinoma

Unutar ovog potpoglavlja najprije ćemo se upoznati s osnovnim tvrdnjama o ortogonalnim polinomima i nekim njihovim važnim svojstvima te ćemo ih dataljnije proučiti kod Hermiteovih polinoma.

Više detalja može se pronaći u [9, str. 33].

**Definicija 3.4.1.** Polinomi $p$ i $q$ su ortogonalni na segmentu $[a, b]$ ukoliko je njihov težinski skalarni produkt u udnosu na težinsku funkciju $w$, $w(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$, jednak nuli, odnosno

$$\langle p, g \rangle_w = \int_a^b w(x) p(x) q(x) dx = 0.$$

**Napomena 3.4.1.** *Analogno gore navedenoj definiciji, niz polinoma $p_0, p_1, p_2, \cdots$, pri čemu je $p_i$ polinom $i-$tog stupnja, $i \in \mathbb{N}_0$, ortogonalan je na segmentu $[a, b]$ ukoliko zadovoljava uvjet ortogonalnosti*

$$\langle p_i, p_j \rangle_w = \int_a^b w(x) p_i(x) p_j(x) dx = 0,$$

*za $i \neq j$, $i, j \in \mathbb{N}_0$, s obzirom na težinsku funkciju $w$, $w(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$.*

Općenito, težinski skalarni produkt posjeduje ista svojstva kao i "obični" skalarni produkt.

**Napomena 3.4.2.** *Ortogonalni polinomi mogu se zapisati pomoću odgovarajućih funkcija izvodnica. Također, ortogonalni polinomi su rješenja diferencijalne jednadžbe oblika*

$$u_2(x)y'' + u_1(x)y' + u_0(x)y = 0,$$

*pri čemu su $u_i, i = 0, 1, 2$, polinomi karakteristični za određenu vrstu ortogonalnih polinoma.*

Uz gore navedeno, ortogonalni polinomi zadaovoljavaju tročlanu rekurziju

$$p_{\nu+1}(x) + \alpha_\nu(x) p_\nu(x) + \beta_\nu(x) p_{\nu-1}(x) = 0, \quad \nu = 1, 2, 3, \cdots$$

za poznate $p_0, p_1, \alpha_\nu$ i $\beta_\nu, \forall \nu \in \mathbb{N}$.

Proučimo sada ortogonalnost Hermiteovih polinoma.

Neka su $m$ i $n$ proizvoljni nenegativni različiti cijeli brojevi, takvi da je $m < n$. Neka je

$$H_n^*(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} \phi(x),$$

pri čemu je $\phi(x) = e^{-x^2/2}$.

Deriviranjem funkije $\phi(x)$ dobivamo

$$\begin{aligned}
\phi'(x) &= -x e^{-x^2/2}, \\
\phi''(x) &= (x^2 - 1) e^{-x^2/2}, \\
\phi'''(x) &= (-x^3 + 3x) e^{-x^2/2}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Promotrimo integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} H_m^*(x) H_n^*(x) dx.$$

Nadalje, imamo

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} H_m^*(x)(-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n}\phi(x) = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} H_m^*(x)\phi^{(n)}(x) dx.$$

Neka je

$$\begin{aligned} u &= H_m^*(x), \quad dv = \phi^{(n)}(x)dx, \\ du &= H_m^{*\prime}(x)dx, \quad v = \phi^{(n-1)}(x). \end{aligned}$$

Parcijalnom integracijom dobivamo

$$I = (-1)^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} H_m^{*\prime}(x)\phi^{(n-1)}(x)dx.$$

Ukoliko ponovimo postupak $m$ puta, odnosno nakon $m$-te parcijalne integracije dobivamo

$$I = (-1)^{n+m} \int_{-\infty}^{+\infty} H_m^{*(m)}(x)\phi^{(n-m)}(x)dx. \tag{3.17}$$

Ako je $n > m$, poslije ponovne primjene parcijalne integracije, u kojoj je $H_m^{*(m+1)}(x) = 0$, zato što je $H_m^*(x)$ polinom $m-$tog stupnja, dobivamo

$$I = (-1)^{n+m+1} \int_{-\infty}^{+\infty} H_m^{*(m+1)}(x)\phi^{(n-(m+1))}(x)dx = 0.$$

To znači da su polinomi $H_m^*(x)$ i $H_n^*(x)$ ortogonalni na intervalu $\langle -\infty, +\infty \rangle$ obzirom na težinsku funkciju $w(x) = e^{-x^2/2}$.

Ukoliko je $m = n$, tada integral (3.17) postaje

$$I = (-1)^{n+n} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n^{*(n)}(x)\phi^{(n-n)}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} H_n^{*(n)}(x)\phi^{(0)}(x)dx = n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}dx,$$

jer je $H_n^{*(n)}(x) = n!$, stoga imamo

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} H_n^*(x) H_n^*(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}[H_n^*(x)]^2 dx = n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}dx.$$

Vrijednost integrala $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}dx$ možemo izračunati pomoću dvostrukog integrala.

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}dx,$$

$$P^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2}dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)/2}dxdy =$$

$$\left|\begin{array}{c} \text{uvedimo polarne kordinate} \\ x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi \\ dxdy = r\,dr\,d\varphi \end{array}\right| = \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-r^2/2} r\,dr\,d\varphi$$

$$= -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{+\infty} e^{-r^2/2} d(-r^2/2)$$

$$= -2\pi e^{-r^2/2}\Big|_0^{+\infty} = 2\pi$$

Prema tome

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}dx = \sqrt{2\pi}.$$

Nadalje dobivamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}[H_n^*(x)]^2dx = n!\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}dx = n!\sqrt{2\pi}.$$

Iz svega navedenog slijedi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}H_m^*(x)H_n^*(x)dx = \left\{\begin{array}{cc} 0, & m \neq n \\ n!\sqrt{2\pi}, & m = n \end{array}\right. .$$

**Napomena 3.4.3.** *Na sličan način možemo pokazati ortogonalnost za polinome $H_n$, odnosno*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}H_m(x)H_n(x)dx = \left\{\begin{array}{cc} 0, & m \neq n \\ 2^n n!\sqrt{\pi}, & m = n \end{array}\right. .$$

## 3.5 Hermiteove funkcije

Neka je dana Hermiteova diferencijalna jednadžba

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0. \tag{3.18}$$

Uvođenjem supstitucije

$$y = ze^{\frac{1}{2}x^2},$$

jednadžba (3.18) se svodi na

$$z'' + (2n + 1 - x^2)z = 0. \tag{3.19}$$

Nadalje, jednadžba (3.19) ima partikularno rješenje

$$\psi_n(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} H_n(x), \tag{3.20}$$

koje se naziva Hermiteovom funkcijom.

**Teorem 3.5.1.** *Funkcije $x \to \psi_m(x)$ i $x \to \psi_n(x)$ $(m \neq n)$ ortogonalne su na intervalu $\langle -\infty, +\infty \rangle$.*

*Dokaz.* Koristeći (3.19), za $\psi_m(x)$ i $\psi_n(x)$ vrijede sljedeće jednakosti

$$\psi_m''(x) + (2m + 1 - x^2)\, \psi_m(x) = 0, \quad \psi_n''(x) + (2n + 1 - x^2)\, \psi_n(x) = 0,$$

odakle slijedi

$$\psi_m''(x)\, \psi_n(x) - \psi_n''(x)\, \psi_m(x) = 2(n - m)\psi_m(x)\, \psi_n(x).$$

Nadalje, vrijedi

$$\frac{d}{dx}(\psi_m'(x)\, \psi_n(x) - \psi_m(x)\, \psi_n'(x)) = \psi_m''(x)\, \psi_n(x) - \psi_m(x)\, \psi_n''(x).$$

Redom dobivamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\psi_m''(x)\, \psi_n(x) - \psi_m(x)\, \psi_n''(x))dx = 2(n - m) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m(x)\, \psi_n(x)dx,$$

$$(\psi_m'(x)\, \psi_n(x) - \psi_m(x)\, \psi_n'(x))\Big|_{x \to -\infty}^{x \to +\infty} = 2(n - m) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m(x)\, \psi_n(x)dx,$$

$$(n-m)\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m(x)\ \psi_n(x)dx = 0. \tag{3.21}$$

Ako je $n \neq m$, iz (3.21) slijedi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m(x)\ \psi_n(x)dx = 0.$$

■

## 3.6 Integralna reprezentacija

Integralna reprezentacija Hermiteovih polinoma omogućuje njihov prikaz u obliku integrala te lakše izvođenje određenih rezultata, poput ortogonalnosti i rekurzivnih relacija.

Više detalja o integralnoj reprezentaciji može se pronaći u [7, str. 68-69].

Jedna od najpoznatijih integralnih reprezentacija Hermiteovih polinoma dana je sljedećim izrazom

$$H_n(x) = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+it)^n e^{-t^2}dt, \tag{3.22}$$

a navedena reprezentacija se najčešće koristi u fizici.

Također, Hermiteov polinom stupnja $n$, $n \in \mathbb{N}_0$ možemo definirati i pomoću Gaussove integralne formule na sličan način

$$H_n^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+it)^n e^{\frac{-t^2}{2}}dt. \tag{3.23}$$

U ovom podnaslovu malo detaljnije ćemo proučiti reprezentaciju (3.22).

Navedenu reprezentaciju možemo dokazati primjenom binomne formule.

Najprije uočimo kako je funkcija $t \to t^k e^{-t^2}$ neparna, ako je $k$ neparan.

Primjenom binomne formule slijedi

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(x+it)^n e^{-t^2}dt = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}i^k\int_{-\infty}^{+\infty} t^k e^{-t^2}dt.$$

Primjećujemo da su za neparni $k$, integrali na desnoj strani jednaki 0 te dobivamo

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+it)^n e^{-t^2}dt &= \sum_{k=0}^{2k\leq n}\binom{n}{2k}x^{n-2k}(-1)^k\int_{-\infty}^{+\infty}t^{2k}e^{-t^2}dt \\ &= \sum_{k=0}^{2k\leq n}\binom{n}{2k}x^{n-2k}(-1)^k A_k,\end{aligned} \tag{3.24}$$

gdje je $\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2k}e^{-t^2}dt = A_k$.

Uočimo kako za $A_k$ možemo koristiti činjenicu da je funkcija $t^{2k}e^{-t^2}$ parna funkcija, što nam omogućuje zapis integrala na sljedeći način

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2k}e^{-t^2}dt = 2\int_{0}^{+\infty} t^{2k}e^{-t^2}dt. \tag{3.25}$$

Kako bismo riješili navedeni integral, koristit ćemo Gama funkciju.

Pogledati Definiciju 2.0.5 i Napomenu 2.0.1.

Zamijenimo sada varijablu $t^2$ s varijablom $u$, tada vrijedi $2tdt = du$.

Također, uočimo kako vrijedi

$$t^{2k} = u^k, \quad dt = \frac{1}{2\sqrt{u}}du.$$

Uvrstimo sada varijablu $u$ u integral (3.25)

$$2\int_{0}^{+\infty} t^{2k}e^{-t^2}dt = 2\int_{0}^{\infty} u^k e^{-u}\frac{1}{2\sqrt{u}}du.$$

Ukoliko pojednostavimo gornji integral, dobivamo

$$\int_{0}^{\infty} u^{k-\frac{1}{2}}e^{-u}du. \tag{3.26}$$

Uočimo kako je integral (3.26) zapisan u obliku Gama funkcije $\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)$.

Tada vrijedi

$$2\int_{0}^{\infty} t^{2k}e^{-t^2}dt = \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right).$$

Nadalje, konačni rezultat za integral $A_k$ je

$$A_k = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2k} e^{-t^2} dt = \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right).$$

Jedna od vrlo poznatih vrijednost Gama funkcije je

$$\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2k-1)!!}{2^k}\sqrt{\pi} = \frac{(2k)!}{2^{2k}k!}\sqrt{\pi}.$$

Korištenjem gore navedene jednakosti, dobivamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2k} e^{-t^2} dt = \frac{(2k-1)!!}{2^k}\sqrt{\pi} = \frac{(2k)!}{2^{2k}k!}\sqrt{\pi},$$

odavde slijedi

$$A_k = \frac{(2k-1)!!}{2^k}\sqrt{\pi} = \frac{(2k)!}{2^{2k}k!}\sqrt{\pi}.$$

Uočimo kako je $A_0 = \sqrt{\pi}$.

Ukoliko zamijenimo vrijednost za $A_k$ u (3.24), dobivamo

$$\frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x+it)^n e^{-t^2} dt = \sum_{k=0}^{2k \leq n} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}.$$

Polinom na desnoj strani je Hermiteov polinom, čime smo pokazali formulu (3.22).

## 3.7 Rekurzivne relacije

U ovom ćemo potpoglavlju reći nešto o rekurzivnim relacijama, a više o njima može se pronaći u [3] i [5].

Rekurzivna relacija je metoda definiranja funkcija gdje funkcija poziva samu sebe kako bi riješila problem.

Uočimo kako rekurzivna relacija može izražavati elemente niza pomoću fiksnog broja prethodnih elemenata, odnosno za neki fiksan $k \in \mathbb{N}$ proizvoljni element niza $(x_n)$ izražava pomoću $x_{n-1}, \dots, x_{n-k}$ i u tom slučaju govorimo o rekurzivnim relacijama konačne prošlosti. Također, rekurzivna relacija može izražavati elemente niza pomoću svih prethodnih elemenata i u tom slučaju govorimo o rekurzivnim relacijama beskonačne prošlosti.

Da bi se rekurzivna relacija mogla koristiti za računanje elemenata niza, potrebno je imati početne uvjete, a to su najčešće prvi elementi niza. Početni uvjeti su općenito zadani ili su dostupni jednostavnim računom.

Prisjetimo se, upoznali smo se s Hermiteovom diferencijalnom jednadžbom (3.10) koja je oblika

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0.$$

U nastavku ćemo navesti neke vrlo poznate rekurzivne relacije kod Hermiteovih polinoma te ćemo ih dokazati, a više detalja o navedenim tvrdnjama može se pronaći u [10, str. 20-22].

**Teorem 3.7.1.** *Niz Hermiteovih polinoma* $(H_n^*, n \in \mathbb{N}_0)$ *zadovoljava rekurzivnu relaciju*

$$H_{n+1}^*(x) = xH_n^*(x) - nH_{n-1}^*(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

*Dokaz.* Primjenjujući relaciju (3.23) i parcijalnu integraciju, dobivamo

$$\begin{aligned}
H_{n+1}^*(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x+it)^{n+1} e^{\frac{-t^2}{2}} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x+it)^n (x+it) e^{\frac{-t^2}{2}} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x+it)^n x e^{\frac{-t^2}{2}} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x+it)^n it e^{\frac{-t^2}{2}} dt \\
&= xH_n^*(x) + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left( -(x+it)^n e^{\frac{-t^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} n(x+it)^{n-1} i e^{\frac{-t^2}{2}} dt \right) \\
&= xH_n^*(x) - \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x+it)^{n-1} x e^{\frac{-t^2}{2}} dt \\
&= xH_n^*(x) - nH_{n-1}^*(x).
\end{aligned}$$

■

**Teorem 3.7.2.** *Za svako* $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi*

$$H_n^{*\prime}(x) = nH_{n-1}^*(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

*Dokaz.* Za proizvoljne $x \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}_0$, primjenjujući relaciju (3.16) i Leibnizovu formulu, izračunajmo

$$(-1)^n \frac{d}{dx} H_n^*(x) = \frac{d}{dx}\left(e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$$

$$= x e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} + e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$= x e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} + e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left(-x e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$$

$$= x e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} + e^{\frac{x^2}{2}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^k}{dx^k}(-x) \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$$

$$= \left(\frac{d^k}{dx^k}(-x) = 0, k \geq 2\right)$$

$$= x e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} + e^{\frac{x^2}{2}} \left[\binom{n}{0} \frac{d^0}{dx^0}(-x) \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) + \binom{n}{1} \frac{d}{dx}(-x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\right]$$

$$= x e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} + e^{\frac{x^2}{2}} \left[-x \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} - n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-\frac{x^2}{2}}\right]$$

$$= -n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Ukoliko pomnožimo dobivenu jednakost s $(-1)^n$, dobivamo

$$\frac{d}{dx} H_n^*(x) = n(-1)^{n+1} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-\frac{x^2}{2}} = n(-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-\frac{x^2}{2}} = n H_{n-1}^*(x).$$

∎

## 3.8 Adicijski teorem

U ovom potpoglavlju, pokazat ćemo da za Hermiteove polinome vrijedi adicijski teorem s trigonometrijskim funkcijama, a više detalja može se pronaći u [7, str. 70].

**Teorem 3.8.1.** *Za Hermiteove polinome vrijedi*

$$H_n(x\cos\theta + y\sin\theta) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^k\theta \sin^{n-k}\theta H_k(x)H_{n-k}(y).$$

*Dokaz.* Na osnovu integralne reprezentacije (3.22) vrijedi

$$H_k(x) = \frac{2^k}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x+iu)^k e^{-u^2} du,$$

$$H_{n-k}(y) = \frac{2^{n-k}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (y+iv)^{n-k} e^{-v^2} dv.$$

Nadalje, raspišimo sljedeći izraz

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^k\theta \sin^{n-k}\theta H_k(x)H_{n-k}(y)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{2^n}{\pi} \cos^k\theta \sin^{n-k}\theta \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x+iu)^k (y+iv)^{n-k} e^{-u^2-v^2} dudv$$

$$= \frac{2^n}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} ((x+iu)\cos\theta)^k ((y+iv)\sin\theta)^{n-k} e^{-u^2-v^2} dudv$$

$$= \frac{2^n}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x\cos\theta + y\sin\theta + i(u\cos\theta + v\sin\theta))^n e^{-u^2-v^2} dudv.$$

Uvedemo li sada supstituciju

$$u\cos\theta + v\sin\theta = \psi, \quad -u\sin\theta + v\cos\theta = \eta,$$

dobivamo

$$u^2 + v^2 = \psi^2 + \eta^2, \quad dudv = d\psi d\eta,$$

te je

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^k\theta\sin^{n-k}\theta H_k(x)H_{n-k}(y)$$

$$= \frac{2^n}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x\cos\theta + y\sin\theta + i\psi)^n e^{-\psi^2-\eta^2}d\psi d\eta,$$

$$= \frac{2^n}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x\cos\theta + y\sin\theta + i\psi)^n e^{-\psi^2}d\psi\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\eta^2}d\eta.$$

Uočimo kako je prema (3.22), $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\eta^2}d\eta = 1$, pa slijedi

$$\frac{2^n}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x\cos\theta + y\sin\theta + i\psi)^n e^{-\psi^2}d\psi = H_n(x\cos\theta + y\sin\theta),$$

čime smo pokazali adicijski teorem

$$H_n(x\cos\theta + y\sin\theta) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^k\theta\sin^{n-k}\theta H_k(x)H_{n-k}(y).$$

■

## 3.9 Hermiteovi polinomi s jednim parametrom

**Definicija 3.9.1.** Hermiteovi polinomi $H_n$ s jednim parametrom $\lambda(\lambda > 0)$ definiraju se na sljedeći način

$$H_n(x,\lambda) = (-1)^n e^{\lambda x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-\lambda x^2}.$$

Prema (3.15), ovi polinomi se mogu još definirati na idući način.

**Definicija 3.9.2.** Hermiteovi polinomi s jednim parametrom definirani su izrazom

$$H_n(x,\lambda) = \lambda^n\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\frac{n!}{\lambda^k k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k},$$

za $\lambda > 0$ i $n = 0, 1, 2, ...$

Za $\lambda = 1$, vrijedi

$$H_n(x, \lambda) = H_n(x),$$

dok za $\lambda = \frac{1}{2}$, vrijedi

$$H_n(x, \lambda) = H_n^*(x).$$

## 3.10 Primjene

Više informacijama o Gauss - Hermiteovoj kvadraturi i harmonijskom oscilatoru može se pronaći u [1],[12] i [13].

Hermiteovi polinomi imaju vrlo važnu ulogu u području matematičke fizike, posebno u kvantnoj mehanici i statističkoj fizici. U ovom ćemo potpoglavlju navesti kako se Hermiteovi polinomi mogu upotrebljavati u Gauss - Hermiteovoj kvadraturi te u harmonijskim oscilatorima.

### 3.10.1 Gauss - Hermiteova kvadratura

Gauss-Hermiteova kvadratura, često se naziva Hermiteova kvadratura, je metoda za numeričko računanje integrala oblika

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x) dx, \tag{3.27}$$

na intervalu $\langle -\infty, +\infty \rangle$ s težinskom funkcijom $w(x) = e^{-x^2}$.

Integral (3.27) se aproksimira kao suma težinskih funkcija

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i),$$

pri čemu je $n$ broj korištenih točaka, $x_i$ su korijeni Hemiteovih polinoma $H_n(x)$, $i = 1, 2, ..., n$, a težine $w_i$ su dane izrazom

$$w_i = \frac{2^{n-1}(n-1)!\sqrt{\pi}}{n[H_{n-1}(x_i)]^2}.$$

### 3.10.2 Hermonijski oscilator

Jedan od najvažnijih primjera primjene Hermiteovih polinoma u fizici je rješavanje Schrödingerove jednadžbe za harmonijski oscilator, koja glasi

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{K}{2}x^2\psi = E\psi,$$

pri čemu $K$ označava konstantu opruge, $m$ masu čestice, $x$ udaljenost, $\psi$ valnu funkciju te $\hbar$ reduciranu Planckovu konstantu.

Kada se uvrsti uvjet klasičnog nedozvoljenog područja $x^2 > x_0^2$, dobiju se dva rješenja valne jednadžbe

$$\psi \sim A^{\pm\frac{\varepsilon^2}{2}} = A^{\pm\frac{k^2x^2}{2}},$$

gdje je $k$ karakteristični valni broj.

Rastuće rješenje ne zadovoljava uvjet normalizacije

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*\psi dx < \infty,$$

pri čemu je $\psi*$ kompleksno konjugirana funkcija valne funkcije $\psi$, te preostaje jedino padajuća valna funkcija.

Predznak valne funkcije mijenja se od oscilirajuće za $x^2 < x_0^2$ do padajuće za $x^2 > x_0^2$ pa su točkre okretišta $x = \pm x_0$ relevantne u kvantnoj fizici.

Za valnu funckiju $\psi = \psi(r)$, operator položaja je sam vektor položaja.

Operator impulsa izražava se kao $\hat{p} = i\hbar\nabla$ i njegova je $x$ komponenta

$$\hat{p}_x = i\hbar\frac{\partial}{\partial x}.$$

Komponente $y$ i $z$ su jednake uz promjenu derivacije zadane komponente.

Komutator operatora položaja i impulsa je po komponentama

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar.$$

Normirane vlastite funkcije harmonijskog oscilatora su

$$\psi_n(\eta) = \frac{\sqrt[4]{\lambda}}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^n n!}}e^{-\frac{\eta^2}{2}}H_n(\eta), \quad \eta = \sqrt{\lambda x}, \lambda = \frac{m\omega}{\hbar},$$

gdje su $H_n$ Hermiteovi polinomi.

# Literatura


[1] R. Bulirsch, J. Stoer, *Introduction to Numerical Analysis*, Würzburg, München, 1991.

[2] M. Crnjac, D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika*, Ekonomski fakultet, Osijek, 1994.

[3] D. Ž. Đoković D. S. Mitrović, *Specijalne funkcije*, Građevinska knjiga, Beograd, 1964.

[4] N. Elezović, *Diskontna matematika 1*, Element, Zagreb, 2017.

[5] N. N. Lebedev, *Special functions and their applications*, Physico - Tehnical Institute, Academy of Science, 1965.

[6] T. Milas, M. Ribičić Penava, K. Sabo, *Primjene gama funkcije*, Osječki matematički list, **21**(2021), 1-18.

[7] D. S. Mitrović, *Uvod u specijalne funkcije*, Građevinska knjiga, Beograd, 1975.

[8] I. Oreški, *Rekurzije*, Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku, završni rad, 2011.

[9] S. Penjić, *Ortogonalni, Hermiteovi i Jacobijevi polinomi*, naučno-istraživački rad, Univerzitet u Sarajevu, Odsjek za matematiku, 2012.

[10] A. Perković, *Babenko - Becknerov teorem*, diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, 2015.

[11] M. Ribičić Penava, D. Škrobar, *Gama i beta funkcije*, Osječki matematički list **15**(2015), 93-111.

[12] R. Shankar, *Principles of Quantum Mechanics*, Yase University, New Haven, Connecticut, 1980.

[13] S. Singer, *Numerička matematika*, Sveučilište u Zagrebu, PMF-Matematički Odjel, Zagreb, 2008.

# Sažetak

U ovom radu ćemo definirati Hermiteove polinome i navesti njihova osnovna svojstva. Pokazat ćemo kako se mogu izraziti pomoću funkcija izvodnica te kako predstavljaju rješenje homogene linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda. Izvest ćemo rekurzivne relacije koje oni zadovoljavaju i dokazati njihovu ortogonalnost. Zatim ćemo predstaviti Hermiteove funkcije i integralnu reprezentaciju Hermiteovih polinoma. Na kraju ćemo razmotriti Hermiteove polinome s jednim parametrom te prikazati njihove primjene u matematičkoj fizici, posebno u kvantnoj mehanici, i numeričkoj matematici.

## Ključne riječi

Hermiteovi polinomi, rekurzivne relacije, Hermiteove funkcije, primjene

# Hermite polynomials

## Summary

In this paper, we will define Hermite polynomials and state their basic properties. We will show how they can be expressed using derivative functions and how they represent the solution of a homogeneous linear differential equation of the second order. We will derive recursive relations that they satisfy and prove their orthogonality. Next, we will present Hermite functions and the integral representation of Hermite polynomials. Finally, we will consider Hermite polynomials with one parameter and show their applications in mathematical physics, especially in quantum mechanics, and numerical mathematics.

## Keywords

Hermite polynomials, recursive relations, Hermite functions, applications

# Životopis

Rođena sam 13. kolovoza 2002. godine u Virovitici. Pohađala sam Osnovnu školu Vladimir Nazor Virovitica. Nakon završetka sam upisala prirodoslovno-matematičku gimnaziju u Gimnaziji Petra Preradovića Virovitica koju sam pohađala od 2017. do 2021. Po završetku srednje škole upisujem prijediplomski studij Matematika na Fakultetu primijenjene matematike i informatike u Osijeku.