Diskretan slučajni vektor

Ćurić, Mia

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Mia Ćurić

Diskretan slučajni vektor

Završni rad

Osijek, 2016.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Mia Ćurić

Diskretan slučajni vektor

Završni rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Dragana Jankov Maširević

Osijek, 2016.

Sažetak

Tema ovog završnog rada je diskretan slučajni vektor. Prvo ćemo reći nešto općenito o slučajnim vektorima i pojasniti funkciju distribucije slučajnog vektora pomoću koje opisujemo njegova svojstva. Razlikujemo diskretan i neprekidan slučajni vektor, a mi ćemo detaljnije obraditi diskretan slučajni vektor koji poprima vrijednosti iz konačnog ili prebrojivog skupa. U radu ćemo proučavati dvodimenzionalni diskretan slučajni vektor, a poopćenja za n-dimenzionalni se mogu pronaći u dodatnoj literaturi kao što je [7]. Diskretan slučajni vektor prikazujemo u obliku tablice distribucije iz koje možemo odrediti distribucije komponenti slučajnog vektora. Obradit ćemo uvjetne distribucije diskretnog slučajnog vektora, tj. distribucije svake od komponenti slučajnog vektora s obzirom na poznatu vrijednost druge komponente tog slučajnog vektora. Također ćemo objasniti nezavisnost komponenti diskretnog slučajnog vektora, navesti kriterije za ispitivanje nezavisnosti i sve potkrijepiti primjerima. Na kraju ćemo definirati numeričke karakteristike slučajnog vektora.

Ključne riječi

Slučajni vektor, diskretan slučajni vektor, funkcija distribucije slučajnog vektora, tablica distribucije slučajnog vektora, marginalne distribucije, uvjetna distribucija, nezavisnost, numeričke karakteristike slučajnog vektora, kovarijanca, koeficijent korelacije.

Abstract

The main subject of this paper is discrete random vector. First, we will say something general about random vectors and an appropriate cumulative distribution function. Random vector can be either discrete or continuous. We are going to focus on two-dimensional discrete random vector while the generalization to n-dimenzional random vector can be found in [7]. A set of all values of the discrete random vector is finite or countable. Discrete random vector can be presented by an appropriate table. From such table we can find marginal distributions of the components of the discrete random vector. In what follows, we will precisely explain conditional distributions of the components of the discrete random vector. Also, we will give different examples for discrete random vectors. At the end of this paper numerical characteristics of the discrete random vector will be defined.

Key words

Random vector, discrete random vector, cumulative distribution function of the random vector, marginal distributions of the components of the discrete random vector, conditional distribution of the components of the discrete random vector, independent random variables, numerical characteristics of the random vector, covariance, correlation coefficient.

Sadržaj

1 Uvod

Promatramo slučajan pokus koji se sastoji od bacanja pravilne igraće kockice dva puta za redom. Znamo da je skup elementarnih događaja tada $\Omega = \{(i,j) : i,j \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$. Ako, nakon što bacimo kockicu dva puta, pomnožimo dobivene rezultate dobivamo neki realan broj. Na primjer, ako je nakon prvog bacanja pala brojka 5, a nakon drugog bacanja 6, množenjem tih rezultata dobivamo realan broj 30. Ako je pak pala osmica i u prvom i u drugom bacanju, množenjem dobivamo 64. Dakle, radi se o funkciji kojoj su vrijednosti realni brojevi, a koja ovisi o ishodu pojedinog slučajnog pokusa. Takvu funkciju nazivamo slučajnom varijablom. Skup svih vrijednosti slučajne varijable X nazivamo slika slučajne varijable i označavamo s $\mathcal{R}(X)$. S obzirom na sliku slučajne varijable, razlikujemo diskretne i neprekidne slučajne varijable. U nastavku će nas zanimati diskretne slučajne varijable te navodimo preciznu definiciju.

Definicija 1. *Neka je dan diskretan vjerojatnosni prostor* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. *Svaku funkciju* $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *zvat ćemo* ***diskretna slučajna varijabla***.

Uočimo da je slika diskretne slučajne varijable diskretan skup, odnosno konačan ili prebrojiv skup.

Slučajnu varijablu X prikazujemo u obliku tablice koju nazivamo **zakon razdiobe, tablica distribucije ili distribucija slučajne varijable** X:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix}.$$

U gornjem redu prethodne tablice nalaze se vrijednosti koje slučajna varijabla postiže, a u donjem vjerojatnosti s kojima se te vrijednosti postižu, odnosno

$$p_i = P\{X = x_i\},\ i \in I \subseteq \mathbb{N}.$$

Također, mora vrijediti da je

$$\sum_{i \in I} p_i = 1 \text{ te } 0 \leq p_i \leq 1, \text{ za sve } i \in I.$$

Kao što smo spomenuli, osim diskretne slučajne varijable, imamo i neprekidnu slučajnu varijablu. Slika neprekidne slučajne varijable je neprebrojiv skup, npr. skup $\mathbb{R}$.

Jedna od najvažnijih funkcija koju ćemo promatrati je **funkcija distribucije**, funkcija $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ koja nekom realnom broju x pridružuje vjerojatnost da realizacija neke slučajne varijable X bude manja ili jednaka tom broju ili preciznije zapisano, ako je X slučajna varijabla na Ω, tada je funkcija distribucije definirana s

$$F(x) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = P\{X \leq x\},\ x \in \mathbb{R}.$$

Navedimo preciznu definiciju funkcije distribucije diskretne slučajne varijable.

Definicija 2. *Neka je dana diskretna slučajna varijabla*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix},$$

tj. $\mathcal{R}(X) = \{x_i, i \in I\},\ I \subseteq \mathbb{N}$, *je dani skup vrijednosti slučajne varijable* X, *a* $(p_i, i \in I)$ *niz pripadnih vjerojatnosti za koji vrijedi:*

$$p_i = P\{X = x_i\} \geq 0, \quad \forall i \in I, \quad \sum_{i \in I} p_i = 1.$$

Za svaki $x \in \mathbb{R}$ ***funkcija distribucije diskretne slučajne varijable*** *definirana je s*

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{x_i \leq x} p_i.$$

Nerijetko se u pokusima radi s više različitih slučajnih varijabli. Na primjer, ako želimo na slučajan način odabrati određeni proizvod u trgovini, pri čemu su slučajne varijable cijena proizvoda, kvaliteta proizvoda, datum proizvodnje . . . , te ako promatramo distribuciju svake varijable posebno ne možemo dobiti potpunu informaciju o pojedinom proizvodu, stoga bi bilo korisno kada bismo poznavali veze između danih slučajnih varijabli. Na taj način dolazimo do pojma slučajnog vektora, matematičkog modela kojeg ćemo proučavati u idućem poglavlju. Kao što razlikujemo diskretnu i neprekidnu slučajnu varijablu, tako ćemo razlikovati diskretan i neprekidan slučajni vektor. U ovom završnom radu ćemo detaljnije obraditi diskretan slučajni vektor.

2 Slučajni vektor

Kao što smo već spomenuli u uvodnom dijelu, u ovom poglavlju definirat ćemo n-dimenzionalni slučajni vektor čija ćemo vjerojatnosna svojstva opisivati funkcijom distribucije. U ovome radu ćemo, zbog jednostavnosti, svojstva slučajnog vektora i tvrdnje vezane za njega iskazivati za dvodimenzionalni slučajni vektor, a poopćenje za n-dimenzionalni slučajni vektor se može pronaći u [7].

Definicija 3. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ *vjerojatnosni prostor pridružen slučajnom pokusu. Funkciju* $(X_1, \dots, X_n)\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ *koja svakom ishodu slučajnog pokusa pridružuje uređenu n-torku realnih brojeva* $(x_1, \dots, x_n)$ *zovemo* ***n-dimenzionalan slučajni vektor*** *ako vrijedi:*

$$\{X_1 \leq x_1\} \cap \dots \cap \{X_n \leq x_n\} \in \mathcal{F}$$

za svaki $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

Zbog preglednijeg zapisa uvodimo sljedeću oznaku:

$$\{X_1 \leq x_1\} \cap \dots \cap \{X_n \leq x_n\} = \{X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n\}.$$

Definicija 4. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ *vjerojatnosni prostor i* $(X_1, \dots, X_n)\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ *slučajni vektor. Funkciju* $F : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ *definiranu s*

$$F(x_1, \dots, x_n) = P\{X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n\}$$

zovemo ***funkcija distribucije slučajnog vektora*** $(X_1, \dots, X_n)$.

Dvodimenzionalni slučajni vektor označavat ćemo s (X, Y), a pripadna funkcija distribucije u tom je slučaju definirana s

$$F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}, \text{ za sve } x, y \in \mathbb{R}.$$

Pomoću funkcije distribucije slučajnog vektora opisujemo svojstva slučajnog vektora koja navodimo u sljedećem teoremu.

Teorem 1. (Svojstva funkcije distribucije dvodimenzionalnog slučajnog vektora) *Neka je dvodimenzionalan slučajni vektor* (X, Y) *zadan svojom funkcijom distribucije* F. *Tada vrijedi:*

1. *Za realne brojeva* x_1, x_2, y, *takve da je* $x_1 < x_2$, *vrijedi* $F(x_1, y) \leq F(x_2, y)$.

2. *Neka su* x, y_1, y_2 *realni brojevi. Ako je* $y_1 < y_2$, *onda je* $F(x, y_1) \leq F(x, y_2)$.

3. $$\lim_{x \to -\infty} F(x, y) = F(-\infty, y) = 0,$$
$$\lim_{y \to -\infty} F(x, y) = F(x, -\infty) = 0,$$
$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} = F(\infty, \infty) = 1.$$

4. Neprekidnost zdesna u svakoj varijabli:

$$\lim_{x\downarrow x_0} F(x, y_0) = \lim_{y\downarrow y_0} F(x_0, y) = F(x_0, y_0).$$

Dokaz.

1. $F(x_1, y)$ je vjerojatnost događaja $\{X \le x_1, Y \le y\}$, a $F(x_2, y)$ vjerojatnost događaja $\{X \le x_2, Y \le y\}$.
   Iz pretpostavke da je $x_1 < x_2$, slijedi $\{X \le x_1, Y \le y\} \subseteq \{X \le x_2, Y \le y\}$ te primjenom svojstva monotonosti vjerojatnosti slijedi tvrdnja.

2. Zaključuje se analogno kao u dokazu svojstva 1.

3. Događaj $\{X \le -\infty, Y \le y\} = \emptyset$ je nemoguć događaj.
   Također, $\{X \le x, Y \le -\infty\} = \emptyset$ je nemoguć događaj, a budući da je $P(\emptyset) = 0$ odmah slijede prve dvije tvrdnje.
   Nadalje, događaj $\{X \le \infty, Y \le \infty\} = \Omega$ je siguran događaj, a kako je $P(\Omega) = 1$ slijedi i posljednja tvrdnja.

4. Za $x > x_0$ je

$$\begin{aligned}
F(x, y_0) - F(x_0, y_0) &= P\{X \le x, Y \le y_0\} - P\{X \le x_0, Y \le y_0\} \\
&= P\big\{\{X \in \big\langle -\infty, x]\} \cap \{Y \le y_0\}\big\} - P\big\{\{X \in \big\langle -\infty, x_0]\} \cap \{Y \le y_0\}\big\} \\
&= P\big\{\{X \in \big\langle x_0, x]\} \cap \{Y \le y_0\}\big\}
\end{aligned}$$

   pa za monotono padajući niz $(a_n, n \in \mathbb{N})$, takav da $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, vrijedi

$$\begin{aligned}
\lim_{x\downarrow x_0} (F(x, y_0) - F(x_0, y_0)) &= \lim_{n\to\infty} P\big\{\{X \in \big\langle x_0, x_0 + a_n]\} \cap \{Y \le y_0\}\big\} \\
&= P\left\{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{X \in \big\langle x_0, x_0 + a_n]\} \cap \{Y \le y_0\}\right\} = P(\emptyset) = 0
\end{aligned}$$

   odakle slijedi tvrdnja.

Primjer 1. *Slučajan pokus sastoji se od dva uzastopna izvlačenja papirića, s vraćanjem, na kojemu se nalaze brojevi od 1 do 4. Neka je (X, Y) slučajan vektor pri čemu slučajna varijabla X predstavlja broj izvučenih parnih brojeva, a Y broj izvučenih neparnih brojeva prilikom dva izvlačenja. Odredimo funkciju distribucije slučajnog vektora (X, Y).*

Rješenje.
Skup svih mogućih ishoda je $\Omega = \{(i, j) : i, j \in \{1, 2, 3, 4\}\}$.
Slika slučajnog vektora (X, Y) je $\mathcal{R}(X, Y) = \{(0, 2), (1, 1), (2, 0)\}$, a pripadne vjerojatnosti su:
$p(0, 2) = P\{X = 0, Y = 2\} = 4/16 = 1/4$,
$p(1, 1) = P\{X = 1, Y = 1\} = 8/16 = 1/2$,

$p(2,0) = P\{X=2, Y=0\} = 4/16 = 1/4.$

Želimo odrediti funkciju distribucije pa uočimo da je:
za $(x,y) \in \big(\langle -\infty, 0\rangle \times \mathbb{R}\big) \cup \big(\mathbb{R} \times \langle -\infty, 0\rangle\big)$ je $P\{X \leq x, Y \leq y\} = 0$,
za $(x,y) \in [0,2\rangle \times [0,2\rangle$ je $P\{X \leq x, Y \leq y\} = P\{X=1, Y=1\} = 1/2$,
za $(x,y) \in [0,2\rangle \times [2,\infty\rangle$ je $P\{X \leq x, Y \leq y\} = P\{X=0, Y=2\} = 1/4$,
za $(x,y) \in [2,\infty\rangle \times [0,2\rangle$ je $P\{X \leq x, Y \leq y\} = P\{X=2, Y=0\} = 1/4$,
za $(x,y) \in [0,\infty\rangle \times [0,\infty\rangle$ je $P\{X \leq x, Y \leq y\} =$
$= P\{X=2, Y=0\} + P\{X=0, Y=2\} + P\{X=1, Y=1\} = 1.$

Zaključujemo da je funkcija distribucije slučajnog vektora (X,Y), $F : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$, definirana sa:

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in \big(\langle -\infty, 0\rangle \times \mathbb{R}\big) \cup \big(\mathbb{R} \times \langle -\infty, 0\rangle\big) \\ \frac{1}{2}, & (x,y) \in [0,2\rangle \times [0,2\rangle \\ \frac{1}{4}, & (x,y) \in [0,2\rangle \times [2,\infty\rangle \\ \frac{1}{4}, & (x,y) \in [2,\infty\rangle \times [0,2\rangle \\ 1, & (x,y) \in [0,\infty\rangle \times [0,\infty\rangle. \end{cases}$$

Kao što je spomenuto u uvodnom poglavlju, ovisno o slici, odnosno skupu svih vrijednosti slučajnog vektora (X,Y) razlikujemo diskretan i neprekidan slučajni vektor.
Diskretan slučajni vektor prima vrijednosti iz konačnog ili prebrojivog skupa, dok neprekidni dvodimenzionalni slučajni vektor prima vrijednosti u skupu $\mathbb{R}^2$ te njegova slika sadrži neki podskup iz $\mathbb{R}^2$. U idućem poglavlju ćemo pobliže objasniti diskretan slučajni vektor dok se više o neprekidnom slučajnom vektoru može pronaći u dodatnoj literaturi kao što je [1].

3 Diskretan slučajni vektor

U ovom poglavlju ćemo proučavati diskretan dvodimenzionalan slučajni vektor. Rekli smo da diskretan slučajni vektor prima vrijednosti iz konačnog ili prebrojivog skupa pa je slika slučajnog vektora (X, Y) dana s

$$\mathcal{R}(X,Y) = \{(x_i, y_j) : (i,j) \in I\},\ I \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

Ako slučajna varijabla X prima vrijednosti u skupu $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$, a slučajna varijabla Y u skupu $\{y_j : j \in \mathbb{N}\}$, razdiobu tj. distribuciju slučajnog vektora (X, Y) ćemo poznavati ukoliko su nam poznate vjerojatnosti:

$$p_{ij} = p(x_i, y_j) = P\{X = x_i, Y = y_j\},\ (i,j) \in I \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N},$$

pri čemu mora vrijediti:

- $p_{ij} \geq 0,$ za svaki $(i,j) \in I \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$
- $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1.$

Dakle, niz brojeva $(p_{ij}, i, j \in \mathbb{N})$ nazivamo **distribucija diskretnog slučajnog vektora**.

Funkcija distribucije diskretnog slučajnog vektora (X, Y), $F : \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$ dana je izrazom

$$F(x,y) = P\{X \leq x, Y \leq y\} = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} P\{X = x_i, Y = y_j\} = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} p_{ij}.$$

3.1 Tablica distribucije

Ako je slika dvodimenzionalnog slučajnog vektora (X, Y) jednaka
$\mathcal{R}(X,Y) = \{(x_i, y_j) : i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, m\}$, tada se distribucija tog vektora može prikazati u obliku sljedeće tablice:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_m
x_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_1, y_2)$	$p(x_1, y_3)$	$\cdots$	$p(x_1, y_m)$
x_2	$p(x_2, y_1)$	$p(x_2, y_2)$	$p(x_2, y_3)$	$\cdots$	$p(x_2, y_m)$
$\vdots$					
x_n	$p(x_n, y_1)$	$p(x_n, y_2)$	$p(x_n, y_3)$	$\cdots$	$p(x_n, y_m)$

Tablica 1: Tablica distribucije dvodimenzionalnog slučajnog vektora (X, Y) čija je slika jednaka $\mathcal{R}(X,Y) = \{(x_i, y_j) : i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, m\}$

Marginalne distribucije

Ako nam je poznata distribucija slučajnog vektora (X, Y), tada možemo na jednostavan način odrediti distribuciju svake njegove komponente, tj. slučajne varijable. Takve distribucije nazivamo **marginalne distribucije**.

Neka je (X,Y) diskretan slučajan vektor čija je slika jednaka

$$\mathcal{R}(X, Y) = \{(x_i, y_j) : i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Označimo

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}.$$

Tada je

$$p_i = P\{X = x_i\} = P\Big\{\bigcup_{j=1}^{m}\{X = x_i, Y = y_j\}\Big\} = \sum_{j=1}^{m} P\{X = x_i, Y = y_j\} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij},$$

$$q_j = P\{Y = y_j\} = P\Big\{\bigcup_{i=1}^{n}\{X = x_i, Y = y_j\}\Big\} = \sum_{i=1}^{n} P\{X = x_i, Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}.$$

Vidimo da p_i predstavlja sumu i-tog retka tablice distribucije slučajnog vektora (X, Y), a q_j sumu j-tog stupca tablice distribucije slučajnog vektora (X, Y). Dobivene vjerojatnosti upisujemo u margine tablice distribucije slučajnog vektora te se zato i zovu marginalne distribucije.

$X\backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_m	p_i
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1m}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2m}	p_2
$\vdots$					
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	p_{nm}	p_n
q_j	q_1	q_2	$\cdots$	q_m	1

Tablica 2: Tablica distribucije dvodimenzionalnog slučajnog vektora (X, Y) s marginalnim distribucijama

Dakle, iz Tablice 2 možemo iščitati marginalne distribucije slučajnih varijabli X i Y:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_m \end{pmatrix}.$$

Pokažimo sada na konkretnom primjeru kako iz tablice distribucije slučajnog vektora iščitavamo marginalne distribucije.

Primjer 2. *U kutiji se nalazi 30 kuglica, a na svakoj kuglici je napisan jedan od brojeva* $1, 2, 3, \ldots, 30$. *Nasumično izvlačimo jednu kuglicu. Neka slučajna varijabla X poprimi vrijednost 0, ako je broj na izvučenoj kuglici prost te vrijednost 1, ako broj na izvučenoj kuglici nije prost. Zatim, neka slučajna varijabla Y poprimi vrijednost 0, ako je broj na izvučenoj kuglici Fibonaccijev broj i vrijednost 1, ako broj nije Fibonaccijev. Odredimo distribuciju slučajnog vektora (X, Y) te marginalne distribucije varijabli X i Y.*

Rješenje.
Slika slučajnog vektora (X, Y) jednaka je $\mathcal{R}(X, Y) = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$. Prostih brojeva od 1 do 30 ima 10 i to su: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, dok Fibonaccijevih brojeva od 1 do 30 ima 7, a oni su: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21. Dakle, prostih brojeva, koji su ujedno i Fibonaccijevi, ima 4, složenih koji su Fibonaccijevi ima 3, prostih koji nisu Fibonaccijevi ima 6, a složenih koji nisu Fibonaccijevi ima 17. Prema prethodnom razmatranju pripadne vjerojatnosti realizacija slučajnog vektora su:

$$
\begin{aligned}
&P\{X = 0, Y = 0\} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15},\\
&P\{X = 0, Y = 1\} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5},\\
&P\{X = 1, Y = 0\} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10},\\
&P\{X = 1, Y = 1\} = \frac{17}{30}.
\end{aligned}
$$

Odredimo i marginalne distribucije slučajnog vektora (X, Y).

$$
\begin{aligned}
&p_1 = P\{X = 0, Y = 0\} + P\{X = 0, Y = 1\} = \frac{1}{3},\\
&p_2 = P\{X = 1, Y = 0\} + P\{X = 1, Y = 1\} = \frac{2}{3},\\
&q_1 = P\{X = 0, Y = 0\} + P\{X = 1, Y = 0\} = \frac{7}{30},\\
&q_2 = P\{X = 0, Y = 1\} + P\{X = 1, Y = 1\} = \frac{23}{30}.
\end{aligned}
$$

Sada možemo zapisati tablicu distribucije slučajnog vektora (X, Y) iz koje je lako iščitati marginalne distribucije:

$X\backslash Y$	0	1	p_i
0	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{10}$	$\frac{17}{30}$	$\frac{2}{3}$
q_i	$\frac{7}{30}$	$\frac{23}{30}$	1

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{7}{30} & \frac{23}{30} \end{pmatrix}.$$

3.2 Funkcije diskretnog slučajnog vektora

Neka je dan diskretan slučajan vektor (X, Y), pri čemu nam je poznata njegova distribucija, te neka je $\Psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija koja uređenom paru realnih brojeva pridružuje realan broj. Tada je sa $Z = \Psi(X, Y)$ definirana nova slučajna varijabla na Ω.
Ovo svojstvo slučajnog vektora ilustrirat ćemo na sljedećem primjeru.

Primjer 3. *Neka je zadana tablica distribucije diskretnog slučajnog vektora* (X, Y)

$X\backslash Y$	-1	0	1
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$

i neka je $\Psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *funkcija definirana sa* $\Psi(X, Y) = X - Y$. *Odredimo distribuciju slučajne varijable* $Z = \Psi(X, Y)$.

Rješenje.
Primjetimo da je slika slučajne varijable Z jednaka $\mathcal{R}(Z) = \{-1, 0, 1, 2\}$.
Izračunajmo sada pripadne vjerojatnosti.
$P\{Z = -1\} = P\{X = 0, Y = 1\} = 1/12$
$P\{Z = 0\} = P\{X = 0, Y = 0\} + P\{X = 1, Y = 1\} = 1/4 + 1/6 = 5/12$
$P\{Z = 1\} = P\{X = 0, Y = -1\} + P\{X = 1, Y = 0\} = 1/3 + 1/9 = 4/9$
$P\{Z = 2\} = P\{X = 1, Y = -1\} = 1/18$

Dakle, pripadne vjerojatnosti slučajne varijable Z računamo iz tablice distribucije slučajnog vektora (X, Y). Zapišimo još tablicu distribucije slučajne varijable Z:

$$Z = \begin{pmatrix} \text{-1} & 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{12} & \frac{5}{12} & \frac{4}{9} & \frac{1}{18} \end{pmatrix}.$$

3.3 Uvjetne distribucije

U svrhu rezultata koje ćemo promatrati u ovom poglavlju u nastavku najprije navodimo preciznu definiciju uvjetne vjerojatnosti.

Definicija 5. *Neka je dan vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ i događaj $B \in \mathcal{F}$ koji ima pozitivnu vjerojatnost, tj. $P(B) > 0$. Funkcija $P(\cdot \mid B)$ definirana na $\mathcal{F}$ izrazom*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},\ B \in \mathcal{F},$$

je ***uvjetna vjerojatnost uz uvjet da se dogodio događaj*** *B.*

Ako je $A = \{X = x_i\}$ i $B = \{Y = y_j\}$, tada je

$$P(A|B) = P\{X = x_i|Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}}.$$

Naime, ako imamo zadan slučajan vektor (X, Y) i zanima nas distribucija slučajne varijable X s obzirom na poznatu vrijednost komponente Y, tada ćemo zapravo računati uvjetne distribucije.

Definicija 6. *Neka je (X, Y) diskretan slučajan vektor te neka je poznata njegova slika $\mathcal{R}(X, Y) = \{(x_i, y_j) : i, j \in \mathbb{N}\}$ i pripadne vjerojatnosti $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}, i, j \in \mathbb{N}$.* ***Uvjetna distribucija*** *komponente X uz uvjet $Y = y_j$ dana je sljedećom tablicom:*

$$X|_{Y=y_j} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots \\ p_1|_{Y=y_j} & p_2|_{Y=y_j} & \cdots \end{pmatrix},$$

gdje je,

$$p_i|_{Y=y_j} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}} = \frac{p_{ij}}{q_j},\ i \in \mathbb{N}.$$

Napomena 1. *Pokažimo da je s tablicom iz prethodne definicije dobro definirana tablica distribucije, tj. da vrijedi:*

- $p_i|_{Y=y_j} \geq 0,$ *za svaki* $i \in \mathbb{N}$.
- $\sum_i p_i|_{Y=y_j} = 1$.

Dakle, $p_i|_{Y=y_j} = \frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}} \geq 0$, *za svaki* $i \in \mathbb{N}$ *i to vrijedi uvijek, budući da u brojniku imamo vjerojatnosti koje su uvijek nenegativni brojevi dok je u nazivniku vjerojatnost koja mora biti strogo pozitivan broj jer iz danog uvjeta slijedi da je skup* $\{Y = y_j\}$ *neprazan. Raspišimo sada drugu tvrdnju.*

$$\sum_i p_i|_{Y=y_j} = \sum_i \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}} = \frac{1}{P\{Y = y_j\}} \sum_i P\{X = x_i, Y = y_j\}$$
$$= \frac{1}{P\{Y = y_j\}} P\{Y = y_j\} = 1.$$

Primjer 4. *Izvodimo slučajan pokus koji se sastoji od bacanja simetrične igraće kockice. Slučajna varijabla* X *poprima vrijednost 0 ako je pao paran broj, a vrijednost 1 ako je pao neparan broj. Slučajna varijabla* Y *poprima vrijednost 0 ako je pao broj manji ili jednak 3, a vrijednost 1 ako je pao broj veći od 3. Zanima nas distribucija slučajne varijable* X *uz uvjet da je* $Y = 1$.

Rješenje.
Slika slučajnog vektora (X, Y) jednaka je $\mathcal{R}(X, Y) = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$. Jedini paran broj koji je manji ili jednak tri je 2, a parni brojevi koji su veći od tri su 4 i 6. Neparni brojevi koji su manji ili jednaki tri su 1 i 3, a 5 je jedini neparan broj koji je veći od tri. Prema tome pripadne vjerojatnosti su:
$P\{X = 0, Y = 0\} = 1/6$,
$P\{X = 0, Y = 1\} = 1/3$,
$P\{X = 1, Y = 0\} = 1/3$,
$P\{X = 1, Y = 1\} = 1/6$.
Zapišimo sada tablicu distribucije slučajnog vektora (X, Y):

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Trebat će nam još i vjerojatnost da je pao broj veći od 3, pa primjetimo da je to ostvareno ako je broj koji je pao jednak 4, 5 ili 6, dakle od 6 mogućih realizacija pokusa, u 3 je ostvareno da je pao broj manji od 3 pa je $P\{Y = 1\} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Sada računamo uvjetne vjerojatnosti pri čemu je dani uvjet $Y = 1$:

$$P(X = 0|Y = 1) = \frac{P\{X = 0, Y = 1\}}{P\{Y = 1\}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3},$$

$$P(X=1|Y=1)=\frac{P\{X=1,Y=1\}}{P\{Y=1\}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}.$$

Konačno, uvjetna distribucija slučajne varijable X uz uvjet $Y=1$ jednaka je:

$$X|_{Y=1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Primjetimo da se tražena uvjetna distribucija može iščitati iz drugog stupca tablice distribucije slučajnog vektora (X,Y) pri čemu su elementi tog stupca podijeljeni s odgovarajućom vjerojatnosti, u ovom slučaju s vjerojatnosti da je pao broj veći od 3, tj. sa $\frac{1}{2}$.

3.4 Nezavisnost

Nezavisnost je jako važan pojam u teoriji vjerojatnosti. Znamo da su dva događaja $A,B\in\mathcal{F}$ nezavisna ako vrijedi $P(A\cap B)=P(A)P(B)$. Nezavisnost diskretnih slučajnih varijabli ćemo definirati pomoću nezavisnosti događaja. No prije same definicije, kao motivaciju, promotrimo sljedeći primjer.

Primjer 5. *Neka se slučajan pokus sastoji od bacanja simetrične kockice dva puta za redom. Slučajna varijabla X predstavlja broj koji je pao nakon prvog bacanja, a slučajna varijabla Y broj koji je pao nakon drugog bacanja. Naslućujemo da u ovome pokusu rezultat drugog bacanja ne ovisi o rezultatu prvog bacanja. Primjetimo da vrijedi*

$$P\{X=1,Y=6\}=\frac{1}{36}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=P\{X=1\}\cdot P\{Y=6\}.$$

To nas dovodi do sljedeće definicije.

Definicija 7. *Za diskretne slučajne varijable X i Y definirane na istom diskretnom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)$ kažemo da su **nezavisne** ako za sve skupove $A\subseteq\mathbb{R}$ i $B\subseteq\mathbb{R}$ vrijedi*

$$P\{X\in A,Y\in B\}=P\{X\in A\}\cdot P\{Y\in B\}.$$

Sljedeći teorem pomoći će nam pri ispitivanju nezavisnosti slučajnih varijabli u konkretnim primjerima.

Teorem 2. *Neka je (X,Y) diskretan slučajan vektor sa zadanom slikom $\mathcal{R}(X,Y)=\{(x_i,y_j): i,j\in\mathbb{N}\}$ i pripadnim vjerojatnostima $p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_j\}$, za svaki $i,j\in\mathbb{N}$ te neka je $p_i=P\{X=x_i\}$ i $q_j=P\{Y=y_j\}$, za $i,j\in\mathbb{N}$. Slučajne varijable X i Y su nezavisne ako i samo ako vrijedi*

$$p_{ij}=p_i\cdot q_j,\ \text{za sve } i,j\in\mathbb{N}.$$

Dokaz:

Pretpostavimo da su X i Y nezavisne slučajne varijable. Prema definiciji je onda

$P\{X \in A, Y \in B\} = P\{X \in A\} \cdot P\{Y \in B\}$, za svaka dva skupa $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Odaberimo $A = \{x_i\}$ i $B = \{y_j\}$. Tada je

$$\begin{aligned} p_{ij} &= P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X \in \{x_i\}, Y \in \{y_j\}\} \\ &= P\{X \in A, Y \in B\} = P\{X \in A\} \cdot P\{Y \in B\} \\ &= P\{X \in \{x_i\}\} \cdot P\{Y \in \{y_j\}\} \\ &= P\{X = x_i\} \cdot \{Y = y_j\} = p_i \cdot q_j. \end{aligned}$$

Obratno, pretpostavimo da je $p_{ij} = p_i \cdot q_j$, za sve $i, j \in \mathbb{N}$. Nadalje, neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}$ proizvoljni skupovi. Tada je

$$\begin{aligned} P\{X \in A, Y \in B\} &= \sum_{x_i \in A} \sum_{y_j \in B} p_{ij} \\ &= \sum_{x_i \in A} \sum_{y_j \in B} p_i \cdot q_j \\ &= \sum_{x_i \in A} p_i \cdot \sum_{y_j \in B} q_j \\ &= \sum_{x_i \in A} P\{X = x_i\} \cdot \sum_{y_j \in B} P\{Y = y_j\} \\ &= P\{X \in A\} \cdot P\{Y \in B\}. \end{aligned}$$

Prema definiciji slijedi da su X i Y nezavisne slučajne varijable.

Primjer 6. *Zadan je slučajan vektor (X, Y) na sljedeći način:*

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = \begin{cases} \lambda(3x_i + y_j) & , \ x_i = 1, 2, 3, \ y_j = 1, 2, 3 \\ 0 & , \ \textit{inače.} \end{cases}$$

Odredite vrijednost konstante λ te provjerite jesu li slučajne varijable X i Y nezavisne.

Rješenje.
Zapišimo najprije tablicu distribucije slučajnog vektora.

$X \backslash Y$	1	2	3	
1	4λ	5λ	6λ	15λ
2	7λ	8λ	9λ	24λ
3	10λ	11λ	12λ	33λ
	21λ	24λ	27λ	1

Iz zadnjeg retka možemo izračunati kolika je vrijednost konstante λ, budući da elementi zadnjeg retka u sumi moraju dati 1. Dakle, imamo: $21\lambda + 24\lambda + 27\lambda = 1$, tj. $72\lambda = 1$, odakle slijedi da je $\lambda = \dfrac{1}{72}$.

Sada možemo zapisati marginalne distribucije slučajnih varijabli X i Y da bismo lakše mogli provjeriti njihovu nezavisnost:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5/24 & 1/3 & 11/24 \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7/24 & 1/3 & 3/8 \end{pmatrix}.$$

Da bi slučajne varijable bile nezavisne, za svaki x_i, y_j mora vrijediti:

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\}.$$

Provjerimo prvo slučaj kada je $X = 1$ i $Y = 1$. Dakle, imamo:
$P\{X = 1, Y = 1\} = 1/18$,
$P\{X = 1\} \cdot P\{Y = 1\} = 5/24 \cdot 7/24 = 35/576$.
Vidimo da je $P\{X = 1, Y = 1\} \neq P\{X = 1\} \cdot P\{Y = 1\}$ pa zaključujemo da slučajne varijable X i Y nisu nezavisne. Da je jednakost vrijedila, morali bismo provjeravati i dalje za ostale slučajeve.
U ovome primjeru to ne bi bio problem jer slučajne varijable poprimaju samo po tri vrijednosti, no kada se radi o varijablama koje poprimaju po deset i više vrijednosti to je već znatno duži postupak. Naravno, postoje i drugi kriteriji za ispitivanje nezavisnosti slučajnih varijabli koje ćemo navesti dalje u tekstu. Jedan od kriterija izreći ćemo u idućem teoremu koji nam daje vezu između nezavisnosti i očekivanja slučajnih varijabli.

Znamo da je očekivanje jedna od najvažnijih numeričkih karakteristika slučajnih varijabli te da za diskretnu slučajnu varijablu vrijedi:

$$EX = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\omega) = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i p_i,$$

(vidi [1, str. 86]) što je rezultat koji će nam biti potreban u nastavku.

Teorem 3. *Neka su X i Y nezavisne slučajne varijable takve da postoji EX i EX. Tada postoji $E[X \cdot Y]$ i vrijedi:*

$$E[X \cdot Y] = EX \cdot EY.$$

Dokaz:
Pretpostavimo da su X i Y nezavisne slučajne varijable te da postoje EX i EY.
Tada je

$$E[X \cdot Y] = \sum_{i,j \in \mathbb{N}} x_i y_j p_{ij} = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} x_i y_j p_i q_j = \sum_i x_i p_i \sum_j y_j q_j = EX \cdot EY.$$

Primjer 7. *Promatramo slučajan pokus koji se izvodi tako da osoba zamisli dva broja od 1 do 10, a onda druga osoba pogađa jesu li zamišljeni brojevi parni ili neparni. Slučajna varijabla X poprima vrijednost 0 ako je prvi broj paran, a vrijednost 1 ako je prvi broj neparan. Slučajna varijabla Y poprima vrijednost 0 ako je drugi broj paran, a vrijednost 1 ako je drugi broj neparan. Provjerimo jesu li slučajne varijable X i Y nezavisne.*

Rješenje.
Očito je

$$\mathcal{R}(X,Y) = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\},$$
$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = \frac{1}{4}, \text{ za svaki } (x_i, y_j) \in \mathcal{R}(X,Y).$$

Distribucija slučajnog vektora (X,Y) dana je tablicom:

$X \backslash Y$	0	1	
0	1/4	1/4	1/2
1	1/4	1/4	1/2
	1/2	1/2	1

Iz prethodne je tablice lako zaključiti da su slučajne varijable X i Y nezavisne budući da je $P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\}$, za svaki $(x_i, y_j) \in \mathcal{R}(X,Y)$.

U sljedećoj napomeni uočit ćemo jednu bitnu posljedicu nezavisnosti.

Napomena 2. *Ako su X i Y nezavisne slučajne varijable, onda su uvjetne distribucije slučajne varijable X, uz uvjet $Y = y_j$, jednake za svaki $y_j \in \mathcal{R}(Y)$.*
Dakle, ako su komponente slučajnog vektora (X,Y) nezavisne, onda je:

$$P\{X = x_i|_{Y=y_j}\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}} = \frac{P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}} = P\{X = x_i\}.$$

Tada za uvjetnu distribuciju od X, uz uvjet $Y = y_j$, $y_j \in \mathcal{R}(Y)$, kažemo da je jednako distribuirana kao slučajna varijabla X i pišemo:

$$X|_{Y=y_j} \overset{D}{=} X.$$

Analogno vrijedi i za uvjetnu distribuciju od Y, uz uvjet $X = x_i$, $x_i \in \mathcal{R}(X)$.

3.5 Numeričke karakteristike slučajnog vektora

Kao i slučajne varijable, tako se i slučajni vektori najlakše opisuju pomoću svojih numeričkih karakteristika. Stoga ćemo u nastavku definirati bitne numeričke karakteristike slučajnog vektora kao što su momenti, kovarijanca i koeficijent korelacije.

Definicija 8. *Neka je* $Z = (X, Y)$ *slučajan vektor na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$*. Ukoliko postoji očekivanje slučajnih varijabli* X *i* Y*, tj. ukoliko je* $EX < +\infty$ *i* $EY < +\infty$*, kažemo da postoji* ***očekivanje slučajnog vektora*** Z *i pišemo:*

$$EZ = \begin{bmatrix} EX \\ EY \end{bmatrix}.$$

Definicija 9. *Neka je* (X, Y) *diskretan slučajan vektor. Očekivanje* $E[X^k Y^l], k, l \in \mathbb{N}_0$*, slučajne varijable* $(X^k Y^l)$ *(ukoliko ono postoji) nazivamo* ***ishodišni moment reda (k,l)*** *slučajnog vektora* (X, Y) *i pišemo*

$$\mu_{kl} = E[X^k Y^l].$$

Očekivanje $E[(X - EX)^k (Y - EY)^l]$ *(ukoliko ono postoji) nazivamo* ***centralni moment reda (k,l)*** *slučajnog vektora* (X, Y) *i pišemo*

$$m_{kl} = E[(X - EX)^k (Y - EY)^l].$$

Napomena 3. *Ako je* (X, Y) *slučajan vektor, primjetimo da tada vrijedi:*

- *ishodišni moment reda (1,0) jednak je očekivanju slučajne varijable* X*, tj.* $\mu_{10} = EX$
- *ishodišni moment reda (0,1) jednak je očekivanju slučajne varijable* Y*, tj.* $\mu_{01} = EY$
- *centralni moment reda (2,0) jednak je varijanci slučajne varijable* X*, tj.*

$$m_{20} = E[X - EX]^2 = VarX$$

- *centralni moment reda (0,2) jednak je varijanci slučajne varijable* Y*, tj.*

$$m_{02} = E[Y - EY]^2 = VarY$$

Jedan od najvažnijih momenata slučajnog vektora je centralni moment reda (1,1), tj. **kovarijanca** ili **korelacijski moment**. Označavamo ga s:

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E[(X - EX)(Y - EY)].$$

Napomena 4. *Često ćemo kovarijancu računati na sljedeći način:*

$$\begin{aligned} Cov(X, Y) &= E[(X - EX)(Y - EY)] = E[XY - XEY - YEX + EXEY] \\ &= E[XY] - EXEY. \end{aligned}$$

U idućem teoremu ćemo navesti još jedan kriterij za ispitivanje nezavisnosti slučajnih varijabli.

Teorem 4. *Neka je (X, Y) diskretan slučajan vektor za koji postoje EX i EY. Ako su slučajne varijable X i Y nezavisne, onda je Cov(X,Y)=0.*

Dokaz:
Kako su X i Y nezavisne vrijedi $E[XY] = EXEY$.
Nadalje, $\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - EXEY = EXEY - EXEY = 0$.

Napomena 5. *Neka je (X, Y) slučajan vektor i neka je Cov$(X, Y) \neq 0$. Tada su komponente X i Y nužno zavisne. Važno je uočiti da općenito obrat prethodnog teorema ne vrijedi.*

Primjer 8. *Distribucija disketnog slučajnog vektora zadana je tablicom:*

$X\backslash Y$	-1	0	1	2
0	0.21	0.28	0.14	0.07
1	0.06	0.08	0.04	0.02
2	0.03	0.04	0.02	0.01

Izračunajte kovarijancu slučajnog vektora (X, Y) i provjerite jesu li slučajne varijable X i Y nezavisne.

Rješenje.
Želimo izračunati $\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - EXEY$. Izračunajmo prvo iz tablice distribucije slučajnog vektora marginalne distribucije komponenti vektora.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.7 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} \text{-1} & 0 & 1 & 2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

$$EX = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i = 0 \cdot 0.7 + 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.1 = 0.4$$

$$EY = \sum_{j=1}^{3} y_j q_j = -1 \cdot 0.3 + 0 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.1 = 0.1$$

Još trebamo izračunati $E[XY]$, pa primjetimo da je XY nova slučajna varijabla čija je slika jednaka $\mathcal{R}(XY) = \{-2, -1, 0, 1, 2, 4\}$.
Sada je:
$P(XY = -2) = P(X = 2, Y = -1) = 0.03$,

$P(XY = -1) = P(X = 1, Y = -1) = 0.06$, itd.
Tablica distribucije slučajne varijable XY jednaka je:

$$XY = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0.03 & 0.06 & 0.82 & 0.04 & 0.04 & 0.01 \end{pmatrix},$$

a $E[XY] = 0.04$.

Konačno, $\text{Cov}(X, Y) = 0.04 - 0.4 \cdot 0.1 = 0$.

Uočimo da su u ovom primjeru X i Y nezavisne slučajne varijable jer vrijedi da je $P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\}$, za svaki i, j.
Dakle, u ovom slučaju vrijedi obrat prethodnog teorema, no kao što smo rekli obrat općenito ne vrijedi tako da je ovaj primjer iznimka.

Definicija 10. *Neka je (X, Y) slučajan vektor takav da vrijedi $Cov(X, Y) = 0$. Tada kažemo da su njegove komponente **nekorelirane**.*

Očito vrijedi da nezavisnost komponenti slučajnog vektora povlači njihovu nekoreliranost, no obrat tvrdnje općenito ne vrijedi.

Prisjetimo se da ako je X slučajna varijabla koja ima varijancu tada je standardna devijacija slučajne varijable X jednaka drugom korijenu iz varijance od X, tj. $\sigma_X = \sqrt{VarX}$.
Ako su X i Y slučajne varijable koje imaju varijancu, tj. postoje σ_X^2 i σ_Y^2 onda možemo promatrati standardizirane slučajne varijable:

$$X_S = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \quad \text{i} \quad Y_S = \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y},$$

(gdje je $\mu_X = EX, \mu_Y = EY$) tj. slučajan vektor (X_S, Y_S).
Njegova kovarijanca jednaka je:

$$\text{Cov}(X_S, Y_S) = \frac{1}{\sigma_X\sigma_Y}E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] - \frac{1}{\sigma_X\sigma_Y}E[X-\mu_X]E[Y-\mu_Y] = \frac{1}{\sigma_X\sigma_Y}\text{Cov}(X, Y),$$

pri čemu je $E[X - \mu_X] = E[Y - \mu_Y] = 0$ jer smo standardizirali varijable.

Time smo dobili **koeficijent korelacije** slučajnog vektora kojeg označavamo s

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X\sigma_Y}.$$

Koeficijent korelacije nam daje informaciju o međusobnoj ovisnosti slučajnih varijabli X i Y. Znamo da ako su slučajne varijable X i Y nezavisne tada je $\text{Cov}(X, Y) = 0$ što povlači da je onda i $\rho_{X,Y} = 0$. Općenito ne vrijedi obrat.

Primjer 9. *Slučajni pokus sastoji se od izvlačenja dvije karte iz svežnja od 32 igraće karte pri čemu izvučene karte ponovo vraćamo u špil. Slučajna varijabla X označava broj izvučenih* *dama, a slučajna varijabla Y broj izvučenih srca. Odredite jesu li komponente slučajnog vektora (X, Y) nezavisne, koeficijent korelacije te uvjetnu distribuciju komponente X uz uvjet $Y = 2$.*

Rješenje.
Vidimo da je

$$\mathcal{R}(X) = \{0, 1, 2\},\ \mathcal{R}(Y) = \{0, 1, 2\},$$

$$\mathcal{R}(X, Y) = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\}.$$

Pripadne vjerojatnosti računamo pomoću klasične definicije vjerojatnosti pa je tako
$P\{X = 0, Y = 0\} = \frac{21}{32} \cdot \frac{21}{32} = \left(\frac{21}{32}\right)^2$,

$P\{X = 1, Y = 1\} = 2 \cdot \frac{7}{32} \cdot \frac{21}{32} = \frac{294}{32^2}$, itd.

Dakle, tablica distribucije slučajnog vektora (X, Y) s marginalnim distribucijama jednaka je

$X \backslash Y$	0	1	2	
0	$\left(\frac{21}{32}\right)^2$	$\frac{294}{32^2}$	$\frac{49}{32^2}$	$\frac{49}{64}$
1	$\frac{126}{32^2}$	$\frac{84}{32^2}$	$\frac{14}{32^2}$	$\frac{7}{32}$
2	$\frac{9}{32^2}$	$\frac{6}{32^2}$	$\frac{1}{32^2}$	$\frac{1}{64}$
	$\frac{9}{16}$	$\frac{12}{32}$	$\frac{2}{32}$	1

Provjerimo sada nezavisnost komponenti slučajnog vektora (X, Y).

$$\begin{aligned} P\{X = 0, Y = 0\} &= \left(\frac{21}{32}\right)^2 = \frac{441}{1024} = \frac{49}{64} \cdot \frac{9}{16} \\ &= P\{X = 0\} \cdot P\{Y = 0\}. \end{aligned}$$

Daljnjom provjerom vidimo da vrijedi $P\{X = i, Y = j\} = P\{X = i\}P\{Y = j\}$, za $i, j = 0, 1, 2$, što znači da su komponente slučajnog vektora (X, Y) nezavisne.

Nadalje, budući da su komponente slučajnog vektora nezavisne prema Teoremu 4. slijedi

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0.$$

Na kraju, odredimo uvjetnu distribuciju komponente X uz uvjet $Y = 2$. Dakle, zanima nas $X|_{Y=2}$. No, ako se sjetimo Napomene 2. zaključujemo da zbog nezavisnosti komponenti X i Y vrijedi

$$X|_{Y=2} \stackrel{D}{=} X,$$

pa je

$$X|_{Y=2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 49/64 & 7/32 & 1/64 \end{pmatrix}.$$

Teorem 5. *Neka je (X, Y) slučajan vektor za koji je $0 < E[X^2] < \infty$ i $0 < E[Y^2] < \infty$. Tada postoji kovarijanca i vrijede nejednakosti:*

$$|\rho_{X,Y}| \leq 1,$$

$$(E[XY])^2 \leq E[X^2]E[Y^2].$$

Prethodni teorem nam zapravo govori koji su to uvjeti dovoljni za postojanje kovarijance slučajnog vektora te da je koeficijent korelacije slučajnog vektora uvijek element segmenta $[-1, 1]$. Dokaz teorema čitatelj može pronaći u knjizi [1, str. 157].
Sljedeći teorem nam govori da vezu između komponenata slučajnog vektora možemo ispitivati pomoću koeficijenta korelacije tog slučajnog vektora.

Teorem 6. *Neka je (X, Y) slučajni vektor za koji je $0 < \sigma_X < \infty$ i $0 < \sigma_Y < \infty$. Veza među njegovim komponentama je linearna, tj. postoje realni brojevi $a \neq 0$ i b takvi da je*

$$Y = aX + b$$

ako i samo ako je $|\rho_{X,Y}| = 1$. Pritom je koeficijent korelacije 1 ako je $a > 0$, odnosno -1 ako je $a < 0$.

Dokaz:
Neka je (X, Y) slučajni vektor i neka je veza među njegovim komponentama linearna, tj. $Y = aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Iz pretpostavki teorema postoji kovarijanca i vrijedi:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E[(X - EX)(Y - EY)] = E[(X - EX)\big((aX + b) - E[aX + b]\big)] \\ &= E[(X - EX)(aX + b - aEX - b)] = aE[X - EX]^2 \\ &= a\text{Var}X = a\sigma_X^2. \end{aligned}$$

Nadalje,

$$\text{Var}Y = \text{Var}(aX + b) = a^2\text{Var}X \text{ pa je } \sigma_Y = |a|\sigma_X.$$

Konačno je

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{a\sigma_X^2}{\sigma_X |a| \sigma_X} = \frac{a}{|a|}.$$

Ako je $a > 0$ tada je $\rho_{X,Y} = 1$, a ako je $a < 0$ tada je $\rho_{X,Y} = -1$.

Obratno, pretpostavimo da je $\rho_{X,Y} = 1$. Definiramo pomoćnu slučajnu varijablu

$$Z = \frac{1}{\sigma_X}X - \frac{1}{\sigma_Y}Y.$$

Tada je

$$
\begin{aligned}
\text{Var}Z &= E[Z-EZ]^2 = E\Big[\frac{1}{\sigma_X}X - \frac{1}{\sigma_Y}Y - \frac{1}{\sigma_X}EX + \frac{1}{\sigma_Y}EY\Big]^2 \\
&= E\Big[\frac{1}{\sigma_X}(X-EX) - \frac{1}{\sigma_Y}(Y-EY)\Big]^2 \\
&= \frac{1}{\sigma_X^2}E[X-EX]^2 - \frac{2}{\sigma_X\sigma_Y}E[(X-EX)(Y-EY)] + \frac{1}{\sigma_Y^2}E[Y-EY]^2 \\
&= \frac{1}{\text{Var}X}\text{Var}X - 2\cdot\rho_{X,Y} + \frac{1}{\text{Var}Y}\text{Var}Y = 1 - 2\cdot 1 + 1 = 0.
\end{aligned}
$$

Dakle, zaključujemo da je slučajna varijabla Z konstanta, $Z = c$ i vrijedi:

$$c = \frac{1}{\sigma_X}X - \frac{1}{\sigma_Y}Y,$$

odakle je

$$Y = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}X - \sigma_Y c,$$

čime je pokazano da je veza među komponentama X i Y linearna.
Ako pretpostavimo da je $\rho_{X,Y} = -1$, na analogan način se pokaže da je veza među komponentama X i Y linearna kada uzmemo pomoćnu slučajnu varijablu $Z = \dfrac{1}{\sigma_X}X + \dfrac{1}{\sigma_Y}Y$.

Na početku poglavlja, definirali smo očekivanje slučajnog vektora $Z = (X,Y)$ i zapisali smo ga u matričnom obliku. Dakle, za slučajni vektor $Z = [X,Y]^\tau$ je $EZ = [EX, EY]^\tau$. Promotrimo sljedeću matricu:

$$\mathbf{Cov}(X,Y) = \begin{bmatrix} \text{Cov}(X,X) & \text{Cov}(X,Y) \\ \text{Cov}(X,Y) & \text{Cov}(Y,Y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Var}X & \text{Cov}(X,Y) \\ \text{Cov}(X,Y) & \text{Var}Y \end{bmatrix}.$$

Tu matricu nazivamo **matrica kovarijanci** slučajnog vektora (X,Y) i ona je simetrična i pozitivno semidefinitna.

Literatura

[1] M. Benšić, N. Šuvak, Uvod u vjerojatnost i statistiku, Odjel za matematiku, Osijek, 2013.

[2] N. Elezović, Diskretna vjerojatnost, Element, Zagreb, 2007.

[3] N. Elezović, Slučajne varijable, Element, Zagreb, 2007.

[4] N. Elezović, Teorija vjerojatnosti, Zbirka zadataka, Element, Zagreb, 1995.

[5] M. Ilijašević, Ž. Pauše, Riješeni zadaci iz vjerojatnosti i statistike, "Zagreb" poduzeće za grafičku djelatnost, Zagreb, 1990.

[6] J. Mališić, Zbirka zadataka iz teorije verovatnoće sa primenama, Građevinska knjiga, Beograd, 1989.

[7] N. Sarapa, Teorija vjerojatnosti, Školska knjiga, Zagreb, 1988.