Bertrandove krivulje

Prljević, Ema

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike

Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Bertrandove krivulje

Završni rad

Mentor:
doc. dr. sc. Ljiljana Primorac Gajčić

Student:
Ema Prljević

Osijek, 2024

Sadržaj

1 | Uvod

Svrha ovoga rada je definirati i detaljnije analizirati Bertrandove krivulje. Bertrandove krivulje su krivulje s kolineaarnim glavnim normalama, a dobile su ime po francuskom matematičaru Josephu Bertrandu. Bertrand je radio na više područja kao što su teorija brojeva, diferencijalna geometrija, teorija vjerojatnosti, ekonomija i termodinamika, pa osim Bertrandovih krivulja uz njega se vežu i Bertrandov paradoks te Bertrandov model u ekonomiji. Rad se sastoji od dva poglavlja. U prvom poglavlju navest ćemo osnovne pojmove, te propozicije i teoreme vezane uz krivulje, koji će se kasnije koristiti. Definirat ćemo krivulju, objasniti što je regularna krivulja, a što dopustiva krivulja. Nadalje, vidjet ćemo da krivulja osim općim parametrom, može biti parametrizirana i duljinom luka. Nakon tih definicija, moći ćemo definirati zakrivljenost i torziju krivulje te zapisati njihove formule kada je krivulja parametrizirana općim parametrom. Spomenut ćemo još i Frenetove formule, za potrebu kojih ćemo upoznati jedinično tangencijalno polje, polje vektora glavnih normala te polje binormala, koja zajedno čine Frenetov trobrid. U drugom poglavlju upoznat ćemo se s glavnom temom ovoga rada, a to su Bertrandove krivulje. Na početku ćemo definirati što su Bertrandove krivulje, a što Bertrandov par krivulje. Nakon toga predstavit ćemo određena svojstva Bertrandovih krivulja te navesti nekoliko primjera koji prate predstavljenu teoriju. Odgovarajuće slike su izrađene pomoću programa Wolfram Mathematica.

2 | Osnovni pojmovi lokalne teorije krivulje u $\mathbb{R}^3$

U ovome poglavlju upoznat ćemo se s osnovnim pojmovima vezanim uz krivulje kako bismo kasnije lakše razumjeli što su Bertrandove krivulje. Za početak ćemo se upoznati sa samom definicijom krivulje, a onda i sa ostalim njenim svojstvima. Definicije su preuzete iz [1] i [2].

Definicija 1. *Krivulja (parametrizirana krivulja) c u $\mathbb{R}^n$ je glatko preslikavanje s otvorenog intervala $I = \langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$ u $\mathbb{R}^n$*

$$c\colon I \to \mathbb{R}^n.$$

Krivulju $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ možemo zapisati pomoću:

- vektorske jednadžbe
$$c(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$
- parametarske jednadžbe
$$x = x(t), y = y(t), z = z(t),$$

dok njezine derivacije zapisujemo na sljedeći način:

$$\frac{dc}{dt}(t) = \dot{c}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)),$$

$$\frac{d^2c}{dt^2}(t) = \ddot{c}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)), \text{ itd.}$$

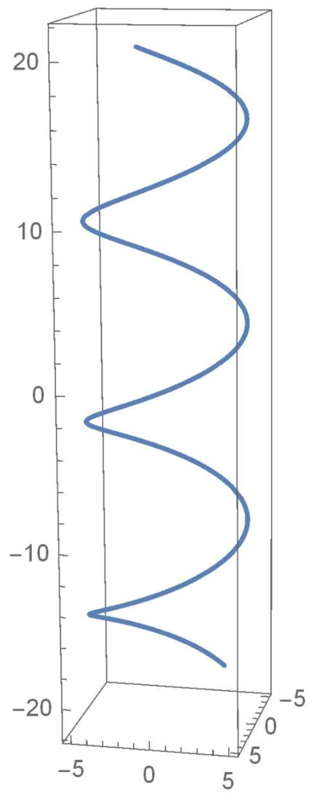
Kako bismo si lakše vizualizirali i razumjeli što u diferencijalnoj geometriji zovemo krivuljom, možemo zamisliti česticu koja se giba u prostoru $\mathbb{R}^3$ i u vremenu t, a put koji prijeđe čestica prilikom gibanja zapravo je slika krivulje c, oznaka $c(I)$.

Definicija 2. *Slika parametrizirane krivulje $c\colon I \to \mathbb{R}^n$ je skup $c(I) \subseteq \mathbb{R}^n$.*

Navest ćemo par primjera najpoznatijih krivulja, onih s kojima se najčešće susrećemo:

- pravac $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ parametriziran s $c(t) = a + bt,\ a, b \in \mathbb{R}^n$,
- kružnica $c\colon \langle 0, 2\pi\rangle \to \mathbb{R}^2$ parametrizacije $c(t) = (p + r\cos t, q + r\sin t)$, sa središtem u točki (p, q) i polumjerom r,

- parabola $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ parametrizacije $c(t) = (t, t^2)$,
- opća cilindrična spirala $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ parametrizacije $c(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$.



Slika 2.1: Grafički prikaz spirale $c(t) = (5\cos t, 5\sin t, 2t)$

Sljedeći važan pojam koji se pojavljuje u mnogim nadolazećim definicijama je pojam regularne krivulje. Razjasnit ćemo razliku između regularne i singularne krivulje.

Definicija 3. *Krivulju $c\colon I \to \mathbb{R}^n$ nazivamo regularnom krivuljom, ako je $\dot{c}(t) \neq 0$, za svaki $t \in I$. Krivulju za koju je $\dot{c}(t) = 0$, $t \in I$, nazivamo singularnom.*

Definicija 4. *Krivulju $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ nazivamo dopustivom ako su polja duž krivulje $\{\dot{c}, \ddot{c}\}$ linearno nezavisna.*

U prethodnim definicijama smatrali smo da je krivulja parametrizirana općim parametrom, a sada ćemo vidjeti kako postoji još jedan način na koji regularna krivulja može biti parametrizirana, odonosno definirat ćemo parametrizaciju duljinom luka.

Definicija 5. *Neka je $c\colon I \to \mathbb{R}^n$ regularna krivulja. Tada vektor $\dot{c}(t)$ nazivamo tangencijalnim vektorom ili vektorom brzine krivulje c u točki $c(t)$. Funkciju $||\dot{c}(t)||$ nazivamo brzinom krivulje c u točki $c(t)$. Za krivulju c kažemo da je jedinične brzine ili da je parametrizirana duljinom luka ako je $||\dot{c}(t)|| = 1, t \in s$.*

Definicija 6. *Pravac koji prolazi točkom $c(t)$ i kojemu je $\dot{c}(t)$ vektor smjera nazivamo tangentom krivulje c u točki $c(t)$.*

Definicija 7. *Funkcija duljine luka krivulje c od točke $c(t_0)$ je funkcija $s(t) = \int_{t_0}^{t} ||\dot{c}(u)||du$, $t_0 \in I$. Duljina luka krivulje $c\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$ je realan broj $s = \int_a^b ||\dot{c}(u)||du$.*

Nakon što smo definirali što znači da je krivulja parametrizirana duljinom luka, možemo uvesti pojmove zakrivljenosti i torzije.

Definicija 8. *Neka je $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ krivulja parametrizirana duljinom luka. Funkciju $\kappa\colon I \to \mathbb{R}$ definiranu s $\kappa(s) = ||c''(s)||$ nazivamo zakrivljenošću (fleksijom) krivulje c u točki $c(s)$.*

Navedimo i formulu zakrivljenosti za krivulju parametriziranu općim parametrom.

Propozicija 1. *(Vidjeti [1], Propozicija 1.3.5) Neka je c regularna krivulja u $\mathbb{R}^3$ parametrizirana općim parametrom t. Tada je njena zakrivljenost*

$$\kappa = \frac{||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)||}{||\dot{c}(t)||^3}.$$

Prije nego krenemo s pojmom torzije, moramo najprije uvesti nekoliko polja vezanih uz krivulju. Neka je $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ krivulja parametrizirana duljinom luka.

Prvo polje koje ćemo navesti je jedinično tangencijalno polje u oznaci $T(s)$, $T(s) = c'(s)$.
Zatim, imamo polje vektora glavnih normala, u oznaci $N(s)$, $N(s) = \frac{c''(s)}{||c''||}, c'' \neq 0$.
Polje binormala u oznaci je $B(s)$, a definirano je kao $B(s) = T(s) \times N(s)$.
Ova tri polja zajedno čine desnu ortonormiranu bazu od $\mathbb{R}^3_{c(s)}$ u svakoj točki krivulje, odnosno $(T(s), N(s), B(s))$ još nazivamo Frenetovim trobridom krivulje c.

Definicija 9. *Funkcija $\tau\colon I \to \mathbb{R}$ definirana s $\tau = -N(s) \cdot B'(s)$ naziva se torzijom (sukanjem) krivulje c parametrizirane duljinom luka u točki $c(s)$.*

Kako zakrivljenost, tako i torzija posjeduje formulu za krivulju parametriziranu općim parametrom. Navedimo i nju.

Propozicija 2. *(Vidjeti [1], Propozicija 1.3.8) Neka je c dopustiva krivulja parametrizirana općim parametrom t.Tada vrijedi*

$$\tau = \frac{(\dot{c} \times \ddot{c}) \cdot \dddot{c}}{||\dot{c} \times \ddot{c}||^2} = \frac{det(\dot{c}, \ddot{c}, \dddot{c})}{||\dot{c} \times \ddot{c}||^2}.$$

Teorem 1. (*Vidjeti* [1], *Teorem 1.3.7*) (*Frenetove formule*) *Neka je c dopustiva krivulja parametrizirana duljinom luka s. Tada vrijedi:*

$$T' = \kappa N,$$

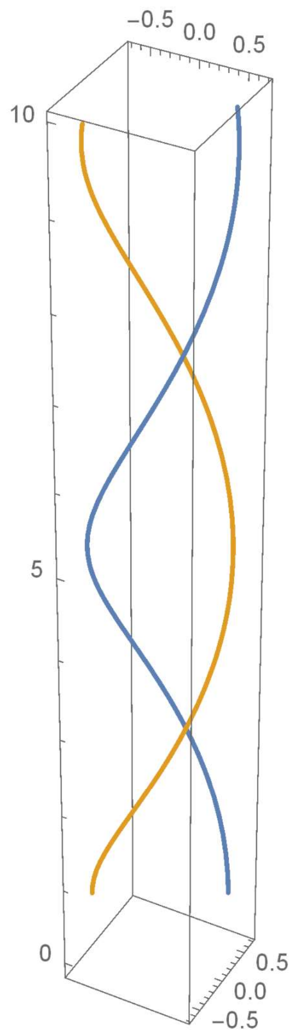
$$N' = -\kappa T + \tau B,$$
$$B' = -\tau N.$$

3 | Bertrandove krivulje

Ranije smo proučavali krivulju, odnosno njoj pridružena vektorska polja i veličine koje ju opisuju. Sada ćemo promatrati dvije, odnosno više krivulja, čiji su vektori normala međusobno kolinearni. Definicije i primjeri su preuzeti iz [3].

Definicija 10. *Par krivulja γ i γ_1 koje imaju iste glavne normale zovu se Bertrandove krivulje. γ_1 zove se Bertrandov par krivulje γ.*

Odmah na početku navest ćemo primjer Bertrandovih krivulja te ispod priložiti njen grafički prikaz. Krivulja $r(u) = (\frac{1}{\sqrt{2}}\cos u, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin u, \sqrt{2}u)$ i njen Bertradov par $r_1(u) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos u, -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin u, \sqrt{2}u)$.



Slika 3.1: Primjer Bertrandovih krivulja

Drugim riječima, ako su γ i γ_1 Bertrandove krivulje, postoji podudarnost od točke do točke između γ i γ_1 takva da su glavne normalne iste u odgovarajućim točkama P i P_1. Ovo implicira da je PP_1 zajednička glavna normala od γ i γ_1 te pretpostavljamo da je $\boldsymbol{n_1} = \boldsymbol{n}$.
Koristimo indeks 1 za veličine koji se odnose na γ_1.

Iz definicije primjećujemo sljedeća svojstva Bertrandovih krivulja:

(i) Udaljenost $|PP_1|$ između odgovarajućih točaka dviju krivulja je konstantna.

Dokaz. Neka je $|PP_1| = \lambda(s)$. Dokazujemo da je λ konstantan. Budući da pretpostavljamo da je $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n_1}$, uzmemo da je $\overrightarrow{PP_1} = \lambda \boldsymbol{n}$. Ako je $\boldsymbol{r_1}$ vektor položaja P_1 na γ_1 i $\boldsymbol{r}$ vektor položaja P na γ, tada imamo

$$\boldsymbol{r_1} = \boldsymbol{r} + \lambda \boldsymbol{n}, \tag{3.1}$$

a također po definiciji od γ_1

$$\boldsymbol{n_1} = \boldsymbol{n}. \tag{3.2}$$

Deriviramo (3.1) s obzirom na s te slijedi

$$\boldsymbol{t_1}\frac{ds_1}{ds} = \boldsymbol{t} + \lambda(\tau\boldsymbol{b} - \kappa\boldsymbol{t}) + \lambda'\boldsymbol{n},$$

$$\boldsymbol{t_1}\frac{ds_1}{ds} = (1-\lambda\kappa)\boldsymbol{t} + \lambda'\boldsymbol{n} + \lambda\tau\boldsymbol{b}. \tag{3.3}$$

Uzmemo skalarni produkt (3.2) i (3.3), dobijemo da je $\lambda' = 0$ što dokazuje da je λ konstantan. □

(ii) Tangente krivulja γ i γ_1 u odgovarajućim točkama zatvaraju konstantni kut.

Dokaz. Ako su $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t_1}$ krivulje u točkama P, odnosno P_1, pokazat ćemo da je umnožak $\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{t_1}$ konstantan. Budući da je $\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{t_1} = \cos\alpha$, slijedi da je α konstantan kut.
Sada imamo

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t_1}) &= \frac{dt}{ds}\cdot\boldsymbol{t_1} + \boldsymbol{t}\cdot\frac{dt_1}{ds_1}\cdot\frac{ds_1}{ds} \\ &= \kappa\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{t_1} + \boldsymbol{t}\cdot\kappa_1 n_1\frac{ds_1}{ds}.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Kako je

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n_1}, \quad \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{t_1} = 0 \quad i \quad \boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{n_1} = 0, \tag{3.5}$$

uvrštavanjem (3.5) u (3.4), dobivamo $\frac{d}{ds}(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t_1}) = 0$ pa je $\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t_1}$ konstantan. □

(iii) Binormale u dvije odgovarajuće točke krivulja γ i γ_1 također će zatvarati isti kut α.

Dokaz. Za binormale vrijedi $\boldsymbol{b_1} = \boldsymbol{t_1} \times \boldsymbol{n_1}$ i $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{n}$.
Stoga je

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b_1}\cdot\boldsymbol{b} &= (\boldsymbol{t_1}\times\boldsymbol{n_1})\cdot(\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}) \\ &= (\boldsymbol{t_1}\cdot\boldsymbol{t})(\boldsymbol{n_1}\cdot\boldsymbol{n}) - (\boldsymbol{n_1}\cdot\boldsymbol{t})(\boldsymbol{t_1}\cdot\boldsymbol{n})\,.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Kako je

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n_1}, \quad \boldsymbol{n_1}\cdot\boldsymbol{t} = 0, \quad \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{t_1} = 0 \quad i \quad \boldsymbol{n_1}\cdot\boldsymbol{n} = 1, \tag{3.7}$$

uvrštavanjem (3.7) u (3.6), dobivamo $\boldsymbol{b_1}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{t_1}\cdot\boldsymbol{t} = \cos\alpha$ prema prethodno pokazanom svojstvu (i). Stoga je kut između binormala u odgovarajućim točkama konstantan. □

Teorem 2. (*Vidjeti* [3], *Theorem* 1) *Ako su krivulje γ i γ_1 Bertrandove, tada:*

(*i*) *postoji linearna ovisnost između zakrivljenosti i torzije tih krivulja,*

(*ii*) *torzija u odgovarajućim točkama P i P_1 ima isti predznak i njihov produkt je konstantan.*

Dokaz. (i) Prvo bismo trebali pronaći njihovu linearnu ovisnost. Prema definiciji Bertrandove krivulje, glavne normale se podudaraju, odnosno linearno su zavisne. Kako je svaki od vektora $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{t_1}, \boldsymbol{b_1}$ okomit na istu glavnu normalu, sva četiri vektora su komplanarna. Po svojstvu (iii), $\boldsymbol{b_1}$ čini konstantan kut α s pozitivnim smjerom vektora $\boldsymbol{b}$ i prema tome zatvara kut $(90^\circ - \alpha)$ s vektorom $\boldsymbol{t}$. Odavde imamo:

$$\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b_1} = \cos\alpha, \quad \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{b_1} = \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha. \tag{3.8}$$

Budući da je $\alpha' = 0$, koristeći (3.3) iz svojstva (i) imamo:

$$\boldsymbol{t_1}\frac{ds_1}{ds} = (1 - \lambda\kappa)\boldsymbol{t} + \lambda\tau\boldsymbol{b}. \tag{3.9}$$

Napravimo skalarni produkt s $\boldsymbol{b_1}$ s obje strane (3):

$$(1 - \lambda\kappa)\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{b_1} + \lambda\tau\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b_1} = 0. \tag{3.10}$$

Uvrstimo li (3.8) u (3.10), dobivamo $(1 - \lambda\kappa)\sin\alpha + \lambda\boldsymbol{r}\cos\alpha = 0$, što je traženi linearni odnos između κ i τ za γ.
Sada je odnos između krivulje γ i γ_1 recipročan. Točka $\boldsymbol{r}$ je na udaljenosti $-\lambda$ duž normale u $\boldsymbol{r_1}$ i vektori $\boldsymbol{t}$ i $\boldsymbol{t_1}$ zatvaraju kut α. Stoga gornji linearni odnos postaje $(1 + \lambda\kappa_1)\sin\alpha + \lambda\tau_1\cos\alpha = 0$, što daje linearnu vezu između κ_1 i τ_1 za γ_1.

(ii) Ako su τ i τ_1 torzije u odgovarajućim točkama, dokazat ćemo da vrijedi

$$\tau\tau_1 = \frac{1}{\lambda^2}\sin\alpha^2.$$

Neka $\boldsymbol{t_1}$ zatvara konstantan kut α s $\boldsymbol{t}$ duž pozitivnog smjera vektora. Kako su $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{t_1}, \boldsymbol{b_1}$ komplanarni i vektor $\boldsymbol{b_1}$ zatvara kut α s $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{t}$ zatvara kut $(90^\circ + \alpha)$ s $\boldsymbol{b}$ duž pozitivnog smjera. Otuda je

$$\boldsymbol{t_1} = \boldsymbol{t}\cos\alpha + \boldsymbol{b}\cos(90 + \alpha) = \boldsymbol{t}\cos\alpha - \boldsymbol{b}\sin\alpha. \tag{3.11}$$

Jer je $\lambda' = 0$, iz (3.3) svojstva (i) dobivamo:

$$\boldsymbol{t_1}\frac{ds_1}{ds} = (1 - \lambda\kappa)\boldsymbol{t} + \lambda\tau\boldsymbol{b}. \tag{3.12}$$

Budući da su (3.11) i (3.12) paralelni vektori, njihovi koeficijenti moraju biti proporcionalni. Stoga imamo

$$\frac{ds_1}{ds} = \frac{1 - \lambda\kappa}{\cos\alpha} = \frac{\lambda\tau}{-\sin\alpha},$$

što daje

$$\cos\alpha = (1 - \lambda\kappa)\frac{ds}{ds_1} \quad i \quad \sin\alpha = -\lambda\tau\frac{ds}{ds_1} \tag{3.13}$$

za krivulju γ. Odnosi koji odgovaraju (3.13), za krivulju γ_1 dobivaju se promjenom s u s_1 i zamjenom λ, α redom s $-\lambda$ i $-\alpha$. Dakle, za γ_1 imamo sljedeće

$$\cos\alpha = (1 + \lambda\kappa_1)\frac{ds_1}{ds}, \quad \sin\alpha = -\lambda\tau_1\frac{ds_1}{ds}. \tag{3.14}$$

Iz (3.13) i (3.14) dobivamo $\cos\alpha^2 = (1 - \lambda\kappa)(1 + \lambda\kappa_1)$ i $\tau\tau_1 = \frac{1}{\lambda^2}\sin\alpha^2$, čime je teorem dokazan. □

Teorem 3. (*Vidjeti* [3], *Teorem* 2) (*Mannheim*) *Ako su P i P_1 odgovarajuće točke Bertrandovih krivulja i C, C_1 njihovi centri zakrivljenosti, tada je dvoomjer (PCP_1C_1) konstantan i jednak $\sec^2 \alpha$[1], gdje je α kut između tangenti koje prolaze kroz točku P krivulje γ, odnosno P_1 krivulje γ_1.*

Dokaz. Budući da centri zakrivljenosti C i C_1 od krivulja γ i γ_1 leže na normalama u točkama P, P_1 i PP_1 je zajednička normala od krivulja γ i γ_1, točke C, P, C_1 i P_1 su kolinearne i trebamo pronaći njihov unakrsni omjer (PCP_1C_1). Ako je $\boldsymbol{r}$ vektor položaja u P, vektor položaja u odgovarajućoj točki P_1 je $\boldsymbol{r_1} = \boldsymbol{r} + \lambda \boldsymbol{n}$ i $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n_1}$. Točke C i C_1 imaju vektore položaja $\boldsymbol{r} + \rho \boldsymbol{n}$ i $\boldsymbol{r_1} + \rho_1 \boldsymbol{n_1}$. Vrijedi sljedeće:

$$|PC| = |\vec{OC} - \vec{OP}| = |(\boldsymbol{r} + \rho \boldsymbol{n}) - \boldsymbol{r}| = \rho,$$

$$|P_1C_1| = |\vec{OC_1} - \vec{OP_1}| = |\boldsymbol{r_1} + \rho_1 \boldsymbol{n}) - \boldsymbol{r_1}| = \rho_1,$$

$$|CP_1| = |\vec{OP_1} - \vec{OC}| = |(\boldsymbol{r} + \lambda \boldsymbol{n}) - (\boldsymbol{r} + \rho \boldsymbol{n})| = |\lambda - \rho|,$$

$$|C_1P| = |\vec{OP} - \vec{OC_1}| = |\boldsymbol{r} - (\boldsymbol{r_1} + \rho_1 \boldsymbol{n_1})| = |(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_1}) - \rho_1 \boldsymbol{n})| = |-\lambda - \rho_1|.$$

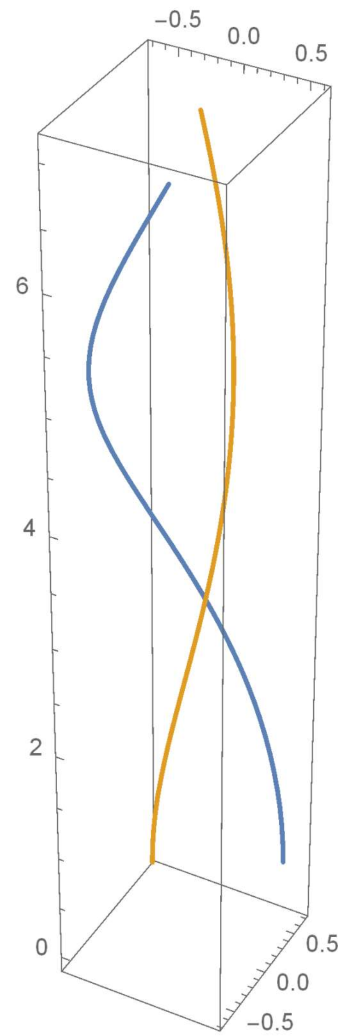
Zapišimo dolje traženi dvoomjer

$$(PCP_1C_1) = \frac{|PC| \cdot |P_1C_1|}{|CP_1| \cdot |C_1P|} = \frac{\rho\rho_1}{|\lambda - \rho||\lambda + \rho_1|} = \frac{1}{(1 - \lambda\kappa)(1 + \lambda\kappa_1)}.$$

Iz prethodnog teorema, $(1 - \lambda\kappa)(1 + \lambda\kappa_1) = \cos \alpha^2$, gdje je α konstantan kut. Stoga je $(PCP_1C_1) = sec^2\alpha$, što dokazuje teorem. □

Pogledat ćemo još jedan primjer Bertrandovih krivulja i u nastavku prilažemo grafički prikaz. Krivulja $r(u) = (\frac{1}{\sqrt{2}} \cos u, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin u, \frac{u}{\sqrt{2}})$ te njen Bertrandov par $r_1(u) = (\frac{1}{\sqrt{2}} \cos u - \cos u, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin u - \sin u, \frac{u}{\sqrt{2}})$.

[1]Sekans kuta α u pravokutnom trokutu jednak je omjeru hipotenuze i priležeće stranice, odnosno $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$.



Slika 3.2: Grafički prikaz prethodnog para krivulja

Primjer 1. *Pokazat ćemo da je svaka ravninska krivulja, tj. krivulja čija je torzija jednaka nuli, ima beskonačno mnogo Bertrandovih parova krivulja.*

Iz linearnog odnosa zakrivljenosti κ i torzije τ krivulje γ, imamo

$$(1 - \lambda\kappa)\sin\alpha + \lambda\tau\cos\alpha = 0. \tag{3.15}$$

Kada je $\tau = 0$, vrijedi $(1 - \lambda\kappa)\sin\alpha = 0$
Kako je

$$1 - \lambda \neq 0, \quad slijedi\ da\ je\ \sin\alpha = 0 \quad ili \quad \alpha = 0. \tag{3.16}$$

Riješenje jednadžbe (3.16) je $\alpha = \pm\pi$. Stoga su svi pravci normala okomiti, odnosno paralelni, što znači da su to Bertrandove krivulje. Iz tog zaključka slijedi kako svaka krivulja ima beskonačno mnogo Bertrandovih parova krivulja.

Primjer 2. *Pokazat ćemo da za krivulje s torzijom $\tau \neq 0$ i $\alpha = \frac{\pi}{2}$, Bertrandovi parovi krivulja su krivulje konstantne zakrivljenosti i svaka od krivulja γ i γ_1 je na mjestu centra zakrivljenosti druge krivulje. (Ako je $\kappa(t) \neq 0$, tada se $\rho(t) = \frac{1}{\kappa(t)}$ naziva radijusom* *zakrivljenosti, a* $\mathbf{s}(t) = \boldsymbol{r}(t) + \rho(t)\boldsymbol{n}(t)$ *centrom zakrivljenosti krivulje* $\boldsymbol{r}$ *u točki* $t \in I$, *pri čemu je* $\boldsymbol{r}\colon I \to \mathbb{R}^3$ *regularna prostorna krivulja.)*

Kada je $\tau \neq 0$ *i* $\alpha = \frac{\pi}{2}$, *relacija* (3.15) *iz Primjera 2.1. postaje jednaka* $1 - \lambda\kappa = 0$ *ili* $\kappa = \frac{1}{\lambda}$ *što je konstanta. Stoga je krivulja* γ *konstantne zakrivljenosti.*
Točka $\boldsymbol{r_1}$ *Bertrandovog para krivulje je jednaka* $\boldsymbol{r_1} = \boldsymbol{r} + \lambda\boldsymbol{n}$. *Kako su* $\lambda = \frac{1}{\kappa}$ *i* λ *konstante,* $\boldsymbol{r_1} = \boldsymbol{r} + \rho\boldsymbol{n}$ *je centar zakrivljenosti krivulje* γ.
Kako je odnos između krivulje γ *i njenog Bertrandovog para* γ_1 *recipročan, stoga je točka na krivulji* γ *jednaka* $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_1} - \rho\boldsymbol{n}$. *Znamo da je* $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n_1}$, *slijedi da je* $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_1} - \rho\boldsymbol{n}$ *centar zakrivljenosti krivulje* γ_1. *Tako je svaka od krivulja* γ *i* γ_1 *centar zakrivljenosti ove druge krivulje.*

Primjer 3. *Kada su* κ *i* τ *konstante, tada postoji beskonačan broj Bertrandovih parova krivulje. Odredit ćemo Bertrandov par krivulje obične cilindrične spirale.*
Linearna relacija (3.15) *iz Primjera 2.1. može se zapisati kao*

$$-\kappa + \tau \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{1}{\alpha}.$$

Kako su κ *i* τ *konstante, iz gornje relacije, za svaki* λ, *možemo pronaći* α *takav da za njega postoji beskonačan broj Bertrandovih parova krivulje.*
Pronađimo Bertrandove parove obične cilindrične spirale. Obična cilindrična spirala zadana je parametrizacijom $\boldsymbol{r} = (a\cos u, a\sin u, bu)$, $a > 0$, $b \neq 0$.

Tada znamo da je $\kappa = \frac{a}{a^2+b^2}, \tau = \frac{b}{a^2+b^2}$ *i* $n = (-\cos u, -\sin u, 0)$.

Stoga je jednadžba Bertrandovog para $\boldsymbol{r_1} = \boldsymbol{r} + \lambda\boldsymbol{n}$, *gdje je* λ *konstanta, pa slijedi*

$$\boldsymbol{r_1} = (a\cos u, a\sin u, bu) + \lambda(-\cos u, -\sin u, 0),$$

$$\boldsymbol{r_1} = [(a-\lambda)\cos u, (b-\lambda)\sin u, bu].$$

Dakle, Bertrandov par obične cilindrične spirale je spirala. Kako je λ *konstanta, proizvoljan je, pa slijedi da postoji beskonačan broj Bertrandovih parova krivulje.*

Literatura

[1] Ž. Milin Šipuš, S. Vidak, *Uvod u diferencijalnu geometriju*, PMF-Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, interna skripta, 2016.

[2] J.Sedlar , *Diferencijalna geometrija*, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije u Splitu, 2016.

[3] D. Somasundaram, *Differential geometry: A First course*, Alpha Science, Salem, 2005.

Sažetak

U ovome radu upoznat ćemo se s Bertrandovim krivuljama, odnosno parovima krivulja s kolinearnim normalama. Definirani su osnovni pojmovi lokalne teorije krivulja u $\mathbb{R}^3$, kao što su Frenetov trobrid i zakrivljenost i torzija krivulje. Bertrandovim krivuljama nazivamo krivulje čije su normale kolinearne, te se u radu bavimo nekim njihovim svojstvima. U radu su navedeni primjeri koji prate predstavljenu teoriju, te su neke od Bertrandovih krivulja prikazane grafički pomoću programa Wolfram Mathematica.

Ključne riječi

regularna krivulja, Frenetov trobrid, zakrivljenost, torzija, Bertrandove krivulje

Bertrand curves

Summary

In this work we will learn about Bertrand curves, that is, curves with collinearity normals. The basic terms of the local theory of curves in $\mathbb{R}^3$, such as the pairs of Frenet frames and curvature and torsion of a curve, are defined. Bertrand curves are curves whose normals are collinear, and in this work we deal with some of their properties. The work contains examples that follow the presented theory, and some of the Bertrand curves are shown graphically by Wolfram Mathematica software .

Keywords

regular curve, Frenet frame, curvature, torsion, Bertrand curves

Životopis

Rođena sam 19.07.1998. godine u Vinkovcima. Pohađala sam osnovnu školu Ane Katarine Zrinski u Retkovcima. Nakon osnovne škole, upisala sam Gimnaziju Matije Antuna Reljkovića u Vinkovcima, smjer opći.Po završetku srednjoškolskog obrazovanja upisala sam Sveučilišni prijediplomski studij Matematike na Odjelu za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayera, koji je danas Fakultet primijenjene matematike i informatike.