

# Caseyev teorem

---

**Lombarović, Lidija**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2024**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, School of Applied Mathematics and Informatics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Fakultet primijenjene matematike i informatike**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:011972>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-11**



**mathos**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of School of Applied Mathematics and Informatics](#)





SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU

FAKULTET PRIMIJENJENE MATEMATIKE I INFORMATIKE

Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

# Caseyev teorem

ZAVRŠNI RAD

Mentor:

**prof. dr. sc. Ivan Matić**

Student:

**Lidija Lombarović**

Osijek, 2024.



# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Ptolomejev teorem</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Caseyev teorem</b>	<b>5</b>
3.1	Zajedničke tangente dviju kružnica . . . . .	5
3.2	Poučak o kosinusu . . . . .	7
3.3	Dokaz Caseyeva teorema . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Feuerbachov teorem</b>	<b>23</b>
	<b>Literatura</b>	<b>29</b>
	<b>Sažetak</b>	<b>31</b>
	<b>Summary</b>	<b>33</b>
	<b>Životopis</b>	<b>35</b>





# 1 | Uvod

Geometrija, jedna od najstarijih grana matematike, izvorno se bavi proučavanjem svojstava i međusobnih odnosa geometrijskih likova u ravnini te geometrijskih tijela u prostoru. Proizašla je iz praktičnih potreba svakodnevnog života još u starom Egiptu. Sve do kraja 19. stoljeća, euklidska je geometrija bila gotovo jedina poznata grana geometrije. Utemeljena je na postulatima i aksiomima koje je izveo starogrčki matematičar Euklid u svome djelu *Elementi* u 3. st. pr. Kr. Daljnjim razvojem neeuklidskih geometrija, njihov predmet proučavanja postaje širi i apstraktniji.

Irski matematičar i profesor John Casey (1820.-1891.) posebno je važan zbog svog doprinosa euklidskoj geometriji. Napisao je više od 25 radova, no najpoznatiji je njegov udžbenik *Nastavak prvih šest knjiga Euklidovih Elemenata* iz 1881. godine. U tom je udžbeniku Casey po prvi put predstavio proširenja i generalizacije Euklidovih teorema, što je kasnije postalo poznato kao moderna geometrija trokuta. Štoviše, smatra se da su on i francuski matematičar Émile Lemoine osnivači moderne geometrije trokuta i kružnice.

Osim toga, u *Nastavku prvih šest knjiga Euklidovih Elemenata* dao je i generalizaciju Ptolomejeva teorema, koja je prema njemu dobila naziv Caseyev teorem. Dok Ptolomejev teorem tvrdi da za svaki tetivni četverokut vrijedi da je umnožak duljina dijagonala jednak zbroju umnožaka duljina nasuprotnih stranica četverokuta, Caseyev teorem proširuje ovaj koncept na slučaj gdje se umjesto vrhova tetivnog četverokuta promatraju četiri kružnice koje dodiruju polaznu kružnicu i nalaze se unutar nje. Casey je dokazao samo jedan smjer ovog manje poznatog teorema. Ipak, veću ulogu u primjeni pronašao je njegov, kasnije više puta dokazan, obrat. Na primjer, najkraći mogući dokaz Feuerbachova teorema koristi upravo obrat Caseyeva teorema.

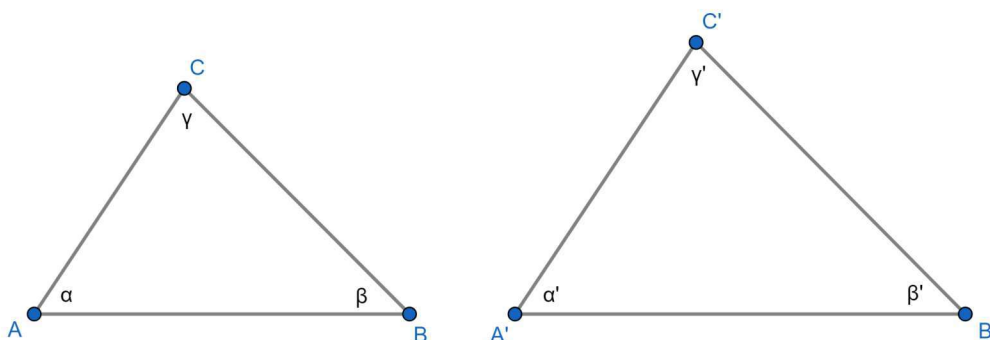


## 2 | Ptolomejev teorem

Budući da je Caseyjev teorem generalizacija Ptolomejeva teorema, pri čemu ulogu točaka preuzimaju kružnice, potrebno je prvo iskazati i dokazati Ptolomejev teorem. Starogrčki matematičar i astronom Klaudije Ptolomej u svome djelu *Almagest* dao je nužan uvjet kako bi četverokut bio tetivni. Pomoću toga, kreirao je tablice tetiva koje je primijenio u astronomiji. Prisjetimo se nekih pojmova i teorema koji će biti korišteni u dokazu Ptolomejeva teorema.

**Definicija 1** (vidjeti [3]). Četverokut kojem se može opisati kružnica naziva se **tetivni četverokut**.

Dva su trokuta **slična** ako postoji bijekcija vrhova jednog trokuta na vrhove drugog trokuta tako da su im odgovarajući kutovi sukladni i odgovarajuće stranice proporcionalne. Označavamo  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ .



Slika 2.1:  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ .

Vrijedi  $\alpha = \alpha'$ ,  $\beta = \beta'$  i  $\gamma = \gamma'$  te  $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|}$ .

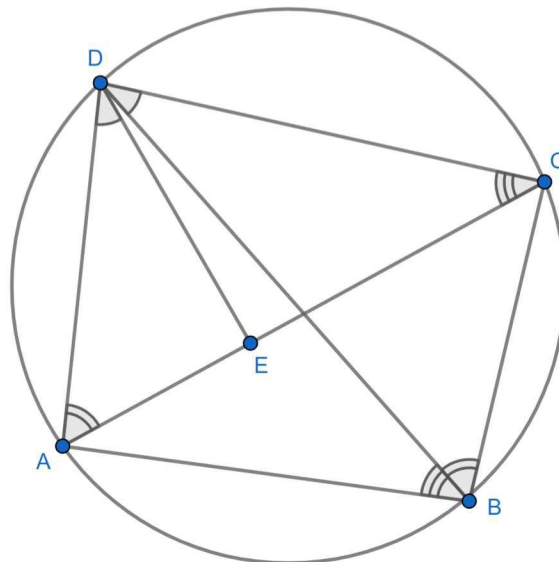
**Teorem 1 (K-K-K teorem o sličnosti trokuta, vidjeti [3, Teorem 4.3]).** Dva su trokuta slična ako su im odgovarajući kutovi sukladni.

Dovoljno je dokazati sukladnost dvaju parova kutova. Tada im i treći par kutova mora biti sukladan.

Sada se može iskazati i dokazati Ptolomejev teorem.

**Teorem 2 (Ptolomejev teorem, vidjeti [3, Teorem 5.5]).** *Umnožak duljina dijagonala tetivnog četverokuta jednak je zbroju umnožaka duljina nasuprotnih stranica četverokuta.*

Dokažimo ovaj teorem pomoću sličnosti.



Slika 2.2: Tetivni četverokut  $ABCD$ .

*Dokaz.* Neka je četverokut  $ABCD$  tetivni. Označimo s  $E$  točku na dijagonali  $\overline{AC}$  takvu da je  $\angle ADE = \angle BDC$ . Također je  $\angle DAC = \angle DBC$  jer su to obodni kutovi nad lukom  $\widehat{CD}$ . Prema K-K-K teoremu o sličnosti trokuta,  $\triangle ADE \sim \triangle BDC$ . Iz toga slijedi  $\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AE|}{|BC|}$ , to jest

$$|AD| \cdot |BC| = |AE| \cdot |BD|. \quad (2.1)$$

Uočimo iz Slike 2.2 da je  $\angle CDE = \angle CDB + \angle BDE = \angle ADE + \angle BDE = \angle ADB$ . Također je  $\angle DBA = \angle DCA$  jer su to obodni kutovi nad lukom  $\widehat{AD}$ . Prema K-K-K teoremu o sličnosti trokuta,  $\triangle ABD \sim \triangle CDE$ . Iz toga slijedi  $\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|BA|}{|CE|}$ , to jest

$$|AB| \cdot |CD| = |BD| \cdot |CE|. \quad (2.2)$$

Zbrajanjem izraza (2.1) i (2.2) dobivamo

$$\begin{aligned} |AD| \cdot |BC| + |AB| \cdot |CD| &= |AE| \cdot |BD| + |BD| \cdot |CE| \\ &= (|AE| + |CE|) \cdot |BD| \\ &= |AC| \cdot |BD|. \end{aligned}$$

Dakle, umnožak duljina dijagonala tetivnog četverokuta  $ABCD$  jednak je zbroju umnožaka duljina nasuprotnih stranica četverokuta.  $\square$

Obrat također vrijedi.

## 3 | Caseyev teorem

### 3.1 Zajedničke tangente dviju kružnica

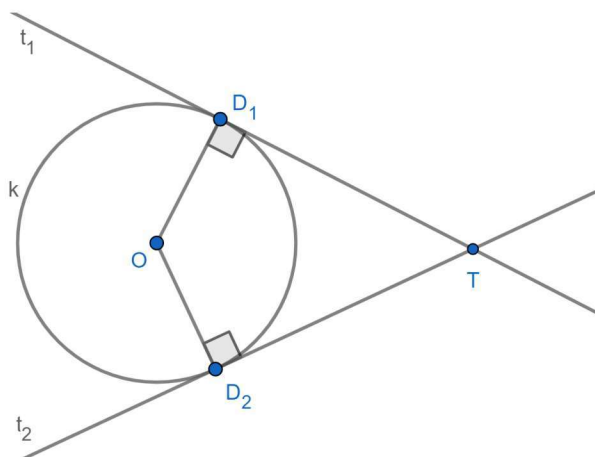
Ulogu stranica i dijagonala tetivnog četverokuta iz Ptolomejeva teorema, u Caseyevom teoremu preuzimaju zajedničke tangente kružnica.

**Definicija 2** (vidjeti [3]). *Tangenta kružnice pravac je koji s kružnicom ima točno jednu zajedničku točku.*

**Teorem 3 (Teorem o tangenti kružnice, vidjeti [1]).** *Neka je dana kružnica  $k(O, r)$  i točka  $D$  na toj kružnici. Pravac  $t$  koji prolazi točkom  $D$  je tangenta kružnice  $k$  ako i samo ako je okomit na dužinu  $\overline{OD}$ .*

Sljedeći teorem govori da su odsječci dviju tangenti od točke izvan kružnice do dirališta tangenti s kružnicom jednake duljine, a bit će korišten kasnije u Poglavlju 4.

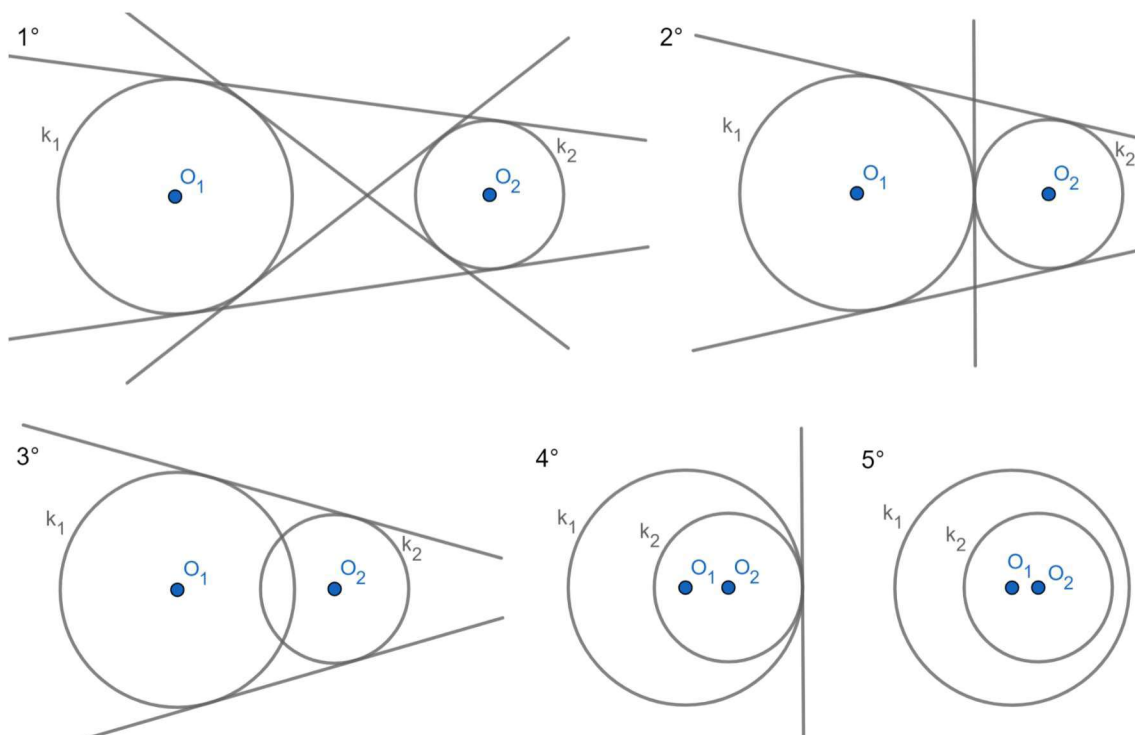
**Teorem 4** (vidjeti [1]). *Neka su  $t_1$  i  $t_2$  tangente kružnice  $k$  iz točke  $T$  te  $D_1$  i  $D_2$  dirališta tangenti i kružnice. Tada je  $|TD_1| = |TD_2|$ .*



Slika 3.1:  $|TD_1| = |TD_2|$ .

**Zajednička tangenta** dviju kružnica pravac je koji je tangenta objiju kružnica. Dvije kružnice mogu imati najviše dvije vanjske i dvije unutarnje zajedničke tangente.





Slika 3.2: Zajedničke tangente dviju kružnica.

1° Ako kružnice nemaju zajedničkih točaka i ne nalaze se jedna unutar druge, onda one imaju dvije vanjske i dvije unutarnje zajedničke tangente.

2° Ako se kružnice dodiruju izvana u jednoj točki, onda one imaju dvije vanjske i jednu unutarnju zajedničku tangentu, koja je okomita na spojnicu središta kružnica.

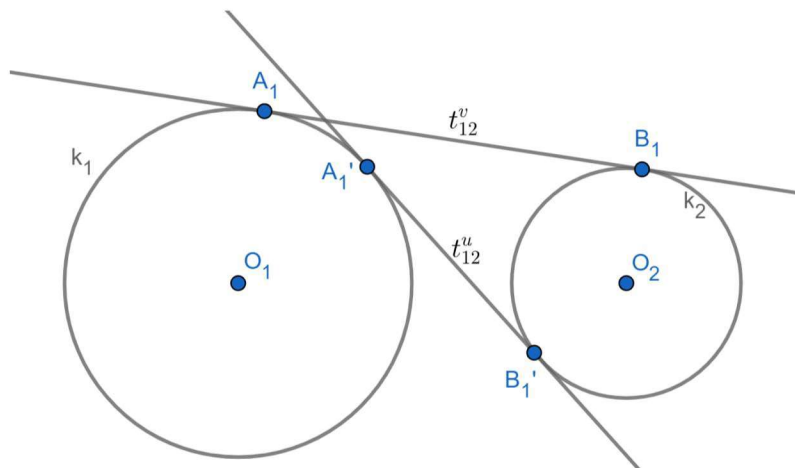
3° Ako se kružnice sijeku u dvjema točkama, onda one imaju dvije vanjske zajedničke tangente.

4° Ako se kružnice dodiruju iznutra u jednoj točki, onda one imaju jednu vanjsku zajedničku tangentu.

5° Ako kružnice nemaju zajedničkih točaka i nalaze se jedna unutar druge, onda one nemaju zajedničkih tangenti.

Uvedimo oznake pomoću Slike 3.3. Ako vanjska zajednička tangenta kružnica  $k_1$  i  $k_2$  dodiruje te kružnice redom u točkama  $A_1$  i  $B_1$ , onda ćemo udaljenost  $|A_1B_1|$  označavati s  $t_{12}^v$  i zvati **duljina vanjske zajedničke tangente** kružnica  $k_1$  i  $k_2$ . Ako unutarnja zajednička tangenta kružnica  $k_1$  i  $k_2$  dodiruje te kružnice redom u točkama  $A'_1$  i  $B'_1$ , onda ćemo udaljenost  $|A'_1B'_1|$  označavati s  $t_{12}^u$  i zvati **duljina unutarnje zajedničke tangente** kružnica  $k_1$  i  $k_2$ .

Duljina vanjske zajedničke tangente dviju kružnica veća je od duljine unutarnje zajedničke tangente tih kružnica.

Slika 3.3: Unutarnja i vanjska zajednička tangenta kružnica  $k_1$  i  $k_2$ .

## 3.2 Poučak o kosinusu

Poučak o kosinusu bit će korišten u dokazu Teorema 6.

**Teorem 5 (Poučak o kosinusu, vidjeti [3, Teorem 6.2]).** *Ako su  $a, b, c$  duljine stranica trokuta te  $\alpha, \beta$  i  $\gamma$  njegovi odgovarajući unutarnji kutovi, onda vrijedi*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

*Dokaz.* Dovoljno je dokazati prvu jednakost. Pretpostavimo da je dan  $\triangle ABC$  sa stranicama duljine  $a = |BC|$ ,  $b = |AC|$  i  $c = |AB|$  te unutarnjim kutovima nasuprot tih stranica redom  $\alpha, \beta$  i  $\gamma$ .

1° Neka je  $\alpha$  pravi kut. Očito je  $a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ .

2° Neka je  $\alpha$  šiljasti kut. Označimo s  $D$  nožište visine  $v_c$  iz vrha  $C$  na stranicu  $\overline{AB}$  te  $|AD| = x$ . Prema Pitagorinom poučku, za  $\triangle ADC$  i  $\triangle BDC$  vrijedi

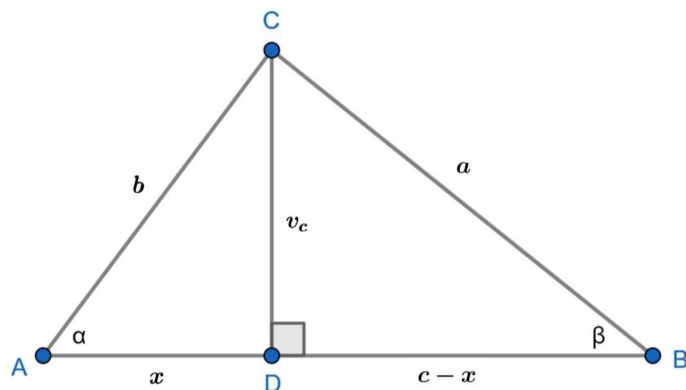
$$v_c^2 = b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2cx.$$

U pravokutnom  $\triangle ADC$  je  $\cos \alpha = \frac{x}{b}$  pa je  $x = b \cos \alpha$  i vrijedi  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ .

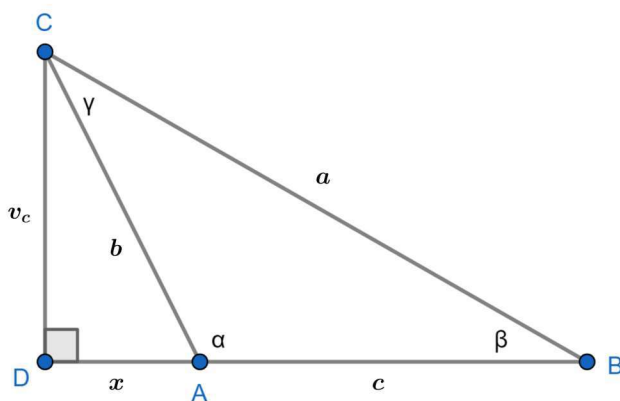


Slika 3.4:  $\alpha < 90^\circ$ .

3° Neka je  $\alpha$  tupi kut. Označimo s  $D$  nožište visine  $v_c$  iz vrha  $C$  na stranicu  $\overline{AB}$  te  $|AD| = x$ . Prema Pitagorinom poučku, za  $\triangle ADC$  i  $\triangle BDC$  vrijedi

$$\begin{aligned} v_c^2 &= b^2 - x^2 = a^2 - (c+x)^2 \\ \Rightarrow a^2 &= b^2 - x^2 + c^2 + 2cx + x^2 \\ \Rightarrow a^2 &= b^2 + c^2 + 2cx. \end{aligned}$$

U pravokutnom  $\triangle ADC$  je  $\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{x}{b}$ , odnosno  $x = b \cos(180^\circ - \alpha) = -b \cos \alpha$  i konačno  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ .  $\square$

Slika 3.5:  $\alpha > 90^\circ$ .

### 3.3 Dokaz Caseyeva teorema

Sljedeći teorem ključan je u dokazu i primjeni Caseyeva teorema prilikom odabira unutarnje ili vanjske zajedničke tangente kružnica.

**Teorem 6** (vidjeti [2, Theorem 1]). *Neka kružnice  $k_1(O_1, r_1)$  i  $k_2(O_2, r_2)$  dodiruju kružnicu  $k(O, r)$  redom u točkama  $P_1$  i  $P_2$ .*

a) *Ako kružnice  $k_1$  i  $k_2$  dodiruju kružnicu  $k$  iznutra, onda je duljina njihove vanjske zajedničke tangente*

$$t_{12}^v = \frac{|P_1 P_2|}{r} \sqrt{(r - r_1)(r - r_2)}.$$

b) *Ako kružnice  $k_1$  i  $k_2$  dodiruju kružnicu  $k$  izvana, onda je duljina njihove vanjske zajedničke tangente*

$$t_{12}^v = \frac{|P_1 P_2|}{r} \sqrt{(r + r_1)(r + r_2)}.$$

c) *Ako kružnica  $k_1$  dodiruje kružnicu  $k$  iznutra, a kružnica  $k_2$  dodiruje kružnicu  $k$  izvana, onda je duljina njihove unutarnje zajedničke tangente*

$$t_{12}^u = \frac{|P_1 P_2|}{r} \sqrt{(r - r_1)(r + r_2)}.$$

d) *Ako kružnica  $k_2$  dodiruje kružnicu  $k$  iznutra, a kružnica  $k_1$  dodiruje kružnicu  $k$  izvana, onda je duljina njihove unutarnje zajedničke tangente*

$$t_{12}^u = \frac{|P_1 P_2|}{r} \sqrt{(r + r_1)(r - r_2)}.$$

*Dokaz.* a) Neka kružnice  $k_1(O_1, r_1)$  i  $k_2(O_2, r_2)$  dodiruju kružnicu  $k(O, r)$  iznutra redom u točkama  $P_1$  i  $P_2$ , kao na Slici 3.6. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je  $r_1 \geq r_2$ . Neka vanjska zajednička tangenta kružnica  $k_1$  i  $k_2$  dodiruje te kružnice redom u točkama  $A_1$  i  $B_1$  te neka je  $A_2$  ortogonalna projekcija točke  $O_2$  na dužinu  $\overline{O_1 A_1}$ . Prema Pitagorinom poučku, za  $\triangle O_1 O_2 A_2$  vrijedi

$$(t_{12}^v)^2 = |A_1 B_1|^2 = |O_1 O_2|^2 - (r_1 - r_2)^2. \quad (3.1)$$

Označimo  $\angle O_1 O O_2 = \alpha$ . Korištenjem poučka o kosinusu, za  $\triangle O_1 O O_2$  dobivamo

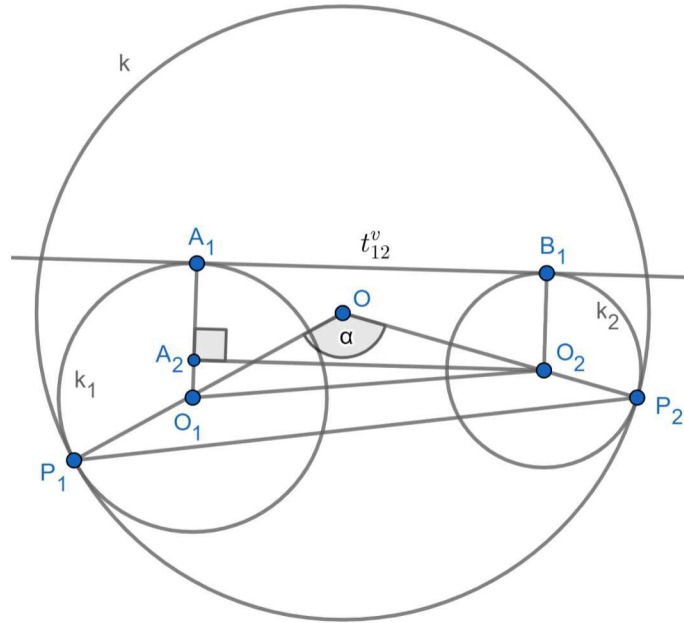
$$|O_1 O_2|^2 = (r - r_1)^2 + (r - r_2)^2 - 2(r - r_1)(r - r_2) \cos \alpha.$$

Korištenjem poučka o kosinusu, za jednakokračni  $\triangle O P_1 P_2$  dobivamo

$$|P_1 P_2|^2 = 2r^2(1 - \cos \alpha)$$

$$\Rightarrow 1 - \cos \alpha = \frac{|P_1 P_2|^2}{2r^2}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = 1 - \frac{|P_1 P_2|^2}{2r^2}.$$

Slika 3.6: Kružnice  $k_1$  i  $k_2$  dodiruju kružnicu  $k$  iznutra.

Uvrštavanjem  $|O_1O_2|^2$  i  $\cos \alpha$  u (3.1) slijedi

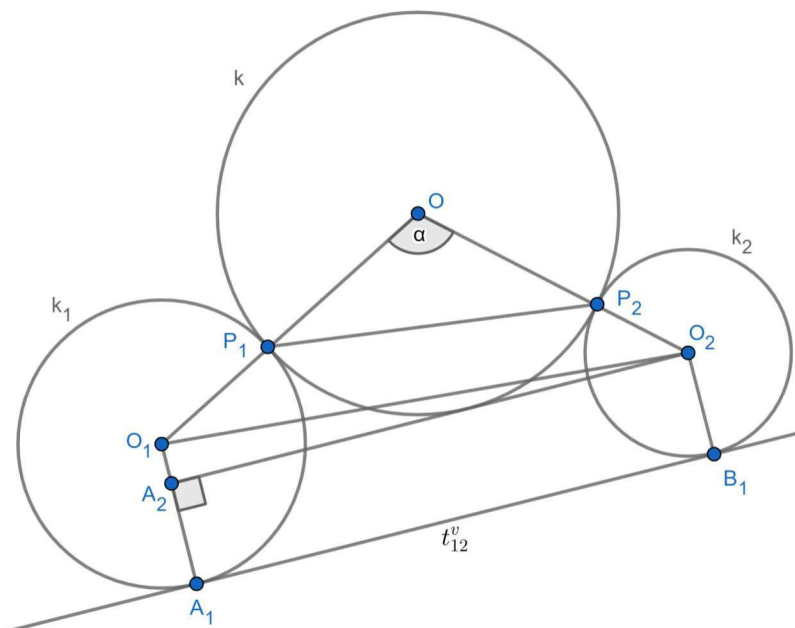
$$\begin{aligned}
 (t_{12}^v)^2 &= (r - r_1)^2 + (r - r_2)^2 - 2(r - r_1)(r - r_2) \cos \alpha - (r_1 - r_2)^2 \\
 &= (r - r_1)^2 + (r - r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 - 2(r - r_1)(r - r_2) \left(1 - \frac{|P_1P_2|^2}{2r^2}\right) \\
 &= (r - r_1)^2 + (r - r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 - 2(r - r_1)(r - r_2) \cdot 1 \\
 &\quad + 2(r - r_1)(r - r_2) \frac{|P_1P_2|^2}{2r^2} \\
 &= r^2 - 2rr_1 + r_1^2 + r^2 - 2rr_2 + r_2^2 - (r_1^2 - 2r_1r_2 + r_2^2) \\
 &\quad - 2(r^2 - rr_2 - rr_1 + r_1r_2) + (r - r_1)(r - r_2) \frac{|P_1P_2|^2}{r^2} \\
 &= (r - r_1)(r - r_2) \frac{|P_1P_2|^2}{r^2}.
 \end{aligned}$$

Korijenovanjem gornje jednakosti dobivamo traženi izraz

$$t_{12}^v = \frac{|P_1P_2|}{r} \sqrt{(r - r_1)(r - r_2)}.$$

b) Neka kružnice  $k_1(O_1, r_1)$  i  $k_2(O_2, r_2)$  dodiruju kružnicu  $k(O, r)$  izvana redom u točkama  $P_1$  i  $P_2$ , kao na Slici 3.7. BSO, pretpostavimo da je  $r_1 \geq r_2$ . Neka vanjska zajednička tangenta kružnica  $k_1$  i  $k_2$  dodiruje te kružnice redom u točkama  $A_1$  i  $B_1$  te neka je  $A_2$  ortogonalna projekcija točke  $O_2$  na dužinu  $\overline{O_1A_1}$ . Prema Pitagorinom poučku, za  $\triangle O_1O_2A_2$  vrijedi

$$(t_{12}^v)^2 = |A_1B_1|^2 = |O_1O_2|^2 - (r_1 - r_2)^2. \quad (3.2)$$

Slika 3.7: Kružnice  $k_1$  i  $k_2$  dodiruju kružnicu  $k$  izvana.

Označimo  $\angle O_1 O O_2 = \alpha$ . Primjenom poučka o kosinusu, za  $\triangle O_1 O O_2$  vrijedi

$$|O_1 O_2|^2 = (r + r_1)^2 + (r + r_2)^2 - 2(r + r_1)(r + r_2) \cos \alpha.$$

Primjenom poučka o kosinusu, za jednakokračni  $\triangle O P_1 P_2$  vrijedi

$$|P_1 P_2|^2 = 2r^2(1 - \cos \alpha)$$

$$\Rightarrow 1 - \cos \alpha = \frac{|P_1 P_2|^2}{2r^2}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = 1 - \frac{|P_1 P_2|^2}{2r^2}.$$

Uvrštavanjem  $|O_1 O_2|^2$  i  $\cos \alpha$  u (3.2) slijedi

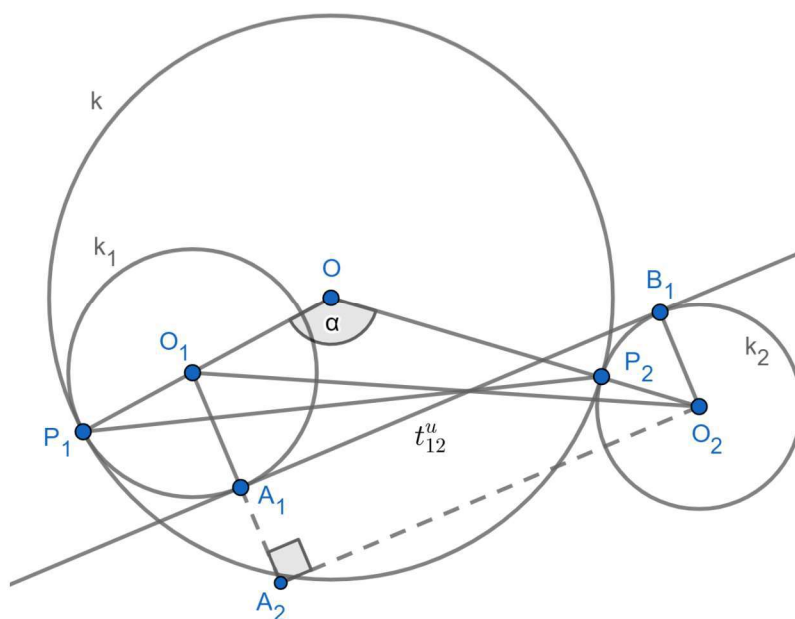
$$\begin{aligned} (t_{12}^v)^2 &= (r + r_1)^2 + (r + r_2)^2 - 2(r + r_1)(r + r_2) \cos \alpha - (r_1 - r_2)^2 \\ &= (r + r_1)^2 + (r + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 - 2(r + r_1)(r + r_2) \left(1 - \frac{|P_1 P_2|^2}{2r^2}\right) \\ &= (r + r_1)^2 + (r + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 - 2(r + r_1)(r + r_2) \cdot 1 \\ &\quad + (r + r_1)(r + r_2) \frac{|P_1 P_2|^2}{r^2} \\ &= r^2 + 2rr_1 + r_1^2 + r^2 + 2rr_2 + r_2^2 - (r_1^2 - 2r_1r_2 + r_2^2) \\ &\quad - 2(r^2 + rr_2 + rr_1 + r_1r_2) + (r + r_1)(r + r_2) \frac{|P_1 P_2|^2}{r^2} \\ &= (r + r_1)(r + r_2) \frac{|P_1 P_2|^2}{r^2}. \end{aligned}$$

Korijenovanjem gornje jednakosti dobivamo traženi izraz

$$t_{12}^v = \frac{|P_1P_2|}{r} \sqrt{(r+r_1)(r+r_2)}.$$

c) Neka kružnica  $k_1(O_1, r_1)$  dodiruje kružnicu  $k(O, r)$  iznutra u točki  $P_1$  i neka kružnica  $k_2(O_2, r_2)$  dodiruje kružnicu  $k(O, r)$  izvana u točki  $P_2$ , kao na Slici 3.8. BSO, pretpostavimo da je  $r_1 \geq r_2$ . Neka unutarnja zajednička tangenta kružnica  $k_1$  i  $k_2$  dodiruje te kružnice redom u točkama  $A_1$  i  $B_1$  te neka je  $A_2$  ortogonalna projekcija točke  $O_2$  na pravac  $O_1A_1$ . Prema Pitagorinom poučku, za  $\triangle O_1O_2A_2$  vrijedi

$$(t_{12}^u)^2 = |A_1B_1|^2 = |O_1O_2|^2 - (r_1 + r_2)^2. \quad (3.3)$$



Slika 3.8: Kružnica  $k_1$  dodiruje kružnicu  $k$  iznutra, a kružnica  $k_2$  izvana.

Označimo  $\angle O_1OO_2 = \alpha$ . Primjenom poučka o kosinusu, za  $\triangle O_1OO_2$  vrijedi

$$|O_1O_2|^2 = (r - r_1)^2 + (r + r_2)^2 - 2(r - r_1)(r + r_2) \cos \alpha.$$

Primjenom poučka o kosinusu, za jednakokrani  $\triangle OP_1P_2$  vrijedi

$$|P_1P_2|^2 = 2r^2(1 - \cos \alpha)$$

$$\Rightarrow 1 - \cos \alpha = \frac{|P_1P_2|^2}{2r^2}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = 1 - \frac{|P_1P_2|^2}{2r^2}.$$



Uvrštavanjem  $|O_1O_2|^2$  i  $\cos \alpha$  u (3.3) slijedi

$$\begin{aligned}
(t_{12}^u)^2 &= (r - r_1)^2 + (r + r_2)^2 - 2(r - r_1)(r + r_2) \cos \alpha - (r_1 + r_2)^2 \\
&= (r - r_1)^2 + (r + r_2)^2 - (r_1 + r_2)^2 - 2(r - r_1)(r + r_2) \left(1 - \frac{|P_1P_2|^2}{2r^2}\right) \\
&= (r - r_1)^2 + (r + r_2)^2 - (r_1 + r_2)^2 - 2(r - r_1)(r + r_2) \cdot 1 \\
&\quad + (r - r_1)(r + r_2) \frac{|P_1P_2|^2}{r^2} \\
&= r^2 - 2rr_1 + r_1^2 + r^2 + 2rr_2 + r_2^2 - (r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2) \\
&\quad - 2(r^2 + rr_2 - rr_1 - r_1r_2) + (r - r_1)(r + r_2) \frac{|P_1P_2|^2}{r^2} \\
&= (r - r_1)(r + r_2) \frac{|P_1P_2|^2}{r^2}.
\end{aligned}$$

Korijenovanjem gornje jednakosti dobivamo traženi izraz

$$t_{12}^u = \frac{|P_1P_2|}{r} \sqrt{(r - r_1)(r + r_2)}.$$

d) Neka kružnica  $k_2(O_2, r_2)$  dodiruje kružnicu  $k(O, r)$  iznutra u točki  $P_2$  i neka kružnica  $k_1(O_1, r_1)$  dodiruje kružnicu  $k(O, r)$  izvana u točki  $P_1$ . Dokazuje se analogno kao c), samo zamijenimo kružnice  $k_1$  i  $k_2$ , čime dobivamo traženi izraz

$$t_{12}^u = \frac{|P_1P_2|}{r} \sqrt{(r + r_1)(r - r_2)}.$$

□

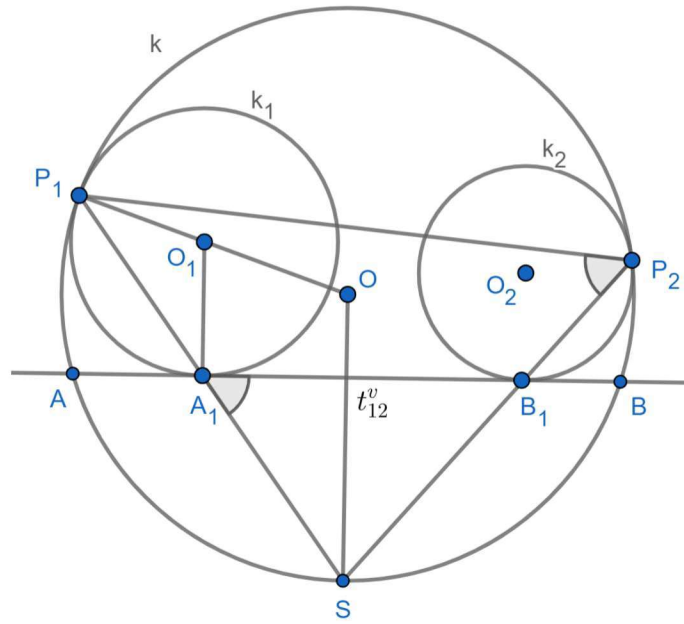
Slijedi dokaz Teorema 6 pomoću sličnosti, preuzet iz [6].

*Dokaz.* a) Neka kružnice  $k_1(O_1, r_1)$  i  $k_2(O_2, r_2)$  dodiruju kružnicu  $k(O, r)$  iznutra redom u točkama  $P_1$  i  $P_2$ , kao na Slici 3.9. Neka vanjska zajednička tangenta kružnica  $k_1$  i  $k_2$  dodiruje te kružnice redom u točkama  $A_1$  i  $B_1$  te neka su točke  $A$  i  $B$  sjecišta vanjske zajedničke tangente s kružnicom  $k$ . Označimo sa  $S$  točku u kojoj pravac  $P_1A_1$  siječe kružnicu  $k$ .  $\angle O_1P_1A_1 = \angle P_1A_1O_1$  jer su to kutovi uz osnovicu jednako-kračnog trokuta. Analogno je  $\angle OP_1S = \angle P_1SO$ . Kako je  $\angle OP_1S = \angle O_1P_1A_1$ , onda je i  $\angle P_1SO = \angle P_1A_1O_1$ . Prema K-K-K teoremu o sličnosti trokuta,  $\triangle O_1P_1A_1 \sim \triangle OP_1S$ . Stoga slijedi  $O_1A_1 \parallel OS$ . S obzirom da je  $O_1A_1 \perp AB$ , onda je i  $OS \perp AB$  pa je  $S$  polovište luka  $\widehat{AB}$ . Slično, pravac  $P_2B_1$  prolazi točkom  $S$ ,  $\triangle O_2P_2B_1 \sim \triangle OP_2S$  i  $O_2B_1 \parallel OS$ . Nadalje,

$$\angle SA_1B_1 = \angle P_1A_1A = \frac{1}{2} \angle P_1O_1A_1 = \frac{1}{2} \angle P_1OS = \angle SP_2P_1.$$

Prema K-K-K teoremu o sličnosti trokuta,  $\triangle SA_1B_1 \sim \triangle SP_2P_1$ . Stoga slijedi

$$\frac{|A_1B_1|}{|P_2P_1|} = \frac{|SA_1|}{|SP_2|} = \frac{|SB_1|}{|SP_1|}. \quad (3.4)$$

Slika 3.9: Kružnice  $k_1$  i  $k_2$  dodiruju kružnicu  $k$  iznutra.

Kvadriranjem zadnjeg člana iz prethodne jednakosti dobivamo

$$\left(\frac{|SB_1|}{|SP_1|}\right)^2 = \frac{|SB_1|}{|SP_1|} \cdot \frac{|SB_1|}{|SP_1|} = \frac{|SA_1|}{|SP_2|} \cdot \frac{|SB_1|}{|SP_1|}. \quad (3.5)$$

Prema Talesovom teoremu o proporcionalnosti, paralelni pravci  $O_1A_1$  i  $OS$  na krakovima kuta  $\angle OP_1S$  odsjecaju proporcionalne dužine, to jest vrijedi

$$\frac{|P_1A_1|}{|A_1S|} = \frac{|P_1O_1|}{|O_1O|} \Rightarrow |SA_1| = \frac{|OO_1|}{|P_1O_1|} \cdot |P_1A_1|.$$

Također, prema Talesovom teoremu o proporcionalnosti, paralelni pravci  $O_2B_1$  i  $OS$  na krakovima kuta  $\angle OP_2S$  odsjecaju proporcionalne dužine, to jest vrijedi

$$\frac{|P_2B_1|}{|B_1S|} = \frac{|P_2O_2|}{|O_2O|} \Rightarrow |SB_1| = \frac{|OO_2|}{|P_2O_2|} \cdot |P_2B_1|.$$

Uvrštavanjem  $|SA_1|$  i  $|SB_1|$  u (3.5) slijedi

$$\begin{aligned} \left(\frac{|SB_1|}{|SP_1|}\right)^2 &= \frac{|OO_1|}{|P_1O_1|} \cdot \frac{|P_1A_1|}{|SP_2|} \cdot \frac{|OO_2|}{|P_2O_2|} \cdot \frac{|P_2B_1|}{|SP_1|} \\ &= |OO_1| \cdot |OO_2| \cdot \frac{|P_1A_1|}{|P_1S| \cdot |P_1O_1|} \cdot \frac{|P_2B_1|}{|SP_2| \cdot |P_2O_2|} \\ &= |OO_1| \cdot |OO_2| \cdot \frac{1}{|P_1O|} \cdot \frac{1}{|P_2O|} \\ &= \frac{|OO_1| \cdot |OO_2|}{|P_1O| \cdot |P_2O|}. \end{aligned}$$

Korijenovanjem gornje jednakosti dobivamo

$$\frac{|SB_1|}{|SP_1|} = \sqrt{\frac{|OO_1| \cdot |OO_2|}{|P_1O| \cdot |P_2O|}},$$

a zbog (3.4) vrijedi

$$\frac{|A_1B_1|}{|P_2P_1|} = \sqrt{\frac{|OO_1| \cdot |OO_2|}{|P_1O| \cdot |P_2O|}}.$$

Uočimo,

$$\begin{aligned} |A_1B_1| &= t_{12}^v, \\ |OO_1| &= r - r_1, \\ |OO_2| &= r - r_2, \\ |P_1O| &= |P_2O| = r. \end{aligned}$$

Dakle,

$$\begin{aligned} \frac{t_{12}^v}{|P_1P_2|} &= \sqrt{\frac{(r - r_1)(r - r_2)}{r^2}} \\ \Rightarrow t_{12}^v &= \frac{|P_1P_2|}{r} \sqrt{(r - r_1)(r - r_2)}. \end{aligned}$$

Slično se mogu dokazati i ostali slučajevi. □

Uočimo, ako kružnice  $k_1$  i  $k_2$  dodiruju kružnicu  $k$  s iste strane (obje iznutra ili obje izvana), onda je  $t_{12}$  duljina njihove vanjske zajedničke tangente. Ako kružnice  $k_1$  i  $k_2$  dodiruju kružnicu  $k$  s različitih strana (jedna iznutra, a druga izvana), onda je  $t_{12}$  duljina njihove unutarnje zajedničke tangente.

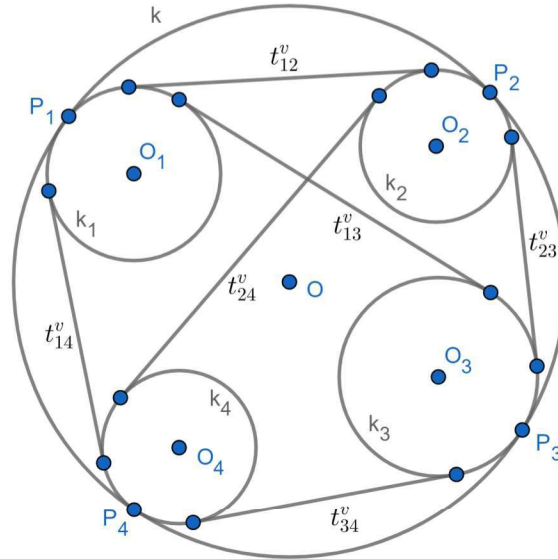
Osim toga, ako kružnica  $k_i$ ,  $i = 1, 2$ , dodiruje kružnicu  $k$  izvana, onda je udaljenost njihovih središta jednaka zbroju njihovih radijusa. Ako kružnica  $k_i$ ,  $i = 1, 2$ , dodiruje kružnicu  $k$  iznutra, onda je udaljenost njihovih središta jednaka razlici njihovih radijusa.



**Teorem 7 (Caseyev teorem, vidjeti [6]).** *Ako kružnice  $k_1(O_1, r_1)$ ,  $k_2(O_2, r_2)$ ,  $k_3(O_3, r_3)$  i  $k_4(O_4, r_4)$  dodiruju kružnicu  $k(O, r)$  iznutra redom u točkama  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  i  $P_4$ , onda vrijedi*

$$t_{12}^v \cdot t_{34}^v + t_{14}^v \cdot t_{23}^v - t_{13}^v \cdot t_{24}^v = 0, \quad (3.6)$$

gdje je  $t_{ij}^v$  duljina vanjske zajedničke tangente kružnica  $k_i$  i  $k_j$ , za  $i, j = 1, 2, 3, 4$ ,  $i \neq j$ .



Slika 3.10: Sve četiri kružnice dodiruju kružnicu  $k$  iznutra.

Teorem se dokazuje pomoću Ptolomejeva teorema za tetivni četverokut čiji su vrhovi dirališta kružnica  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  i  $k_4$  s kružnicom  $k$ , tako da se duljine stranica i dijagonala četverokuta zamijene s duljinama zajedničkih tangenti kružnica.

*Dokaz.* Prema Ptolomejevu teoremu, za tetivni četverokut  $P_1P_2P_3P_4$  vrijedi

$$|P_1P_2| \cdot |P_3P_4| + |P_1P_4| \cdot |P_2P_3| = |P_1P_3| \cdot |P_2P_4|. \quad (3.7)$$

Kružnice  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  i  $k_4$  dodiruju kružnicu  $k$  iznutra pa su duljine njihovih vanjskih zajedničkih tangenti dane s  $t_{ij}^v = \frac{|P_iP_j|}{r} \sqrt{(r-r_i)(r-r_j)}$ , za  $i, j = 1, 2, 3, 4$ ,  $i \neq j$ . Iz toga je

$$|P_1P_2| = \frac{t_{12}^v \cdot r}{\sqrt{(r-r_1)(r-r_2)}},$$

$$|P_3P_4| = \frac{t_{34}^v \cdot r}{\sqrt{(r-r_3)(r-r_4)}},$$

$$|P_1P_4| = \frac{t_{14}^v \cdot r}{\sqrt{(r-r_1)(r-r_4)}},$$

$$|P_2P_3| = \frac{t_{23}^v \cdot r}{\sqrt{(r-r_2)(r-r_3)}}.$$

$$|P_1P_3| = \frac{t_{13}^v \cdot r}{\sqrt{(r-r_1)(r-r_3)}},$$

$$|P_2P_4| = \frac{t_{24}^v \cdot r}{\sqrt{(r-r_2)(r-r_4)}}.$$

Uvrštavanjem prethodnog u jednakost (3.7) slijedi

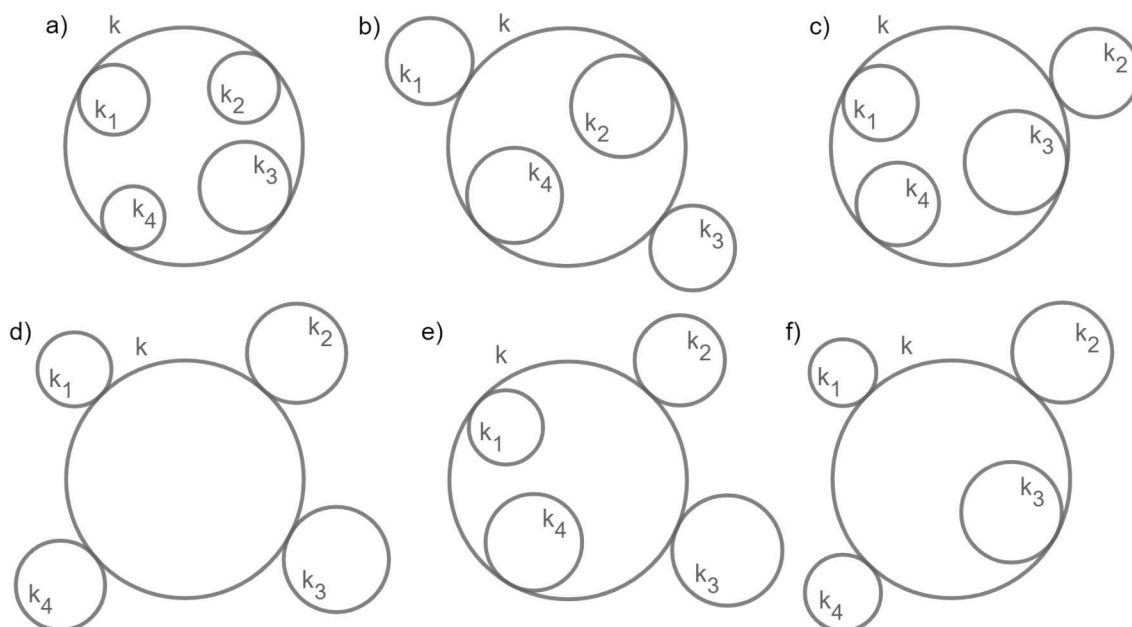
$$\begin{aligned} & \frac{t_{12}^v \cdot r}{\sqrt{(r-r_1)(r-r_2)}} \cdot \frac{t_{34}^v \cdot r}{\sqrt{(r-r_3)(r-r_4)}} + \frac{t_{14}^v \cdot r}{\sqrt{(r-r_1)(r-r_4)}} \cdot \frac{t_{23}^v \cdot r}{\sqrt{(r-r_2)(r-r_3)}} \\ &= \frac{t_{13}^v \cdot r}{\sqrt{(r-r_1)(r-r_3)}} \cdot \frac{t_{24}^v \cdot r}{\sqrt{(r-r_2)(r-r_4)}}, \end{aligned}$$

a množenjem s  $\frac{\sqrt{(r-r_1)(r-r_2)(r-r_3)(r-r_4)}}{r^2}$  dobivamo

$$t_{12}^v \cdot t_{34}^v + t_{14}^v \cdot t_{23}^v = t_{13}^v \cdot t_{24}^v,$$

odnosno traženi izraz (3.6). □

Caseyev teorem najčešće je iskazan u prethodnom obliku, ali može se proširiti i na slučajeve kada sve ili neke od kružnica  $k_i$ , za  $i = 1, 2, 3, 4$ , dodiruju kružnicu  $k$  izvana. Prema tome, postoji šest slučajeva.



Slika 3.11: Šest slučajeva dodira kružnica  $k_i$ , za  $i = 1, 2, 3, 4$ , s kružnicom  $k$ .

**Teorem 8 (Opći oblik Caseyeva teorema, vidjeti [2, Theorem 2]).** *Kružnice  $k_1(O_1, r_1)$ ,  $k_2(O_2, r_2)$ ,  $k_3(O_3, r_3)$  i  $k_4(O_4, r_4)$  dodiruju kružnicu  $k(O, r)$  iznutra ili izvana redom u točkama  $P_1, P_2, P_3$  i  $P_4$  ako i samo ako vrijedi*

$$t_{12} \cdot t_{34} \pm t_{14} \cdot t_{23} \pm t_{13} \cdot t_{24} = 0,$$

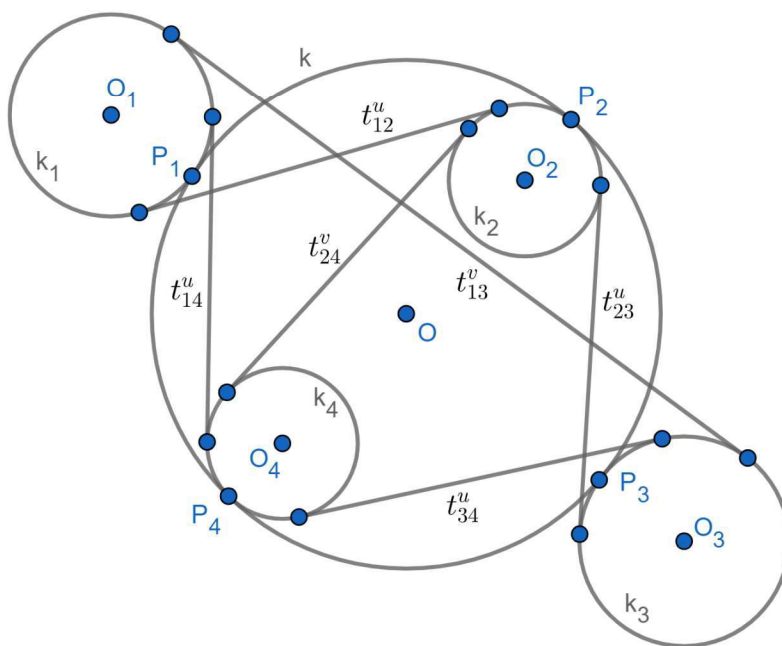
gdje je  $t_{ij}$  duljina vanjske ili unutarnje zajedničke tangente kružnica  $k_i$  i  $k_j$ , za  $i, j = 1, 2, 3, 4, i \neq j$ .

*Dokaz.* Prokomentirat ćemo dokaz nužnosti, odnosno prvog smjera ovog teorema, podjelom na slučajeve. Dokaz dovoljnosti, koja se naziva i obrat Caseyeva teorema, mnogo je kompliciraniji i koristi inverziju.

a) Kružnicu  $k$  iznutra dodiruju sve četiri kružnice. Tvrdnja je dokazana u Teoremu 7.

b) Prema Ptolomejevom teoremu, za tetivni četverokut  $P_1P_2P_3P_4$  vrijedi

$$|P_1P_2| \cdot |P_3P_4| + |P_1P_4| \cdot |P_2P_3| = |P_1P_3| \cdot |P_2P_4|. \quad (3.8)$$



Slika 3.12: Dvije nasuprotne kružnice dodiruju kružnicu  $k$  izvana, a dvije iznutra.

Kružnice  $k_1$  i  $k_3$  dodiruju kružnicu  $k$  izvana, a kružnice  $k_2$  i  $k_4$  iznutra, kao na Slici 3.12, pa su duljine njihovih zajedničkih tangenti dane s

$$t_{12}^u = \frac{|P_1P_2|}{r} \sqrt{(r+r_1)(r-r_2)},$$

$$t_{34}^u = \frac{|P_3P_4|}{r} \sqrt{(r+r_3)(r-r_4)},$$

$$\begin{aligned}
t_{14}^u &= \frac{|P_1 P_4|}{r} \sqrt{(r+r_1)(r-r_4)}, \\
t_{23}^u &= \frac{|P_2 P_3|}{r} \sqrt{(r-r_2)(r+r_3)}, \\
t_{13}^v &= \frac{|P_1 P_3|}{r} \sqrt{(r+r_1)(r+r_3)}, \\
t_{24}^v &= \frac{|P_2 P_4|}{r} \sqrt{(r-r_2)(r-r_4)}.
\end{aligned}$$

Iz toga je

$$\begin{aligned}
|P_1 P_2| &= \frac{t_{12}^u \cdot r}{\sqrt{(r+r_1)(r-r_2)}}, \\
|P_3 P_4| &= \frac{t_{34}^u \cdot r}{\sqrt{(r+r_3)(r-r_4)}}, \\
|P_1 P_4| &= \frac{t_{14}^u \cdot r}{\sqrt{(r+r_1)(r-r_4)}}, \\
|P_2 P_3| &= \frac{t_{23}^u \cdot r}{\sqrt{(r-r_2)(r+r_3)}}, \\
|P_1 P_3| &= \frac{t_{13}^v \cdot r}{\sqrt{(r+r_1)(r+r_3)}}, \\
|P_2 P_4| &= \frac{t_{24}^v \cdot r}{\sqrt{(r-r_2)(r-r_4)}}.
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem prethodnog u jednakost (3.8) slijedi

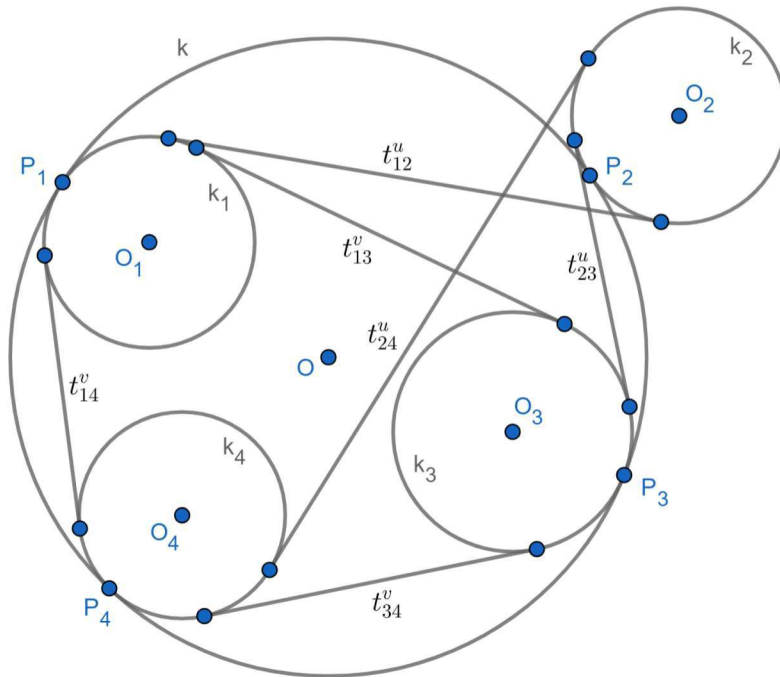
$$\begin{aligned}
&\frac{t_{12}^u \cdot r}{\sqrt{(r+r_1)(r-r_2)}} \cdot \frac{t_{34}^u \cdot r}{\sqrt{(r+r_3)(r-r_4)}} + \frac{t_{14}^u \cdot r}{\sqrt{(r+r_1)(r-r_4)}} \cdot \frac{t_{23}^u \cdot r}{\sqrt{(r-r_2)(r+r_3)}} \\
&= \frac{t_{13}^v \cdot r}{\sqrt{(r+r_1)(r+r_3)}} \cdot \frac{t_{24}^v \cdot r}{\sqrt{(r-r_2)(r-r_4)}},
\end{aligned}$$

a množenjem s  $\frac{\sqrt{(r+r_1)(r-r_2)(r+r_3)(r-r_4)}}{r^2}$  dobivamo  $t_{12}^u \cdot t_{34}^u + t_{14}^u \cdot t_{23}^u = t_{13}^v \cdot t_{24}^v$ , odnosno

$$t_{12}^u \cdot t_{34}^u + t_{14}^u \cdot t_{23}^u - t_{13}^v \cdot t_{24}^v = 0.$$

c) Prema Ptolomejevom teoremu, za tetivni četverokut  $P_1 P_2 P_3 P_4$  vrijedi

$$|P_1 P_2| \cdot |P_3 P_4| + |P_1 P_4| \cdot |P_2 P_3| = |P_1 P_3| \cdot |P_2 P_4|. \quad (3.9)$$

Slika 3.13: Tri kružnice dodiruju kružnicu  $k$  iznutra, a jedna izvana.

Kružnice  $k_1$ ,  $k_3$  i  $k_4$  dodiruju kružnicu  $k$  iznutra, a kružnica  $k_2$  izvana, kao na Slici 3.13, pa su duljine njihovih zajedničkih tangenti dane s

$$t_{12}^u = \frac{|P_1 P_2|}{r} \sqrt{(r - r_1)(r + r_2)},$$

$$t_{34}^v = \frac{|P_3 P_4|}{r} \sqrt{(r - r_3)(r - r_4)},$$

$$t_{14}^v = \frac{|P_1 P_4|}{r} \sqrt{(r - r_1)(r - r_4)},$$

$$t_{23}^u = \frac{|P_2 P_3|}{r} \sqrt{(r + r_2)(r - r_3)},$$

$$t_{13}^v = \frac{|P_1 P_3|}{r} \sqrt{(r - r_1)(r - r_3)},$$

$$t_{24}^u = \frac{|P_2 P_4|}{r} \sqrt{(r + r_2)(r - r_4)}.$$

Iz toga je

$$|P_1 P_2| = \frac{t_{12}^u \cdot r}{\sqrt{(r - r_1)(r + r_2)}},$$

$$|P_3 P_4| = \frac{t_{34}^v \cdot r}{\sqrt{(r - r_3)(r - r_4)}},$$

$$|P_1 P_4| = \frac{t_{14}^v \cdot r}{\sqrt{(r - r_1)(r - r_4)}},$$



$$|P_2P_3| = \frac{t_{23}^u \cdot r}{\sqrt{(r+r_2)(r-r_3)}},$$

$$|P_1P_3| = \frac{t_{13}^v \cdot r}{\sqrt{(r-r_1)(r-r_3)}},$$

$$|P_2P_4| = \frac{t_{24}^u \cdot r}{\sqrt{(r+r_2)(r-r_4)}}.$$

Uvrštavanjem prethodnog u (3.9) slijedi

$$\begin{aligned} & \frac{t_{12}^u \cdot r}{\sqrt{(r-r_1)(r+r_2)}} \cdot \frac{t_{34}^v \cdot r}{\sqrt{(r-r_3)(r-r_4)}} + \frac{t_{14}^v \cdot r}{\sqrt{(r-r_1)(r-r_4)}} \cdot \frac{t_{23}^u \cdot r}{\sqrt{(r+r_2)(r-r_3)}} \\ &= \frac{t_{13}^v \cdot r}{\sqrt{(r-r_1)(r-r_3)}} \cdot \frac{t_{24}^u \cdot r}{\sqrt{(r+r_2)(r-r_4)}}, \end{aligned}$$

a množenjem s  $\frac{\sqrt{(r-r_1)(r+r_2)(r-r_3)(r-r_4)}}{r^2}$  dobivamo  $t_{12}^u \cdot t_{34}^v + t_{14}^v \cdot t_{23}^u = t_{13}^v \cdot t_{24}^u$ , odnosno

$$t_{12}^u \cdot t_{34}^v + t_{14}^v \cdot t_{23}^u - t_{13}^v \cdot t_{24}^u = 0.$$

d) Kružnicu  $k$  izvana dodiruju sve četiri kružnice. Dokaz se provodi slično kao u prethodnim slučajevima, čime dobivamo

$$t_{12}^v \cdot t_{34}^u + t_{14}^u \cdot t_{23}^v - t_{13}^u \cdot t_{24}^v = 0.$$

e) Kružnice  $k_1$  i  $k_4$  dodiruju kružnicu  $k$  iznutra, a kružnice  $k_2$  i  $k_3$  izvana. Dokaz se provodi slično kao u prethodnim slučajevima, čime dobivamo

$$t_{12}^u \cdot t_{34}^u + t_{14}^v \cdot t_{23}^v - t_{13}^u \cdot t_{24}^u = 0.$$

f) Kružnica  $k_3$  dodiruje kružnicu  $k$  iznutra, a kružnice  $k_1$ ,  $k_2$  i  $k_4$  izvana. Dokaz se provodi slično kao u prethodnim slučajevima, čime dobivamo

$$t_{12}^v \cdot t_{34}^u + t_{14}^v \cdot t_{23}^u - t_{13}^u \cdot t_{24}^v = 0.$$

□

Uočimo, kada se kružnice  $k_i$ , za  $i = 1, 2, 3, 4$ , svedu na točke, dobiva se upravo Ptolemejev teorem.

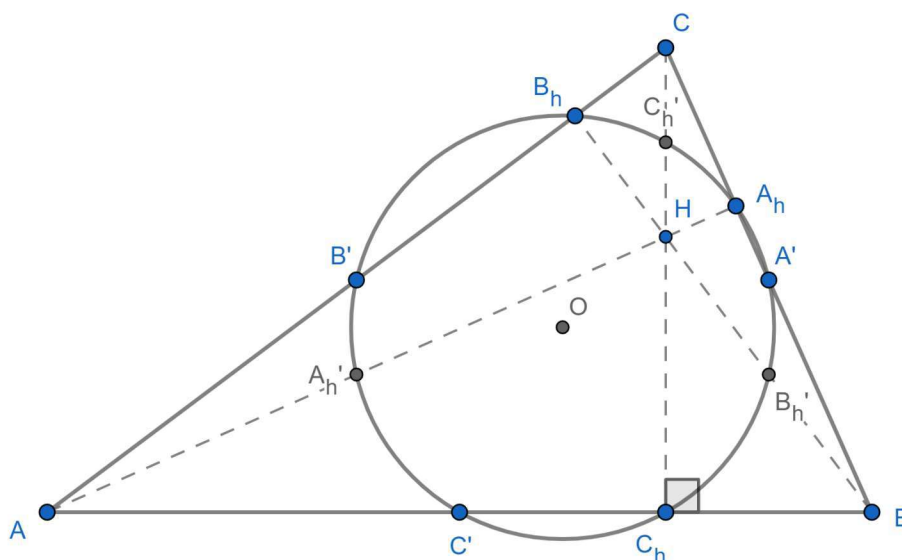


## 4 | Feuerbachov teorem

Švicarski matematičar i fizičar Leonhard Euler 1765. godine dokazao je da šest točaka, nožišta visina trokuta i polovišta stranica trokuta, leže na jednoj kružnici. Prema njemu je kružnica dobila naziv **Eulerova kružnica**. U članku Brianchona i Ponceleta objavljenom 1820. godine navodi se da još tri točke, polovišta spojnice vrhova i ortocentra trokuta, također leže na Eulerovoj kružnici. Oni po prvi put upotrebljavaju naziv **kružnica devet točaka**.

**Definicija 3** (vidjeti [3]). *Ortocentar trokuta sjecište je visina trokuta.*

**Teorem 9 (Teorem o kružnici devet točaka, vidjeti [5, Teorem 1]).** *Neka su točke  $A'$ ,  $B'$  i  $C'$  polovišta stranica  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$  i  $\overline{AB}$ ;  $A_h$ ,  $B_h$ ,  $C_h$  nožišta visina te  $H$  ortocentar  $\triangle ABC$ . Neka su  $A'_h$ ,  $B'_h$  i  $C'_h$  polovišta dužina  $\overline{HA}$ ,  $\overline{HB}$  i  $\overline{HC}$ . Devet točaka  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $A_h$ ,  $B_h$ ,  $C_h$ ,  $A'_h$ ,  $B'_h$  i  $C'_h$  leže na jednoj kružnici, čiji su promjeri  $\overline{A'A'_h}$ ,  $\overline{B'B'_h}$ ,  $\overline{C'C'_h}$ .*

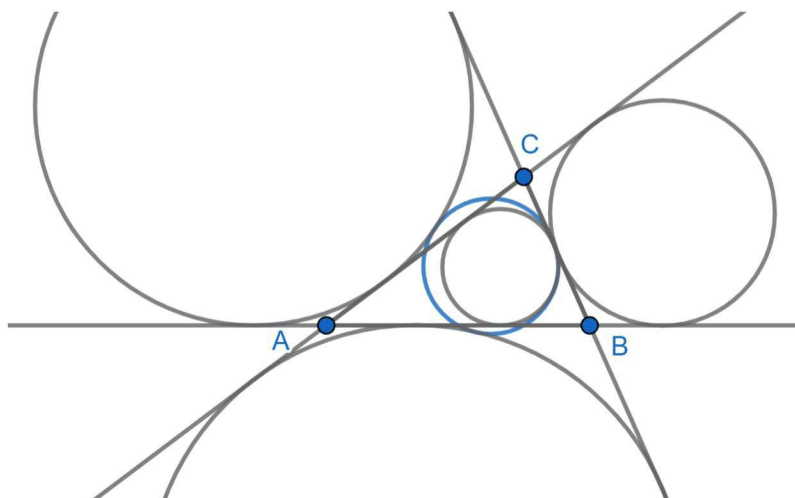


Slika 4.1: Kružnica devet točaka.

Središte kružnice devet točaka polovište je dužine koja spaja ortocentar trokuta sa središtem trokutu opisane kružnice, a duljina polumjera kružnice devet točaka jednaka je polovini duljine polumjera trokutu opisane kružnice.



Njemački matematičar i profesor Karl Wilhelm Feuerbach 1822. godine dokazao je da kružnica devet točaka dodiruje trokutu upisanu i sve tri trokutu pripisane kružnice, što je jedno od najvažnijih otkrića elementarne geometrije u posljednja dva stoljeća. Najkraći mogući dokaz Feuerbachova teorema koristi upravo obrat Caseyeva teorema.



Slika 4.2: Kružnica devet točaka.

Prisjetimo se teorema o srednjici trokuta, koji će biti korišten u dokazu Feuerbachova teorema.

**Definicija 4** (vidjeti [3]). *Dužina koja spaja polovišta dviju stranica trokuta naziva se srednjica trokuta.*

**Teorem 10 (Teorem o srednjici trokuta,** vidjeti [3, Teorem 2.12]). *Srednjica trokuta paralelna je trećoj stranici trokuta, a po duljini jednaka polovini duljine te stranice.*

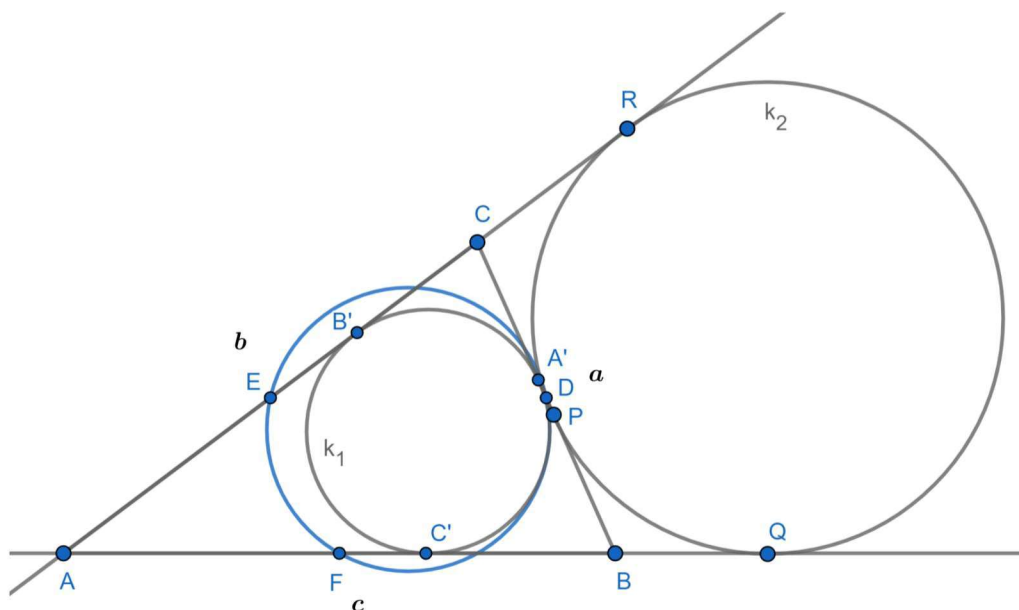
Sada se može dokazati Feuerbachov teorem.

**Teorem 11 (Feuerbachov teorem,** vidjeti [5, Teorem 6]). *Kružnica devet točaka dodiruje trokutu upisanu i sve tri trokutu pripisane kružnice.*

Pri tome trokutu pripisane kružnice dodiruju kružnicu devet točaka izvana, dok ju trokutu upisana kružnica dodiruje iznutra.

*Dokaz.* Pretpostavimo da je dan  $\triangle ABC$  sa stranicama duljine  $a = |BC|$ ,  $b = |AC|$ ,  $c = |AB|$  te poluopsegom  $s = \frac{a+b+c}{2}$ . Označimo polovišta stranica  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  i  $\overline{AB}$  redom s  $D$ ,  $E$  i  $F$ . Točke  $D$ ,  $E$  i  $F$  shvaćamo kao kružnice radijusa nula.

1) Dokažimo da se kružnica devet točaka i trokutu upisana kružnica  $k_1$  dodiruju. Neka kružnica  $k_1$  dodiruje stranice  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  i  $\overline{AB}$  redom u točkama  $A'$ ,  $B'$  i  $C'$ , kao na Slici 4.3.



Slika 4.3: Kružnica devet točaka dodiruje kružnice  $k_1$  i  $k_2$ .

Koristeći Teorem 4, možemo označiti  $|AB'| = |AC'| = x$ ,  $|BC'| = |BA'| = y$  i  $|CA'| = |CB'| = z$ . Dakle,

$$x + y = |AB| = c \Rightarrow x = c - y,$$

$$y + z = |BC| = a \Rightarrow y = a - z,$$

$$z + x = |AC| = b \Rightarrow z = b - x.$$

Iz toga slijedi

$$x = c - a + b - x \Rightarrow x = \frac{c - a + b}{2},$$

$$y = a - b + c - y \Rightarrow y = \frac{a - b + c}{2},$$

$$z = b - c + a - z \Rightarrow z = \frac{b - c + a}{2},$$

to jest  $x = s - a$ ,  $y = s - b$  i  $z = s - c$ . Prema teoremu o srednjici trokuta je

$$t_{DE} = |DE| = \frac{1}{2} \cdot |AB| = \frac{c}{2},$$

$$t_{EF} = |EF| = \frac{1}{2} \cdot |BC| = \frac{a}{2},$$

$$t_{FD} = |FD| = \frac{1}{2} \cdot |AC| = \frac{b}{2},$$

gdje je npr.  $t_{DE}$  duljina zajedničke tangente kružnica  $D$  i  $E$ . Zatim,

$$\begin{aligned} t_{F1} &= |FC'| = ||FB| - |BC'| = \left| \frac{c}{2} - y \right| = \frac{|c - 2(s - b)|}{2} = \frac{|b - a|}{2}, \\ t_{D1} &= |DA'| = ||DC| - |CA'| = \left| \frac{a}{2} - z \right| = \frac{|a - 2(s - c)|}{2} = \frac{|c - b|}{2}, \\ t_{E1} &= |EB'| = ||EA| - |AB'| = \left| \frac{b}{2} - x \right| = \frac{|b - 2(s - a)|}{2} = \frac{|a - c|}{2}, \end{aligned}$$

gdje je npr.  $t_{F1}$  duljina zajedničke tangente kružnica  $F$  i  $k_1$ . BSO, pretpostavimo da je  $a \leq b \leq c$ . Pomoću prethodnih izraza dobivamo

$$\begin{aligned} t_{DE} \cdot t_{F1} + t_{EF} \cdot t_{D1} &= \frac{c}{2} \cdot \frac{b - a}{2} + \frac{a}{2} \cdot \frac{c - b}{2} \\ &= \frac{c(b - a) + a(c - b)}{4} \\ &= \frac{b(c - a)}{4} \\ &= \frac{b}{2} \cdot \frac{c - a}{2} \\ &= t_{FD} \cdot t_{E1}. \end{aligned}$$

Prema obratu Caseyeva teorema, postoji kružnica koja dodiruje svaku od kružnica  $D$ ,  $E$ ,  $F$  i  $k_1$ . S obzirom da je kružnica koja prolazi točkama  $D$ ,  $E$ ,  $F$  kružnica devet točaka, znači da se kružnica devet točaka i trokutu upisana kružnica  $k_1$  dodiruju.

2) Dokažimo da se trokutu pripisana kružnica  $k_2$  uz stranicu  $\overline{BC}$  i kružnica devet točaka dodiruju. Analogno kao u 1),  $t_{DE} = \frac{c}{2}$ ,  $t_{EF} = \frac{a}{2}$  i  $t_{FD} = \frac{b}{2}$ . Neka kružnica  $k_2$  dodiruje stranicu  $\overline{BC}$  te produžetke stranica  $\overline{AB}$  i  $\overline{AC}$  redom u točkama  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ , kao na Slici 4.3. Prema Teoremu 4, vrijedi  $|AQ| = |AR|$ ,  $|BP| = |BQ|$  i  $|CP| = |CR|$ . Uočimo da je

$$2|AQ| = |AQ| + |AR| = |AB| + |BP| + |PC| + |CA| = 2s \Rightarrow |AQ| = s.$$

Slijedi  $|BQ| = |AQ| - |AB| = s - c$ . Tada je duljina zajedničke tangente kružnica  $F$  i  $k_2$  dana s

$$t_{F2} = |FQ| = |FB| + |BQ| = \frac{c}{2} + (s - c) = \frac{b + a}{2}.$$

Slično je s  $t_{E2} = \frac{a + c}{2}$  dana duljina zajedničke tangente kružnica  $E$  i  $k_2$ . Zatim je s

$$t_{D2} = |DP| = |DB| - |BP| = |DB| - |BQ| = \frac{a}{2} - (s - c) = \frac{c - b}{2}$$

dana duljina zajedničke tangente kružnica  $D$  i  $k_2$ .

Pomoću prethodnih izraza dobivamo

$$\begin{aligned}
 t_{FD} \cdot t_{E2} + t_{EF} \cdot t_{D2} &= \frac{b}{2} \cdot \frac{a+c}{2} + \frac{a}{2} \cdot \frac{c-b}{2} \\
 &= \frac{b(a+c) + a(c-b)}{4} \\
 &= \frac{c(b+a)}{4} \\
 &= \frac{c}{2} \cdot \frac{b+a}{2} \\
 &= t_{DE} \cdot t_{F2}.
 \end{aligned}$$

Prema obratu Caseyeva teorema, postoji kružnica koja dodiruje svaku od kružnica  $D$ ,  $E$ ,  $F$  i  $k_2$ . S obzirom da je kružnica koja prolazi točkama  $D$ ,  $E$ ,  $F$  kružnica devet točaka, znači da se trokutu pripisana kružnica  $k_2$  i kružnica devet točaka dodiruju.

Analogno se dokazuje da kružnica devet točaka dodiruje i preostale dvije trokutu pripisane kružnice.

□

Dokaz Feuerbachova teorema preuzet je iz [6, Example 2].



# Literatura

- [1] M. EVANS, S. AVERY, D. WALLACE, K. LIPSON, *Essential Advanced General Mathematics*, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, MELBOURNE, 2011.
- [2] L. GONZÁLEZ, *Casey's Theorem and its Applications*, 2011, DOSTUPNO NA [https://geometry.ru/articles/Luis\\_Casey.pdf](https://geometry.ru/articles/Luis_Casey.pdf)
- [3] D. ILIŠEVIĆ, M. BOMBARDELLI, *Elementarna geometrija*, 2007, DOSTUPNO NA <https://web.math.pmf.unizg.hr/~ilisevic/Slike/EGskripta.pdf>
- [4] R. A. JOHNSON, *Advanced Euclidean Geometry*, DOVER BOOKS ON MATHEMATICS, NEW YORK, 1960.
- [5] Z. KOLAR-BEGOVIĆ, A. TONKOVIĆ, *Feuerbachov teorem*, OSJEČKI MATEMATIČKI LIST, **9**(2009), 21-30.
- [6] K. Y. LI, *Casey's Theorem*, MATHEMATICAL EXCALIBUR, **16**(2012), 1-4.
- [7] *MacTutor*, DOSTUPNO NA <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/>





# Sažetak

Irski matematičar John Casey, osnivač moderne geometrije trokuta i kružnice, najpoznatiji je po svojoj generalizaciji Ptolomejeva teorema, koja je prema njemu dobila naziv Caseyev teorem. Zato je u ovom radu prije svega iskazan i dokazan Ptolomejev teorem. Radi potpunog razumijevanja Caseyeva teorema, definirane su unutarnje i vanjske zajedničke tangente dviju kružnica te su izvedene formule duljina između dirališta zajedničkih tangenti s kružnicama. Nakon toga, iskazan je i dokazan Caseyev teorem. Za kraj je definiran pojam kružnice devet točaka i primijenjen obrat Caseyeva teorema na dokaz Feuerbachova teorema.

## Ključne riječi

tetivni četverokut, kružnica, kružnica devet točaka, zajednička tangenta kružnica, Ptolomejev teorem, Caseyev teorem, Feuerbachov teorem





# Casey's theorem

## Summary

Irish mathematician John Casey, founder of the Modern Geometry of the circle and the triangle, is best known for his generalization of Ptolemy's theorem, which is named Casey's theorem after him. Therefore, this paper first states and proves Ptolemy's theorem. For a complete understanding of Casey's theorem, internal and external common tangents of two circles are defined, and formulas for the lengths between the points of tangency of the common tangents with the circles are derived. Following this, Casey's theorem is stated and proved. Finally, the concept of the nine-point circle is defined, and the converse of Casey's theorem is applied to the proof of Feuerbach's theorem.

## Keywords

cyclic quadrilateral, circle, nine-point circle, common tangent of circles, Ptolemy's theorem, Casey's theorem, Feuerbach's theorem



# Životopis

Moje ime je Lidija Lombarović. Rođena sam 27. svibnja 2000. godine u Vinkovcima. Godine 2007. upisujem Osnovnu školu Ivana Mažuranića u Vinkovcima. Godine 2015. upisujem Gimnaziju Matije Antuna Reljkovića u Vinkovcima, prirodoslovno-matematički smjer. Srednjoškolsko obrazovanje završavam maturiranjem 2019. godine. Obrazovanje nastavljam 2020. godine upisom Prijediplomskog studija Matematike na Fakultetu primijenjene matematike i informatike u Osijeku.