# Familije krivulja na plohi

**Skok Brkić, Sara**

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike

Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

# Familije krivulja na plohi

Završni rad

Mentor:
**doc. dr. sc. Ljiljana Primorac Gajčić**

Student:
**Sara Skok Brkić**

Osijek, 2024.

# Sadržaj

# 1 | Uvod

Krivulje se kao matematički pojam promatraju od davnina, ali na razvoj diferencijalne geometrije posebno je utjecao razvoj integralnog računa koji je omogućio rješavanje problema pronalaska duljine luka ravninskih krivulja i površine ravninskih likova. Na razvoj diferencijalne geometrije utjecali su Gottfried Leibniz i Isaac Newton koji su u 17. stoljeću izveli formulu za zakrivljenost krivulja u ravnini, a nakon njih u 18. stoljeću isto je napravio Leonhard Euler za krivulje u prostoru. Rad njemačkog matematičara Carla Friedricha Gaussa u 18. stoljeću predstavlja veliki napredak i uvođenje pojma Gaussove zakrivljenosti plohe te poznatog Gaussovog veličanstvenog teorema.

Ovaj rad prvenstveno se bavi familijama krivulja na plohi, pri čemu posebno ističemo specijalne krivulje: krivulje zakrivljenosti te asimptotske i geodetske krivulje. Njih možemo opisati kao krivulje na plohi zadane određenim diferencijalnim jednadžbama i koje posjeduju određena geometrijska svojstva.

Ovaj završni rad je podijeljen u dva dijela. U prvom poglavlju navodimo osnovne pojmove bitne za razumijevanje lokalne teorije ploha kao što su ploha, krivulja na plohi te fundamentalne forme plohe. U drugom djelu bavimo se familijama krivulja gdje ih definiramo i navodimo bitne teoreme. Nakon toga uvodimo pojmove ortogonalne trajektorije i dvostrukih familija krivulja. Navodimo iskaze i dokaze najvažnijih teorema i predstavljenu teoriju ilustriramo na primjeru.

# 2 | Osnovni pojmovi lokalne teorije ploha

Definicije u ovom poglavlju preuzete su iz [1] i [2].

## 2.1 Ploha

**Definicija 1.** *Podskup $S \subset \mathbb{R}^3$ je ploha ako za svaki $p \in S$ postoji okolina $V \subset \mathbb{R}^3$ i preslikavanje $\mathbf{x} : U \to V \cap S$, s otvorenog skupa $U$ u $V \cap S$ takvo da je $\mathbf{x}$ glatki homeomorfizam.*

Preslikavanje $\mathbf{x}$ naziva se parametrizacijom ili kartom okoline točke $p$ plohe $S$. Preslikavanje $\mathbf{x}$ je glatko što znači da ako zapišemo $\mathbf{x}$ kao $\mathbf{x}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)$, gdje je $(u,v) \in U$, funkcije $x(u,v), y(u,v)$ i $z(u,v)$ imaju neprekidne parcijalne derivacije svakog reda na $U$. Kako je $\mathbf{x}$ neprekidno preslikavanje, postoji inverzno preslikavanje $x^{-1} : V \cap S \to U$ koje je također neprekidno, tj. $x^{-1}$ je restrikcija neprekidnog preslikavanja $F : W \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ na otvorenom skupu $W$ koji sadrži $V \cap S$. Diferencijal preslikavanja $\mathbf{x}$ je linearni operator kojeg možemo prikazati matricom:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}.$$

**Definicija 2.** *Kažemo da je ploha $\mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^3$ regularna u točki $(u,v) \in U$ ukoliko je $x_u(u,v) \times x_v(u,v) \neq 0$, gdje je $x_u = \frac{\partial x}{\partial u}$ i $x_v = \frac{\partial x}{\partial v}$. U suprotom kažemo da je ploha $\mathbf{x}$ singularna u točki $(u,v)$. Kažemo da je ploha regularna ukoliko je regularna u svakoj točki $(u,v) \in U$.*

Ploha će biti regularna ako i samo ako je diferencijal injektivan što vrijedi ako i samo ako su vektori $x_u = \frac{\partial x}{\partial u}$ i $x_v = \frac{\partial x}{\partial v}$ linearno nezavisni.
U sljedeće dvije definicije definirajmo eksplicitno i implicitno zadane plohe.

**Definicija 3.** *Neka je $f : U \to \mathbb{R}$ glatka funkcija, pri čemu je $U \subseteq \mathbb{R}^2$ područje u ravnini. Tada se skup $S = \{(x,y,z) : z = f(x,y)\}$ naziva eksplicitno zadanom plohom. Jednadžba $z = f(x,y)$ naziva se eksplicitnom jednadžbom plohe $S$.*

**Definicija 4.** *Neka je $F : V \to \mathbb{R}$ glatka funkcija, pri čemu je $V \subseteq \mathbb{R}^3$ područje u prostoru. Tada se skup $S = \{(x,y,z) : F(x,y,z) = 0\}$ naziva implicitno zadanom plohom. Jednadžba $F(x,y,z) = 0$ naziva se implicitnom jednadžbom plohe $S$.*

**Definicija 5.** *Neka je $r : U \to \mathbb{R}^3$ parametrizacija regularne plohe. Vektor*

$$N(u,v) = \frac{r_u(u,v) \times r_v(u,v)}{|r_u(u,v) \times r_v(u,v)|}$$

*naziva se vektorom normale plohe $r$ u točki $(u,v) \in U$. Svaki vektor okomit na vektor $N$ naziva se tangencijalnim vektorom plohe $r$ u točki $(u,v) \in U$.*

**Definicija 6.** *Neka je $r : U \to \mathbb{R}^3$ parametrizacija regularne plohe. Ravnina koja prolazi točkom $P = r(u,v)$, a vektor normale joj je vektor $N(u,v)$ plohe, naziva se tangencijalna ravnina plohe $r$ u točki $P = r(u,v)$.*

**Definicija 7.** *Neka je $r : U \to \mathbb{R}^3$ parametrizacija regularne plohe. Pravac koji prolazi točkom $P = r(u,v)$, a vektor smjera mu je vektor $N(u,v)$ plohe, naziva se normala plohe $r$ u točki $P = r(u,v)$.*

## 2.2 Krivulja na plohi

**Definicija 8.** *Svako glatko preslikavanje $c : I \to S, I \subset \mathbb{R}$, nazivamo glatkom krivuljom na plohi.*

**Definicija 9.** *Kažemo da krivulja $c : I \to \mathbb{R}^3$ leži na plohi $r : U \to \mathbb{R}^3$ ako vrijedi $c(I) \subseteq r(U)$.*

**Definicija 10.** *Neka je $r = r(u,v)$ dana ploha. Neka je $v = C$ gdje je $C$ proizvoljna konstanta. Tada vektor položaja $r = r(u,C)$ predstavlja funciju jednog parametra $t$ i stoga $r = (u,C)$ predstavlja krivulju koja leži na plohi $r = r(u,v)$. Takvu krivulju nazivamo parametarska krivulja.*

Ukoliko za glatku krivulju $c : I \to S$ postoje jedinstvene glatke funkcije $u = u(t)$ i $v = v(t)$ tada krivulju možemo parametrizirati kao $c(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$. Također, ukoliko je $\mathbf{x} : U \to V \subset S$ lokalna parametrizacija plohe S i $(u_0, v_0) \in U$ krivulju možemo zadati parametarskim u i v krivuljama, tj. $c(u) = \mathbf{x}(u, v_0)$ i $c(v) = \mathbf{x}(u_0, v)$.
Kako je navedeno u Definiciji 5. svaki vektor okomit na vektor normale plohe u danoj točki naziva se tangencijalnim vektorom plohe. Ukoliko promatramo tangencijalni vektor $v_p$ krivulje $c : I \to S$ u točki $p$ regularne plohe $S$, vrijedi da je $c(0) = p$ i $c'(0) = v_p$.

## 2.3 Prva i druga fundamentalna forma

### 2.3.1 Prva fundamentalna forma

**Definicija 11.** *Neka je $r : U \to \mathbb{R}^3$ regularna ploha, $P = (u,v)$ točka na plohi te neka je $T_p(r)$ tangencijalna ravnina plohe $r$ u točki $P$. Prva fundamentalna forma $I$ plohe $r$ je preslikavanje $I : T_p(r) \times T_p(r) \to \mathbb{R}$ koje paru tangencijalnih vektora $t_1$ i $t_2$ na plohu $r$ u točki $P$ pridružuje njihov skalarni produkt, tj. za koje vrijedi $I(t_1, t_2) = t_1 \cdot t_2$.*

**Definicija 12.** *Neka je $r : U \to \mathbb{R}^3$ parametrizacija regularne plohe. Tada se funkcije $E, F, G : U \to \mathbb{R}$ definirane s*

$$\begin{aligned} E(u,v) &= r_u(u,v) \cdot r_u(u,v) \\ F(u,v) &= r_u(u,v) \cdot r_v(u,v) \\ G(u,v) &= r_v(u,v) \cdot r_v(u,v) \end{aligned}$$

*nazivaju fundamentalnim veličinama prvog reda.*

Ukoliko promatramo $\mathbf{x} : U \to \mathbf{x}(U) \subset S$ tada za vektor $v_p \in T_pS$ postoji krivulja $c : I \to S$ takva da je $c(0) = p$ i $c'(0) = v_p$. Ako je $p = (u_0, v_0)$, krivulju $c$ možemo prikazati u karti kao $c(t) = x(u(t), v(t))$. S obzirom da je vektor $v_p = c'(0)$ u karti ga možemo zapisati kao $v_p = x_u(u_0, v_0)u'(0) + x_v(u_0, v_0)v'(0)$. Ako promatramo prvu fundamentalnu formu u karti $\mathbf{x}$ tada vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned} I(v_p) &= v_p \cdot v_p \\ &= x_u^2(u_0, v_0)(u'(0))^2 + 2x_u(u_0, v_0)x_v(u_0, v_0)u'(0)v'(0) + x_v^2(u_0, v_0)(v'(0))^2. \end{aligned}$$

U prethodnoj definiciji definirali smo fundamentalne veličine prvog reda koje sada u karti $\mathbf{x}$ možemo zapisati kao:

$$\begin{aligned} E &= x_u^2, \\ F &= x_u \cdot x_v, \\ G &= x_v^2. \end{aligned}$$

Koeficijente prve fundamentalne forme možemo zapisati i matrično ako za elemente matrice uzmemo: $E = g_{11}, F = g_{12} = g_{21}, G = g_{22}$, tj.

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}.$$

Prva fundamentalna forma općenito je korisna u primjeni pri računanju. Pomoću nje možemo doći do duljine luka krivulje na plohi $S$. Općenito duljinu luka krivulje $c : I \to S, c(I) \subset \mathbf{x}(U)$, na plohi $S$ možemo računati kao:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} ||c'(t)||\, dt.$$

Koristeći fundamentalne veličine prvog reda isto možemo računati i kao:

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{t_0}^{t} \sqrt{I(c'(t))}\, dt \\ &= \int_{t_0}^{t} \sqrt{Eu'(t)^2 + 2Fu'(t)v'(t) + Gv'(t)^2}\, dt. \end{aligned}$$

Osim duljine luka krivulje na plohi, prva fundamentalna forma služi nam i za određivanje kuta među krivuljama. Ako promatramo krivulje $c, \overline{c} : I \to S$, tada kut među njima u točki njihovog presjeka $c(t_0) = \overline{c}(\overline{t_0})$ računamo kao:

$$\begin{aligned}\cos\varphi &= \frac{c'(t_0)\cdot \overline{c}'(\overline{t_0})}{||c'(t_0)||\cdot||\overline{c}'(\overline{t_0})||} \\ &= \frac{Eu'\overline{u}' + F(u'\overline{v}' + v'\overline{u}') + Gv'\overline{v}'}{\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}\sqrt{E\overline{u}'^2 + 2F\overline{u}'\overline{v}' + G\overline{v}'^2}}.\end{aligned}$$

### 2.3.2 Druga fundamentalna forma

Kako bi mogli definirati drugu fundamentalnu formu, potrebno je prvo uvesti pojam operatora plohe.

**Definicija 13.** *Neka je $r : U \to \mathbb{R}^3$ regularna ploha, $P = r(u, v)$ točka na plohi te $N$ normala na plohu $r$ u točki $(u, v) \in U$. Operator $S_p : T_p(r) \to T_p(r)$ koji tangencijalnom vektoru $t = \lambda r_u + \mu r_v$ pridružuje vektor $S_p(t) = \lambda N_u + \mu N_v$ naziva se operator oblika plohe $r$ u točki $(u, v) \in U$.*

Ovakvo preslikavanje, za koje se može pokazati da je linearno, naziva se još i Weigartenovim preslikavanjem. Sada možemo definirati drugu fundamentalnu formu te fundamentalne veličine drugog reda.

**Definicija 14.** *Neka je $r : U \to \mathbb{R}^3$ regularna ploha, $P = r(u, v)$ točka na plohi te neka je $T_p(r)$ tangencijalna ravnina plohe $r$ u točki $(u, v) \in U$. Druga fundamentalna forma plohe $r$ je preslikavajne $II : T_p(r) \times T_p(r) \to \mathbb{R}$ koje paru tangencijalnih vektora $t_1$ i $t_2$ na plohu $r$ u točki $P$ pridružuje broj po sljedećem pravilu:*

$$II(t_1, t_2) = -I_p(t_1, S_p(t_2)) = -t_1 \cdot S_p(t_2)$$

**Definicija 15.** *Neka je $r : U \to \mathbb{R}^3$ regularna parametrizirana ploha. Tada se funkcije $L, M, N : U \to \mathbb{R}$ definirane s:*

$$\begin{aligned}L(u,v) &= r_{uu}(u,v)\cdot N(u,v)\\ M(u,v) &= r_{uv}(u,v)\cdot N(u,v)\\ N(u,v) &= r_{vv}(u,v)\cdot N(u,v)\end{aligned}$$

*nazivaju fundamentalnim veličinama drugog reda.*

Kao i u prethodnom poglavlju promatrali prvu fundamentalnu formu, sada možemo promatrati drugu fundamentalnu formu u karti **x** pa imamo:

$$\begin{aligned}II(v_p) &= S(v_p)\cdot v_p\\ &= S_p(x_u(u_0,v_0))\cdot x_u(u_0,v_0)(u'(0))^2 + S_p(x_u(u_0,v_0))\cdot x_v(u_0,v_0)u'(0)v'(0)\\ &+ x_u(u_0,v_0)\cdot S_p(x_v(u_0,v_0))u'(0)v'(0) + S_p(x_v(u_0,v_0))\cdot x_v(u_0,v_0)(v'(0))^2.\end{aligned}$$

Fundamentalne veličine prvog i drugog reda možemo koristiti u izračunima Gaussove i srednje zakrivljenosti. Za Gaussovu zakrivljenost vrijedi formula:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$

a za srednju zakrivljenost

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F)^2},$$

gdje su $E, F, G, L, M, N$ fundamentalne veličine prvog i drugog reda u karti $\mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^3$ za plohu $S$.

## 2.4 Specijalne krivulje na plohi

U ovom poglavlju definirat ćemo neke specijalne krivulje na plohi već spomenute u uvodu: krivulje zakrivljenosti, asimptotske i geodetske krivulje.

### 2.4.1 Krivulje zakrivljenosti

**Definicija 16.** *Za krivulju $c : I \to S$ kažemo da je krivulja zakrivljenosti na plohi $S$ ako je u svakoj točki vektor $c'$ kolinearan s glavnim vektorom u toj točki.*

Za takve krivulje vrijedi kriterij po kojemu je krivulja $c : I \to S$ krivulja zakrivljenosti ako i samo ako je $S_p(c')$ kolinearan s vektorom $c'$. Po dvije međusobno okomite krivulje zakrivljenosti prolaze svakom točkom i određuju ortogonalnu mrežu krivulja koja se naziva mrežom krivulja zakrivljenosti. Ukoliko je s $c : I \to S$ dana krivulja na plohi $S$ u karti $\mathbf{x} : U \to S$, gdje je $c(I) \subset \mathbf{x}(U)$ i $c(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ njena parametrizacija, tada je $c$ krivulja zakrivljenosti ako i samo ako vrijedi:

$$\begin{vmatrix} (\frac{dv}{dt})^2 & -(\frac{du}{dt})(\frac{dv}{dt}) & (\frac{du}{dt})^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0.$$

### 2.4.2 Asimptotske krivulje

Za definiranje asimptotskih krivulja prvo je potrebno definirati normalnu zakrivljenost plohe i asimptotski smjer.

**Definicija 17.** *Normalna zakrivljenost plohe $S$ u točki $p$ u smjeru tangencijalnog vektora $v_p$ je realan broj*

$$k(v_p) = \frac{S_p(v_p) \cdot v_p}{v_p \cdot v_p}.$$

**Definicija 18.** *Smjer u točki $p \in S$ nazivamo asimptotskim ako je normalna zakrivljenost plohe $S$ u točki $p$ u tom smjeru jednaka 0.*

**Definicija 19.** *Za krivulju $c : I \to S$ kažemo da je asimptotska krivulja na $S$, ako je u svakoj njenoj točki smjer određen vektorom $c'$ asimptotski.*

Krivulja $c$ je asimptotska ako i samo ako je $c' \cdot n_c' = 0$. Ako je krivulja dana istom parametrizacijom i uz iste uvjete kao i u prethodnom poglavlju, tada je krivulju $c$ asimptotska krivulja ako i samo vrijedi:

$$L(\frac{du}{dt})^2 + 2M(\frac{du}{dt})(\frac{dv}{dt}) + N(\frac{du}{dt})^2 = 0.$$

### 2.4.3 Geodetske krivulje

**Definicija 20.** *Za krivulju $c : I \to S$ kažemo da je geodetska ako je u svakoj njenoj točki vektor $c''$ okomit na plohu.*

Uvjet iz definicije zapravo je ispunjen ukoliko postoji funkcija $\lambda : I \to \mathbb{R}$ takva da je $c'' = \lambda n_c$. Geodetske krivulje su krivulje konstantne brzine, tj. akceleracija dana vektorom $c''$ nema tangencijalnu komponentu.

# 3 | Familije krivulja

**Definicija 21.** *Neka je $\phi(u,v)$ funkcija koja ima neprekidne parcijalne derivacije $\phi_1$ i $\phi_2$ koje ne iščezavaju istovremeno. Tada implicitna jednadžba $\phi(u,v) = C, C \in \mathbb{R}$ daje familiju krivulja na plohi $r = r(u,v)$.*

Za različite vrijednosti parametra $c$ dobivamo različite familije krivulja na plohi. Iz same definicije slijede sljedeća svojstva:
1) Kroz svaku točku na plohi s koordinatama $(u,v)$ prolazi isključivo jedan član familije.
Ako je $\phi(u_0,v_0) = C_1$ gdje je $(u_0,v_0)$ proizvoljna točka na plohi onda je $\phi(u,v) = C_1$ član familije koji prolazi kroz točku $(u_0,v_0)$ te stoga kroz svaku točku $(u_0,v_0)$ prolazi točno jedan član familije.
2) Koeficijent smjera tangente na familiju krivulja u točki $(u,v)$ je $(-\phi_2,\phi_1)$.

**Teorem 1** (Vidjeti [3], 2.11. Teorem 1)**.** *Krivulje familije $\phi(u,v) = C, C \in \mathbb{R}$ su rješenja diferencijalne jednadžbe*

$$\phi_1 du + \phi_2 dv = 0 \tag{3.1}$$

*i obratno, diferencijalna jednadžba prvog reda oblika*

$$P(u,v)du + Q(u,v)dv = 0 \tag{3.2}$$

*gdje su $P$ i $Q$ diferencijabilne funkcije koje ne iščezavaju istovremeno, opisuje familiju krivulja.*

*Dokaz.* S obzirom da je $\phi_1 = \frac{\partial\phi}{\partial u}$ i $\phi_2 = \frac{\partial\phi}{\partial v}$, koristeći jednadžbu (3.1) iz teorema imamo:

$$\begin{aligned}
\phi_1 du + \phi_2 dv &= 0 \\
\frac{\partial\phi}{\partial u}du + \frac{\partial\phi}{\partial v}dv &= 0 \\
d\phi &= 0
\end{aligned}$$

Iz posljednje jednakosti možemo zaključiti da je $\phi(u,v) = C$. S obzirom da je $C$ konstanta koja poprima različite vrijednosti, familije krivulja su dane različitim rješenjima diferencijalne jednadžbe. Obratno, promatrajući jednadžbu (3.2) općenito nije moguće odrediti funkciju $\phi(u,v)$ takvu da je $\phi_1 = P$ i $\phi_2 = Q$ osim u slučaju da je dana jednadžba egzaktna. Moguće je pronaći integracijsku konstantu $\lambda(u,v)$ takvu da je $\lambda P = \phi_1$ i $\lambda Q = \phi_2$. Ako jednadžbu (3.2) zapišemo u obliku $\lambda P du + \lambda Q dv = 0$, slijedi $\phi_1 du + \phi_2 dv = 0$ pa je rješenje jednadžbe $\phi(u,v) = c$. □

Tangencijalni vektor $(-\phi_2, \phi_1)$ koji, kao što je već spomenuto, predstavlja koeficijent smjera tangente na familiju krivulja u točki ima geometrijsku važnost što ćemo pobliže iskazati sljedećim teoremom.

**Teorem 2** (Vidjeti [3], 2.11. Teorem 2). *Za promjenjivi vektor smjera u točki P,* $|\frac{d\phi}{ds}|$ *je maksimum u smjeru ortogonalnom na krivulju* $\phi(u,v) = c$*, c=konst. kroz P i kut između* $(-\phi_2, \phi_1)$ *i ortogonalnog vektora smjera u kojem se* $\phi$ *povećava je* $\frac{\pi}{2}$.

*Dokaz.* Neka je $P(u,v)$ proizvoljna točka na plohi. Treba pokazati da se $\phi$ najbrže povećava u $P$ u smjeru ortogonalnom na krivulju familije koja krolazi kroz $P$. U svrhu toga, treba pokazati da $\frac{d\phi}{ds}$ ima najveću vrijednost u takvom smjeru. Neka je s $(l,m)$ dan proizvoljni vektor smjera kroz točku $P$ na plohi. Neka je $\mu$ duljina vektora $\phi = (-\phi_2, \phi_1)$. Neka je $\theta$ kut između $(l,m)$ i vektora $\phi$. Označimo: $a = lr_1 + mr_2, b = -\phi_2 r_1 + \phi_1 r_2$.

Sada treba pronaći $a \times b$ tako da izrazimo $\sin\theta$ pomoću $T$ i $\mu$, gdje je $\mu = ||b||$. Iz definicije slijedi $||a|| = 1$. Vrijedi:

$$\begin{aligned} ||a \times b|| &= \mu \sin\theta \\ a \times b &= (l\phi_1 + m\phi_2)(r_1 \times r_2) \\ ||a \times b|| &= T(l\phi_1 + m\phi_2). \end{aligned}$$

Iz prethodnih jednakosti slijedi:

$$\mu \sin\theta = T(l\phi_1 + m\phi_2). \tag{3.3}$$

S obzirom da su $(l,m)$ koeficijenti smjera bilo kojeg vektora smjera kroz točku $P$, za njih vrijedi: $l = \frac{du}{ds}$, $m = \frac{dv}{ds}$. Sada iz (3.3) dobivamo

$$\mu \sin\theta = T\frac{d\phi}{ds}.$$

Sada su $\mu$ i $T$ uvijek pozitivni i ne ovise o $(l,m)$. Zaključujemo da $\frac{d\phi}{ds}$ ima najveću vrijednost $\frac{\mu}{T}$ kada $\sin\phi$ ima najveću vrijednost, što vrijedi za $\theta = \frac{\pi}{2}$. S druge strane, $\frac{d\phi}{ds}$ ima najmanju vrijednost $-\frac{\mu}{T}$ za $\theta = -\frac{\pi}{2}$. S obzirom da su i $T$ i $\mu$ pozitivni, ortogonalni vektor smjera za koji je $\frac{d\phi}{ds} > 0$ je onaj za kojeg je kut $\theta = \frac{\pi}{2}$. Stoga $|\frac{d\phi}{ds}|$ ima najveću vrijednost u smjeru ortogonalnom na $\phi(u,v) = C, C \in \mathbb{R}$. □

## 3.1 Ortogonalne trajektorije

U ovom poglavlju dan je pregled familija krivulja na plohi koje su okomite.

**Definicija 22.** *Neka je* $\phi(u,v) = C$ *jednadžba familije krivulja na plohi* $r = r(u,v)$*. Ukoliko postoji druga familija krivulja dana jednadžbom* $\psi(u,v) = k$ *koja leži na plohi tako da su u svakoj točki plohe dvije krivulje, po jedna iz svake familije, ortogonalne tada se krivulje druge familije nazivaju ortogonalne trajektorije prve familije.*

**Teorem 3** (Vidjeti [3], 2.12. Teorem 1). *Za svaku familiju krivulja na plohi postoji familija ortogonalnih trajektorija.*

*Dokaz.* Neka je ploha zadana s $r = r(u,v)$ i familija krivulja definirana s $Pdu + Qdv = 0$. Kako je $\frac{du}{dv} = -\frac{Q}{P}$, tangenta na krivulju u bilo kojoj točki ima koeficijent smjera $(-Q,P)$. Neka je $(du,dv)$ koeficijent smjera tangente u točki $(u,v)$ člana ortogonalne trajektorije dane familije. Znamo da su vektori smjera $(\lambda,\mu)$ i $(\lambda',\mu')$ ortogonalni pa vrijedi $E\lambda\lambda' + F(\lambda\mu' + \mu\lambda') + G\mu\mu' = 0$. Ako primjenimo uvjet ortogonalnosti na $(-Q,P)$ i $(du,dv)$ slijedi

$$\begin{aligned} E(-Q)du + F(-Qdv + Pdu) + GPdv = 0 \\ (FP - EQ)du + (GP - FQ)dv = 0 \end{aligned}$$

što zapravo predstavlja diferencijalnu jednadžbu ortogonalnih trajektorija dane familije krivulja. Kako je $EG - F^2 \neq 0$ i $P$ i $Q$ ne iščezavaju istovremeno tada su i $du$ i $dv$ neprekidne i ne iščezavaju istovremeno. Stoga diferencijalna jednadžba ortogonalne familije postoji i rješenje je jednadžbe $(FP - EQ)du + (GP - FQ)dv = 0$. □

**Teorem 4** (Vidjeti [3], 2.12. Teorem 2)**.** *Parametri plohe uvijek se mogu odabrati tako da krivulje odabrane familije i ortogonalne trajektorije budu parametarske krivulje.*

*Dokaz.* Neka je $\phi(u,v) = C$ familija krivulja dana diferencijalnom jednadžbom $Pdu + Qdv = 0$. Po Teoremu 1 postoji integracijska konstanta $\lambda = \lambda(u,v) \neq 0$ takva da je $P = \lambda\phi_1$ i $Q = \lambda\phi_2$. Po Teoremu 3 ortogonalna familija $\psi(u,v) = k$ dane familije krivulja je rješenje jednadžbe $(FP - EQ)du + (GP - FQ)dv = 0$. Stoga postoji integracijska konstanta $\mu(u,v) \neq 0$ takva da vrijedi:

$$\begin{aligned} FP - EQ = \mu\psi_1 \\ GP - FQ = \mu\psi_2 \end{aligned}$$

gdje su $\psi_1 = \frac{\partial\psi}{\partial u}$ i $\psi_2 = \frac{\partial\psi}{\partial v}$. Stoga vrijedi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(u,v)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial u} & \frac{\partial\phi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{P}{\lambda} & \frac{Q}{\lambda} \\ \frac{1}{\mu}(FP - EQ) & \frac{1}{\mu}(GP - FQ) \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\lambda\mu}[P(GP - FQ) - Q(FP - EQ)] \\ &= \frac{1}{\lambda\mu}[EQ^2 - 2FPQ + GP^2] \end{aligned} \tag{4.4}$$

U 4.4 su $E, G > 0$ i $EG - F^2 > 0$ pa je 4.4 pozitivno definitna kvadratna forma gdje $P$ i $Q$ ne iščezavaju istovremeno. Stoga slijedi $EQ^2 - 2FPQ + GP^2 \neq 0$ pa možemo zaključiti da je i $\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(u,v)} \neq 0$. Tada dana familija krivulja $\phi(u,v) = C$ i ortogonalna familija $\psi(u,v) = k$ zadane parametrizacijama $u' = \phi(u,v)$ i $v' = \psi(u,v)$ postaju dvije familije parametarskih krivulja $u' = C, v' = K, C, K \in \mathbb{R}$. Dakle, parametri se uvijek mogu izabrati tako da familije krivulja i njihove ortogonalne trajektorije budu parametarske krivulje. □

**Primjer 1.** *Na hiperboloidu zadanom s $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ odredit ćemo ortogonalne trajektorije za $z = C, C \in \mathbb{R}$. Parametrizacija hiperboloida glasi:*

$$r(u, v) = (\cos u + v \sin u, \sin u - v \cos u, v).$$

*S obzirom da je $z = C, C \in \mathbb{R}$, prva familija krivulja je*

$$\phi(u, v) = v = konst.$$

*Tangencijalni vektor tada je $(-\phi_2, \phi_1) = (-1, 0)$. Koristeći jednadžbu iz Teorema 3 koja glasi*

$$(FP - EQ)du + (GP - FQ)dv = 0$$

*možemo odrediti potrebnu diferencijalnu jednadžbu. Znamo da je $P = 0$ i $Q = -1$ te je potrebno odrediti $E, F$ i $G$. Deriviranjem dobivamo $r_1$ i $r_2$.*

$$\begin{aligned} r_1 &= (v \cos u - \sin u, v \sin u + \cos u, 0) \\ r_2 &= (\sin u, -\cos u, 1) \end{aligned}$$

*Sada možmo izračunati $E, F$ i $G$.*

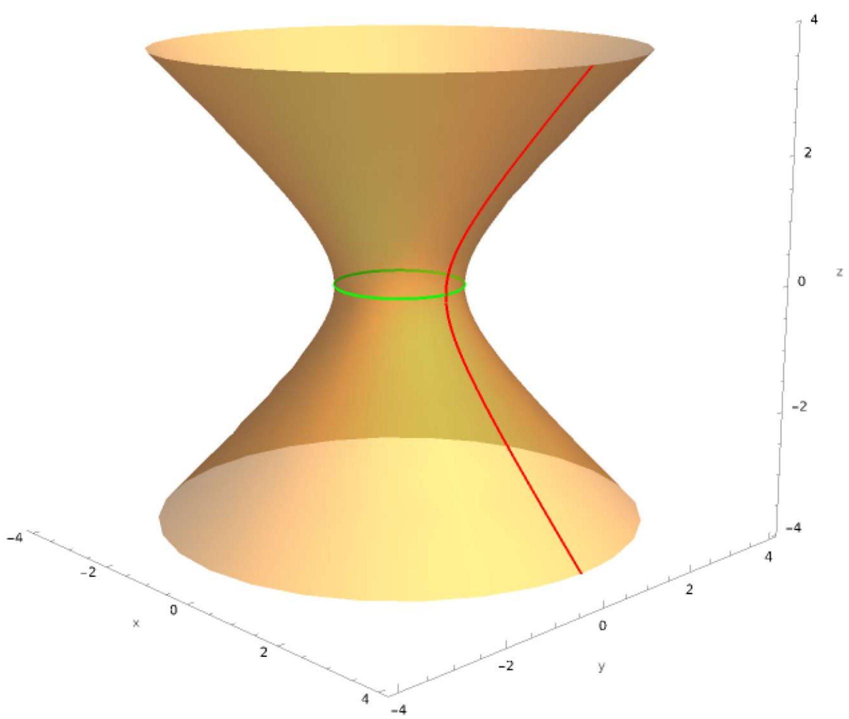
$$\begin{aligned} E &= r_1 \cdot r_1 \\ &= (v \cos u - \sin u, v \sin u + \cos u, 0)(v \cos u - \sin u, v \sin u + \cos u, 0) \\ &= v^2 \cos^2 u - 2v \cos u \sin u + \sin^2 u + v^2 \sin^2 u + 2v \sin u \cos u + \cos^2 u \\ &= v^2 \cos^2 u + v^2 \sin^2 u - 2v \cos u \sin u + 2v \sin u \cos u + 1 \\ &= v^2 + 1 \\ F &= r_1 \cdot r_2 \\ &= (v \cos u - \sin u, v \sin u + \cos u, 0)(\sin u, -\cos u, 1) \\ &= v \cos u \sin u - \sin^2 u - v \sin u \cos u - \cos^2 u \\ &= -(\sin^2 u + \cos^2 u) \\ &= -1 \\ G &= r_2 \cdot r_2 \\ &= (\sin u, -\cos u, 1)(\sin u, -\cos u, 1) \\ &= \sin^2 u + \cos^2 u + 1 \\ &= 2. \end{aligned}$$

*Uvrstimo izračunato i slijedi*

$$\begin{aligned} Edu + Fdv &= 0 \\ (v^2 + 1)du - dv &= 0 \end{aligned}$$

*Time smo dobili diferencijalnu jednadžbu. Rješavanjem ove diferencijalne jednadžbe dobivamo:*

$$u = \arctan v + C, C = konst.$$




Slika 3.1: Hiperboloid s istaknutom kružnicom i njenom ortogonalnom trajektorijom.

## 3.2 Dvostruke familije krivulja

Dok se familije krivulja na plohi mogu opisati diferencijalnom jednadžbom prvog reda, dvostruke familije krivulja opisuju se kvadratnim jednadžbama po $du$ i $dv$.

**Definicija 23.** *Ako su $P$, $Q$ i $R$ neprekidne funkcije po varijablama $u$ i $v$ koje ne iščezavaju istovremeno te ako je $Q^2 - PR > 0$ onda kvadratna diferencijalna jednadžba*

$$Pdu^2 + 2Qdudv + Rdv^2 = 0 \tag{3.4}$$

*opisuje dvije familije krivulja na plohi.*

S obzirom da su koeficijenti smjera tangente na krivulju u točki dani s $(du, dv)$, rješavajući kvadratnu jednadžbu

$$P(\frac{du}{dv})^2 + 2Q(\frac{du}{dv}) + R = 0$$

možemo dobiti dva smjera dvostruke familije krivulja na plohi. Sljedeći teorem će biti potreban u dokazu oba teorema koji će biti iskazani u nastavku.

**Teorem 5** (Vidjeti [3], 2.10. Teorem 1)**.** *Ako su $(l, m)$ i $(l', m')$ koeficijenti smjera dvaju vektora smjera u točki P na plohi i ako je $\theta$ kut između njih, tada vrijedi:*

$$\cos\theta = Ell' + F(lm' + l'm) + Gmm'$$
$$\sin\theta = H(lm' - l'm)$$

U sljedećem teoremu dan je uvjet ortogonalnosti ta dva vektora smjera.

**Teorem 6** (Vidjeti [3], 2.13. Teorem 1)**.** *Dva vektora smjera dana s*

$$Pdu^2 + 2Qdudv + Rdv^2 = 0 \tag{3.5}$$

*su ortogonalni na plohi ako i samo ako vrijedi $ER - 2QF + GP = 0$.*

*Dokaz.* Ako su $(l, m)$ i $(l', m')$ koeficijenti smjera dviju familija krivulja danih s (3.5) u točki T na plohi, tada su $\frac{l}{m}$ i $\frac{l'}{m'}$ rješenja kvadratne jednadžbe

$$P(\frac{du}{dv})^2 + 2Q\frac{du}{dv} + R = 0. \tag{3.6}$$

Tada znamo da vrijedi:

$$\frac{l}{m} + \frac{l'}{m'} = -\frac{2Q}{P} \tag{3.7}$$
$$\frac{ll'}{mm'} = \frac{R}{P}. \tag{3.8}$$

Po Teoremu 5 $(l, m)$ i $(l', m')$ su ortogonalni ako i samo ako vrijedi:

$$E\frac{ll'}{mm'} + F(\frac{l}{m} + \frac{l'}{m'}) + G = 0. \tag{3.9}$$

Koristeći (3.7) i (3.8) u jednadžbi (3.9) slijedi:

$$ER - 2FQ + GP = 0$$

□

**Teorem 7** (Vidjeti [3], 2.13. Teorem 2)**.** *Ako je $\Phi$ kut između dvije krivulje zadane dvostrukom familijom*

$$Pdu^2 + 2Qdudv + Rdv^2 = 0 \tag{3.10}$$

*u točki $(u, v)$ na plohi, tada vrijedi*

$$\tan\Phi = \frac{2H\sqrt{Q^2 - PR}}{ER - 2FQ + GP}.$$

*Dokaz.* Ako su $(l, m)$ i $(l', m')$ koeficijenti smjera tangencijalnih vektora u točki dvostuke familije dane s (3.10), tada su to rješenja kvadratne jednadžbe

$$P(\frac{du}{dv})^2 + 2Q\frac{du}{dv} + R = 0 \tag{3.11}$$

i za njih vrijedi

$$\frac{l}{m} + \frac{l'}{m'} = -\frac{2Q}{P} \tag{3.12}$$

$$\frac{ll'}{mm'} = \frac{R}{P} \tag{3.13}$$

Ako je $\theta$ kut između tim dvaju vektora, tada po Teoremu 5 znamo da vrijedi:

$$\tan\theta = \frac{H(lm' - l'm)}{Ell' + F(lm' + ml') + Gmm'}$$

što možemo zapisati kao:

$$\tan\theta = \frac{H\left[(\frac{l}{m} + \frac{l'}{m'})^2 - 4\frac{ll'}{mm'}\right]^{\frac{1}{2}}}{E\frac{ll'}{mm'} + F(\frac{l}{m} + \frac{l'}{m'}) + G}. \tag{3.14}$$

Ukoliko sad iskoristimo (3.12) i (3.13) u jednadžbi (3.14) dobivamo:

$$\tan\theta = \frac{2H(Q^2 - PR)^{\frac{1}{2}}}{ER - 2FQ + GP}.$$

□

# Literatura


[1] M.P.do. Carmo, *Differential geomerty of curves and surfaces*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.

[2] J. Sedlar, *Diferencijalna geometrija*, Fakultet građevinarstva, arhitektre i geodezije u Splitu, 2016.

[3] D. Somasundaram, *Differential Geomerty, A First Course*, Alpha Science International Ltd., Harrow, U.K., 2005.

# Familije krivulja na plohi

U ovom radu bavimo se familijama krivulja na plohi. Pokazat ćemo da familiju krivulja na plohi možemo dobiti kao rješenje diferencijalne jednadžbe te navesti geometrijsku važnost tangencijalnog vektora. Osim toga, definirat ćemo ortogonalne trajektorije, koje predstavljaju familije krivulja koje su okomite. Također su predstavljene dvostruke familije krivulja, koje za razliku od familija krivulja, dobivamo kao rješenja kvadratnih diferencijalnih jednadžbi.

## Ključne riječi

ploha, krivulja, familije krivulja, ortogonalne trajektorije, dvostruke familije krivulja

# Families of surface curves

## Summary

In this paper, we deal with families of curves on the surface. We will show that we can obtain a family of curves on a surface as a solution to a differential equation and state the geometric importance of the tangential vector. In addition, we will define orthogonal trajectories, which represent families of orthogonal curves. Double families of curves are also presented, which, unlike families of curves, are obtained as solutions of quadratic differential equations.

## Keywords

surface, curve, families of curves, orthogonal trajectories, double family of curves