Matematičko modeliranje i primjena epidemiološkog modela

Zmiša, Ivona

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike

Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Matematičko modeliranje i primjena epidemiološkog modela

Završni rad

Mentor:
Tomislav Marošević

Student:
Ivona Zmiša

Osijek, 2024.

Sadržaj

1 | Uvod

Riječ „matematičar“ je imenica muškog roda čija stroga definicija kaže da je to osoba koja se u svom poslu koristi matematičkim jezikom. Društveno je prihvatljiva i zastupljena definicija koju se dosta često ne pokušava „nadopuniti“, „proširiti značenje“ ili jednostavno dodefinirati na opis svakoga pojedinca kojem matematika nije samo profesija. Zašto postoji potreba za preformuliranjem definicije kada svi ljudi nisu znanstvenici i nisu im glavni predmet proučavanja polja matematike i sve vezano uz njih. Svirati glazbeni instrument, proučavati životinje, spašavati ljudske živote ili voziti se kući nakon posla i zapeti u gužvi na cesti. Sve su to uobičajena zanimanja, hobiji ili životne situacije kojima je temelj matematika. Ako razmislimo da je svaki pojedinac dobar u nečemu, svom poslu ili u nekom talentu, a ako iza svega toga stoji matematika, je li moguće da je onda svaki pojedinac „dobar matematičar“? Svakodnevni život, a i sama percepcija odrasle odgovorne osobe daleko bi se razlikovala da nema usvojenih matematičkih vještina . Zato, ne samo da nam je matematika korisna, nego je i nužna u životu. Problemi su sastavni dio života svakog pojedinca. Znati se nositi s njima, uočiti postojanje problema i doći do rješenja vještine su koje razvijamo u procesu učenja matematike već u nižim razredima osnovne škole.

Primjer životnog problema je poplavljen podrum kuće. Ulazak u poplavljen podrum kuće za mnoge bi bio jako stresan, ali u takvim situacijama treba ostati smiren i odraditi ključne korake poput isključenja struje u tom dijelu kuće i lociranja prodora vode. Nakon toga slijedi zvanje majstora i službi koje će nam pomoći u saniranju problema te na samom kraju provođenje mjera da do iste izvanredne situacije ne bi ponovno došlo. Postupci u ovoj situaciji čine se nevezanim uz matematiku, ali sami način razmišljanja, kronologija donošenja odluka i postupci posloženi su matematičkim načinom. Primjer potrebe za kritičkim mišljenjem je novinarski posao, u kojem se svaka dobivena informacija i vijest moraju analizirati i ispitati njihova istinitost. Kako bi kvalitetan novinar provjerio vjerodostojnost vijesti, mora se prema istoj kritički postaviti. Analiza informacija je kritička vještina koju, davno prije stupanja u radni odnos, stječemo u matematičkim zadacima. Temelj osamostaljenja osobe je financijska samostalnost. Kako bi uštedjeli, prilikom kupnje posežemo za akcijskim artiklima koji su sniženi za određeni postotak, ili prilikom rješavanja stambenog pitanja u ugovaranju kredita u cilju nam je imati što manju kamatnu stopu. Unazad par mjeseci šira javnost susrela se s ChatGPT-em. Razumijevanje takvih sustava temelji se na znanjima informatičkih znanosti, čija osnova je matematika. Primjerice, što bi se moglo zaključiti iz sljedećih pitanja: raditi u umjetničkoj galeriji, a ne poznavati zlatni rez, biti zoolog, a ne znati zašto leopard nema točkice na repu, biti nogometaš, a ne baciti optimalno loptu u slobodnom bacanju. Možemo zaključiti da nam je bitna matematika na svim razinama obrazovanja i za izbor bilo kojeg budućeg zanimanja moramo graditi temelje.

2 | Definicija matematičkog modeliranja

Matematički model prikazuje vremensku evoluciju onoga što promatramo. Primjer je matematičko njihalo koje prikazuje vremensku evoluciju kako se materijalna točka giba.

Proces korištenja matematičkih alata, koncepata i tehnika kako bismo analizirali neki problem ili predvidjeli fenomen naziva se matematičko modeliranje. Njegova primjena je jako široka jer se koristi u različitim disciplinama poput inženjerstva (elektrotehnika, računalne znanosti), društvenih znanosti (političke znanosti, sociologija, psihologija), prirodnih znanosti (fizika, kemija, biologija, geografija) i medicine.

Svaki proces matematičkog modeliranja uključuje određene korake od kojih se uglavnom svi provode i točno tim redoslijedom. Koraci su: identifikacija problema, formuliranje modela, rješavanje modela, verifikacija i validacija, analiza rezultata, iteracija i poboljšanje. U nastavku ćemo svaki pojedini korak definirati.

- Identifikacija problema podrazumijeva analizu fenomena ili definiranje problema s kojim smo se susreli.

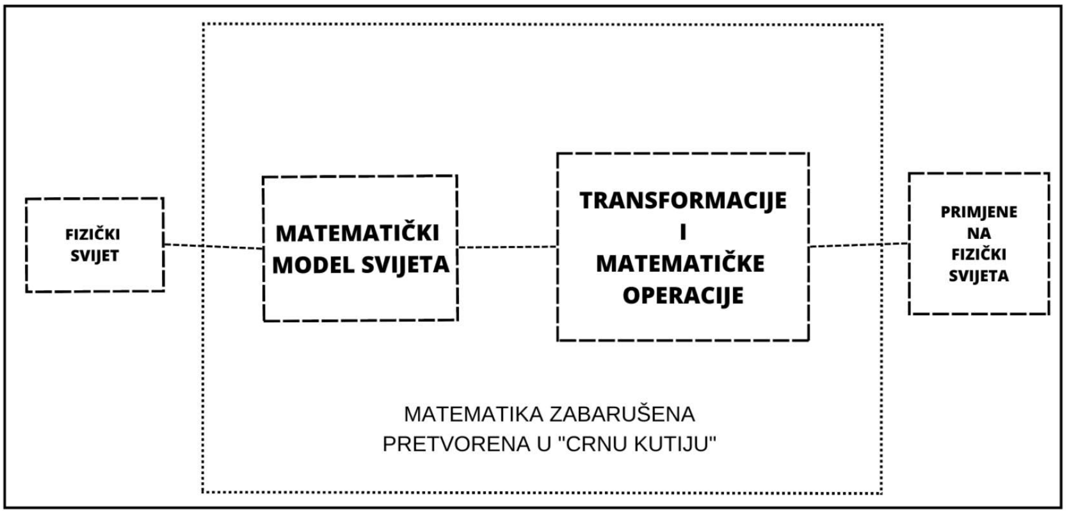
- Formuliranje problema je zapravo matematički opis postojećeg problema i uključuje identificiranje varijabli i parametara te izbor matematičkih relacija koje će na odgovarajući način povezati varijable.

- Primjenom matematičkih tehnika do rješenja modela. Proces rješavanja može biti temeljen na analitičkom ili numeričkom rješavanju, metodom simulacija ili nekim drugim metodama o kojima je više opisano kasnije. Ako je moguće, teži se da se u rješenju koriste sve navedene metode kako bi rješenje bilo što vjerodostojnije.

- Korak verifikacije i validacije je provjera opisuje li naš postavljeni model zadani problem, odnosno fenomen. Verifikacija provjerava je li model ispravno implementiran, dok validacija radi usporedbu sada dobivenih rezultata modela s već postojećim podacima ili eksperimentima.

- Dobiveni rezultati iz modela imaju slabu vrijednost bez njihovog tumačenja. Korak tumačenja rezultata naziva se analiza rezultata i uključuje iznošenje zaključaka, identifikaciju faktora koji su ključni za model, donošenje odluke.

- Zadnji korak, iteraciju i poboljšanje provodimo ako nemamo zadovoljavajuće rezultate. Tada se mogu ponoviti koraci modeliranja, pregledati parametre i varijable ili promijeniti cijeli matematički pristup. Cilj bilo kojeg od ovih postupala je što točniji rezultat. Ako imamo model koji se mijenja tokom vremena, ovaj korak je među najvažnijima, jer ažuriranjem prethodnih koraka naši rezultati ostaju točni i relevantni.



Slika 2.1: Grafički prikaz matematičke primjene iz knjige Philip J. Davis, Doživljaj matematike.

2.1 Vrste matematičkog modeliranja

Kako svaki problem, fenomen ili sustav koji opisujemo nisu jednaki, tako na njima ne možemo provoditi jednake matematičke modele. Svaki specifični pristup i njegovu primjenu možemo svrstati u šest glavnih vrsta matematičkog modeliranja. **Analitičko modeliranje** koristi se kod sistema koji se mogu točno opisati matematičkom analizom i matematičkim izrazima kao što su diferencijalne jednadžbe. Već spomenuti primjer simulacije prometne gužve ili širenje peludi vjetrom prikazuju se takozvanom prometnom ili transportnom jednadžbom koja je primjer najjednostavnije parcijalne diferencijalne jednadžbe u svakodnevnom životu. Za matematičke probleme koji su složeni za rukovanje i nemaju analitička rješenja, provodi se **numeričko modeliranje**. Primjer je simulacija vremenskih prognoza i simulacija protoka fluida. Statističko modeliranje je vrsta modeliranja u kojoj se analiza podataka provodi na osnovu postojećih podataka. Metoda funkcionira tako da se identificiraju i obrađuju uzorci i veze u podacima. Primjeri su različite vrste regresija, poput linearne, logističke i klasterske [1]. Vrsta modeliranja u kojoj se traži optimalno rješenje za određene probleme naziva se **optimizacijsko modeliranje**. Proces modeliranja temelji se na ograničenjima i postizanju što boljih ciljeva, a koristi se u optimizaciji resursa ili poboljšanju rasporeda. **Fizičko modeliranje** sadrži fizičke modele koji omogućuju realistično testiranje u kontroliranim uvjetima. Najbolje rezultate donosi provođenje fizičkih eksperimenata. Primjer za provođenjem ove vrste modeliranja je aerodinamika [2]. U diskretnim vremenskim intervalima u kojima se sistemi mijenjaju korak po korak koristi se **diskretno vremensko modeliranje**. Primjeri su diskretna vremenska simulacija u računalima i diskretni procesi u inženjerstvu.

[1] Statistička metoda koja se koristi kada su podaci organizirani u grupe ili klastere. (pristupljeno 20.8.2023.)

[2] Znanost koja se bavi proučavanjem fluida, najčešće zraka, u prisutnosti tijela koja se kreću kroz taj fluid. (pristupljeno 27.8.2023.)

2.2 Primjeri iz fizičkog svijeta

U određivanju vremenske prognoze koristi se takozvani meteorološki model sastavljen od matematičkih jednadžbi u kojima se pomoću temperature, brzine vjetra, vlage zraka i tlaka predviđaju kretanja oblaka, količine padalina i prosječne temperature zraka. Nadalje, na matematičkim modelima temeljena je financijska analiza koju čini analiza tržišta i proračun rizika. Kao dobar primjer može se navesti CAPM model[3] za procjenu troškova kapitala. U medicini matematički modeli koriste se za planiranje i optimizaciju terapija, za proučavanje genetičkih i biokemijskih procesa unutar organizma i za razumijevanje dinamike širenja zaraze što se naziva epidemiološki model o kojem ćemo nešto više reći u ovom radu. U projektiranju mostova i zgrada, elektronskih komponenti i vozila koriste se inženjerski i tehnološki modeli.
U posljednjih par godina zbog velikih klimatskih promjena izraženo je pitanje zaštite okoliša. Šira javnost razvija svijest o zagađenju, a ekološki modeli kojima se analizira širenje zagađenja, proučava utjecaj klimatskih primjena i procjenjuje rizik za životnu sredinu temelji se na matematičkim modelima. Usko vezana tema je energetika u kojoj se pomoću matematičkih modela rade analize energetskih sistema, optimizacija korištenja električne energije iz obnovljivih izbora, predviđanje potrošnje energije i efikasnosti energetskih sistema. Također navedimo da se matematički modeli koriste za bolju organizaciju rasporeda vožnji gradskog prijevoza i optimizaciju vremena isporuke paketa.

[3]Financijski model koji se koristi za procjenu očekivanog prihoda investicije u odnosu na rizik koji ona donosi. (pristupljeno 20.8.2023.)

3 | Epidemiološko modeliranje

Matematički model koji koristi matematičke jednadžbe kako bi analizirao širenje zaraznih bolesti u populaciji naziva se **epidemiološki model**. Cilj ovog modela je da stručnjacima i znanstvenicima javnog zdravstva pomogne u postizanju razumijevanja dinamike epidemije kako bi razvili mogućnost predviđanja budućih trendova i kako bi razvili adekvatan plan reakcije na izbijanje bolesti. Jedan od najpoznatijih epidemioloških modela je SIR-model.

3.1 Uvod u modeliranje

Ljudski organizam u korelaciji s nekim drugim mikroorganizmima, virusima, bakterijama ili parazitima može se zaraziti i u njemu se razvijaju različite bolesti od kojih su neke izrazito opasne za zdravlje i život. Kako bi jasnije razumjeli identificiranje problema i kreiranje metode koja vodi k rješenju navest ćemo neke primjere bolesti i njihove uzročnike. Bakterije izazivaju koleru i kugu, malarija nastaje iz parazita, a virusi uzrokuju prehlade.

Povijesni početak epidemiološkog modela je krajem 19. stoljeća kada britanski liječnik i znanstvenik Sir Ronald Ross pokušava prijenos i zarazu malarijom opisati matematičkim jednadžbama. Svoje eksperimente provodio je u Indiji gdje je pronašao vezu između komaraca i malarije tako što komarci prenose parazit malarije iz zaraženih osoba na zdrave. Za bolje razumijevanje kompleksnog ciklusa bolesti identificirao je ciklus malarije u komarcima, zapravo da se malarijski paraziti razmnožavaju u organizmu komaraca prije nego što ih komarci prenesu na ljude. Cijeli proces pokušao je izmodelirati jednadžbama jer jedno od njegovih glavnih pitanja je bilo zašto dolazi do eksponencijalnog rasta i postizanja maksimuma u broju zaraženih, a nakon toga bolest nestaje. Njegovi zaključci doprinijeli su borbi protiv malarije, a cjelokupni njegov pristup istraživanju postao je osnova za razvoj budućih strategija u procesu prevencije, kontrole i liječenja bolesti. Zbog cjelokupnog doprinosa 1902. godine dobio je Nobelovu nagradu za filozofiju ili medicinu. U svojim proučavanjima zaraznih bolesti definirao je tri fundamentalno različita načina širenja zaraznih bolesti. Jedan od njih je epidemija u kojoj je iznenadno izbijanje s malim brojem zaraženih, nakon toga dolazi do širenja bolesti i eksponencijalnog rasta zaraženih kada se postiže i maksimum, te nakon toga slijedi eksponencijalni pad i naglo nestajanje bolesti.

3.2 SIR model

Prije nešto manje od sto godina, 1927.g. A. G. McKendrick i W. O. Kermack izgradili su osnovni epidemiološki model tako što su ideje i jednadžbe Ronalda Rossa preveli u postulate. Matematičkim modeliranjem želi se doći do odgovora na pitanje koliki će biti udio zaraženih u ukupnoj populaciji.

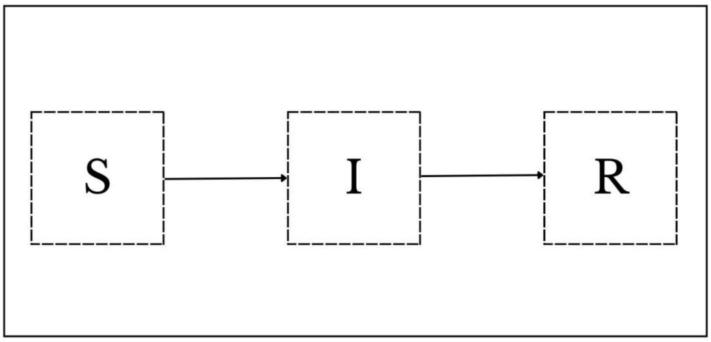
Engleskog naziva Susceptible-Infectious-Recovered model, od kuda i dolazi skraćenica SIR model, model je za opisivanje kratkotrajne epidemije. Kada govorimo o vremenu, kako vrijeme nije apsolutno, onda termin kratkotrajnog uspoređujemo u odnosu na životni ciklus čovjeka.

Osnovni koncept SIR modela je podjela promatrane populacije u tri kategorije:

- S-broj osoba koje se potencijalno mogu zaraziti jer nemaju razvijen imunitet
- I-broj trenutno zaraženih osoba
- R-broj oporavljenih osoba.

Broj osoba u S grupi se smanjuje kako se infekcija širi jer prelaze u sljedeću grupu. Grupu I čine osobe koje su trenutno inficirane i mogu prenositi bolest. Širenjem bolesti broj osoba u I grupi se povećava, ali istovremeno proces ozdravljenja ili smrtni ishod smanjuje isti broj. Grupa R ovisno o pretpostavkama modela, uz osobe koje su preležale bolest i stekle imunitet, može sadržavati i broj osoba koje su preminule od bolesti. Svaka fizička osoba u danom trenutku je u samo jednoj od tri kategorije, jer ne može istovremeno biti potencijalno zaražena, zaražena i oporavljena.

Modelom se želi postići vremenska evolucija kategorija S, I, R, a kako tim kategorijama brojimo ljude, zapravo nas zanima kako se S, I i R mijenjaju s vremenom u uvjetima u kojima se nalaze.



Slika 3.1: Grafički prikaz osnovnog SIR modela

Pretpostavke osnovnog SIR modela:

- Epidemija je kratkotrajna s obzirom na životni ciklus i za to vrijeme ne dolazi do promjene populacije u društvu.

  Označimo s N-ukupan broj osoba koji čini promatranu populaciju.

  $$N = S + I + R$$

  Kako ne dolazi do demografskih promjena, naš N je konstantan i brzina promjene jednaka je nuli pošto sama promjena ne postoji.
  U matematičkom zapisu:

  $$N = const.$$
  $$N' = 0.$$

- Epidemija se u prostoru širi homogeno, što znači da S, I i R su funkcije koje ovise samo o parametru t koji predstavlja vrijeme, odnosno imamo S(t),I(t),R(t).
- Zaraza se prenosi direktnim ili bliskim kontaktom, što znači da u modelu modeliramo interakciju.
- Dolazi do stjecanja „vječnog imuniteta", jednom zaražena i oporavljena osoba se ne može ponovno zaraziti.
- Svi zaraženi će se oporaviti i nema smrtnih ishoda.
- Širenje zaraze je determinističko, zapravo parametri stope zaraze i ozdravljenja su konstantni i nisu prisutne slučajnosti koje utječu na širenje bolesti.
- Diferencijalnim jednadžba opisuju se promjene u broju podložnih, inficiranih i oporavljenih osoba tokom vremena.

3.3 Modeliranje prijenosa bolesti

Definiramo:

$\frac{S}{N}$ *-vjerojatnost da je osoba iz populacije podložna zarazi*

b-koeficijent koliko često jedna osoba sreće neku drugu osobu.

Ako svaka osoba iz grupe I bude u kontaktu s b drugih ljudi, to znači da su onda ukupno svi ljudi iz grupe I u kontaktu s b · I drugih ljudi, gdje je vjerojatnost da je svaki od tih drugih podložan zarazi jednaka $\frac{S}{N}$.
Ukupan prijenos zaraze dan je izrazom

$$b \cdot I \cdot \frac{S}{N}, \tag{3.1}$$

a njegovu promjenu možemo interpretirati na način:

- ako svaka osoba češće sreće druge osobe, zaraza će se brže širiti
- ako ima više zaraženih i oni sreću isti broj ljudi, zaraza će se brže širiti
- ako ima više onih koji su podložni zarazi, zaraza će se brže širiti i analogno, ako ima manje onih koji su podložni zarazi, zaraza će se sporije širiti.

Označimo $\beta = \frac{b}{N}$. Uvrštavanjem istog u (3.1) dobivamo broj novozaraženih osoba u jedinici vremena dan izrazom:

$$\beta \cdot I \cdot S.$$

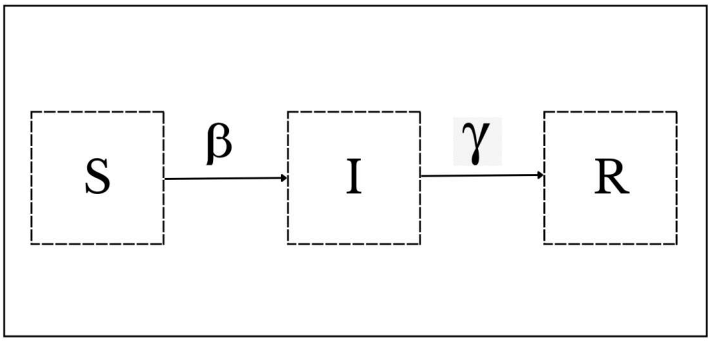
Stoga, promjenu broja ljudi u grupi S zadajemo kao $\frac{dS}{dt} = -\beta IS$.

Širenje zaraze tj. prelazak ljudi iz grupe S u grupu I zadajemo kao $\frac{dI}{dt} = \beta IS$.

U grupi I dolazi do oporavka što zadajemo kao $\frac{dI}{dt} = \beta IS - \gamma I$, gdje je γ koeficijent brzine kojom se ljudi opravljaju.

Oni koji su se oporavili, sada postaju „oporavljeni" u grupi R što zadajemo kao $\frac{dR}{dt} = \gamma I$.

$$ModelSIR = \begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta IS, \\ \frac{dI}{dt} = \beta IS - \gamma I, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I. \end{cases}$$



Slika 3.2: Grafički prikaz osnovnog SIR modela s parametrima β i γ

Kako bi riješili problem, moramo imati podatke u početnom trenutku za t=0:

- veličinu populacije N koju promatramo

- koliko ima ljudi koji su podložni zarazi $S(0) = S_0$

- koliko ima zaraženih ljudi $I(0) = I_0$

- koliko ima ljudi koji su se oporavili $R(0) = R_0$
- koeficijent γ koji predstavlja trajanje oporavka pojedine bolesti, a njega saznajemo iz medicinskih izvora
- koeficijent β.

Kako broj ljudi u grupi S cijelo vrijeme opada tj. $S' < 0$, a istovremeno je ograničen s donje strane s 0, slijedi $\lim_{t\to\infty} S(t) = S_\infty$.

Kako broj ljudi u grupi R cijelo vrijeme raste tj. R'>0, a istovremeno je ograničen s gornje strane s N, slijedi $\lim_{t\to\infty} R(t) = R_\infty$.

Broj ljudi u grupi I nema jasno definiranu monotonost, jer može rasti pa padati ili samo padati, ali prema pretpostavkama SIR modela znamo da se svi ljudi oporave, što znači da $\lim_{t\to\infty} I(t) = 0$.

Napomena. *Iako se zadani uvjeti u modelu čine dosta strogi i neprimjenjivi u stvarnim situacijama, zapravo upravo baš takav model opisuje dječje bolesti.*

Rješavanje SIR modela

$$
ModelSIR \begin{cases} \text{(I)} & \dfrac{dS}{dt} = S' = -\beta IS, \\ \text{(II)} & \dfrac{dI}{dt} = I' = \beta IS - \gamma I, \\ \text{(III)} & \dfrac{dR}{dt} = R' = \gamma I. \end{cases}
$$

Riješimo (I) i (II) tako da dobivamo promjenu broja zaraženih naprema onih koji se mogu zaraziti:

$$
\frac{dI}{dS} = \frac{I'}{S'} = \frac{\beta IS - \gamma I}{-\beta IS} = -1 + \frac{\gamma}{\beta S}.
$$

Uočimo da je to obična diferencijalna jednadžba sa separabilnim varijablama:

$$
\begin{aligned}
\frac{dI}{dS} &= -1 + \frac{\gamma}{\beta S}, \\
dI &= \left(-1 + \frac{\gamma}{\beta S}\right) dS, \\
I' &= \left(-1 + \frac{\gamma}{\beta S}\right) S'.
\end{aligned}
$$

Integriranjem od 0 do t po τ dobivamo:

$$
\begin{aligned}
\int_0^t I'(\tau)\, d\tau &= \int_0^t \left(-S'(\tau) + \frac{\gamma}{\beta S(\tau)} \cdot S'(\tau)\right) d\tau, \\
I(t) - I(0) &= -S(t) + S(0) + \frac{\gamma}{\beta} \left(\ln S(t) - \ln S(0)\right).
\end{aligned}
$$

Zamijenimo $I(0)$ i $S(0)$ s I_0 i S_0 koje su konstante, jer je tako zadano u početnim uvjetima. Dobivamo implicitno rješenje:

$$
I(t) + S(t) - \frac{\gamma}{\beta} \ln S(t) = I_0 + S_0 - \frac{\gamma}{\beta} \ln S_0 \tag{3.2}
$$

Zaključci na temelju računa:

✱ U (3.2) lijeva strana jednakosti opisuje ponašanje širenja epidemije, a desna strana jednakosti je konstanta za svaki vremenski interval.

U trenutku $t = \infty$ lijeva strana jednakosti (3.2) jednaka je

$$0 + S_\infty - \frac{\gamma}{\beta} \ln S_0 \tag{3.3}$$

Izjednačavanjem (3.2) i (3.3) slijedi:

$$\begin{aligned} I_0 + S_0 - \frac{\gamma}{\beta} \ln S_0 &= 0 + S_\infty - \frac{\gamma}{\beta} \ln S_\infty, \\ I_0 + S_0 - S_\infty &= \frac{\gamma}{\beta} \ln S_0 - \frac{\gamma}{\beta} \ln S_\infty, \\ I_0 + S_0 - S_\infty &= \frac{\gamma}{\beta} \ln \frac{S_0}{S_\infty}. \end{aligned}$$

$$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{I_0 + S_0 - S_\infty}{\ln \frac{S_0}{S_\infty}} \tag{3.4}$$

gdje su I_0-početni broj zaraženih ljudi, S_0 -početni broj ljudi koji se mogu zaraziti, S_∞-broj ljudi koji je ostao nezaražen.

✱ Iz jednadžbe

$$I' = \left(-1 + \frac{\gamma}{\beta S}\right) S'$$

možemo procijeniti maksimalan broj zaraženih I_{max}.

Znamo da se I_{max} pojavljuje kada je $I' = 0$.

Uvrštavanjem $I' = 0$ u (II) dobivamo:

$$\begin{aligned} 0 &= \beta I S - \gamma I, \\ \beta I S &= \gamma I, \\ S &= \frac{\gamma}{\beta}. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem dobivenog S u (3.2) :

$$\begin{aligned} I_{\max} + \frac{\gamma}{\beta} - \frac{\gamma}{\beta} \ln \frac{\gamma}{\beta} &= S_0 + I_0 - \frac{\gamma}{\beta} \ln S_0, \\ I_{\max} &= S_0 + I_0 - \frac{\gamma}{\beta} \ln S_0 - \frac{\gamma}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta} \ln \frac{\gamma}{\beta}, \\ I_{\max} &= \frac{\gamma}{\beta} \left[\ln \frac{\gamma}{\beta} - \ln S_0 - 1 \right] + S_0 + I_0. \end{aligned}$$

Prestanak rasta epidemije događa se kada broj zaraženih prestane rasti, a to se događa kada epidemija dosegne I_{max}. Ako uspijemo procijeniti I_{max}, onda znamo do kada možemo očekivati rast epidemije.

✱ Krećemo od jednadžbe (II)

$$I' = \beta IS - \gamma I$$

i pretpostavke da se epidemija više ne širi, jer svi koji su se mogli zaraziti su se zarazili:

$$\begin{aligned} \beta IS &= 0, \\ I' &= \beta IS - \gamma I. \end{aligned}$$

Označimo $I(0) = I_0$ -uz prepostavku da su u početnom trenutku $t = 0$ svi koji se mogu zaraziti već zaraženi.

$$\begin{aligned} I'(t) &= -\gamma I(t), \\ \frac{dI}{dt} &= -\gamma I, \\ \frac{dI}{I} &= -\gamma\, dt, \\ \int \frac{dI}{I} &= -\gamma \int dt, \\ \ln I &= -\gamma t + C_1, \\ I &= Ce^{-\gamma t}, \quad \text{gdje je } C = \text{const.} \end{aligned}$$

Iz uvjeta $I(0) = I_0$ slijedi da je konstanta C jednaka I_0, pa odatle slijedi :

$$I(t) = I_0 e^{-\gamma t}$$

Izraz $\frac{I(t)}{I_0} = e^{-\gamma t}$ predstavlja omjer zaraženih ljudi za $t \geq 0$ odnosno vjerojatnost da je osoba i dalje zaražena u trenutku t.

Zapišemo funkciju distribucije broja oporavljenih, gdje je $I_0 \cdot (1 - e^{-\gamma t})$ broj oporavljenih i pripadnu funkciju gustoće:

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\gamma t}, & \text{ako } t \geq 0, \\ 0, & \text{ako } t < 0 \end{cases}$$

$$f(t) = \begin{cases} \gamma e^{-\gamma t}, & \text{ako } t \geq 0, \\ 0, & \text{ako } t < 0. \end{cases}$$

Sada možemo izračunati očekivano vrijeme provedeno u zarazi:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\, dt &= \int_{0}^{+\infty} \gamma t e^{-\gamma t}\, dt \\
&= \gamma \frac{t e^{-\gamma t}}{-\gamma}\bigg|_0^{+\infty} + (-\gamma) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\gamma t}}{-\gamma}\, dt \\
&= -t e^{-\gamma t}\big|_0^{+\infty} + \left(\frac{1}{-\gamma}\right) e^{-\gamma t}\big|_0^{+\infty} \\
&= [0-0] + \left(\frac{1}{-\gamma}\right)\left[0 - e^{0}\right] \\
&= 0 + \frac{1}{\gamma} \\
&= \frac{1}{\gamma}.
\end{aligned}
$$

Odatle slijedi da je $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\gamma}$ prosječno vrijeme u kojem je osoba zarazna, gdje je X slučajna varijabla koja opisuje vrijeme trajanja zaraznosti.

Ako pretpostavimo da je vrijeme zaraze 5 dana, onda je $\gamma = \frac{1}{5dana}$, pa iz (3.4) eksplicitno izračunamo β.

Primjer provedbe epidemiološkog modela

Ovaj primjer navodimo iz članaka *„Influenza in Boarding School"* objavljen 1978. godine u *British Medical Journal*.

Školu pohađa 763 dječaka od kojih je jedan došao bolestan na prvi dan škole. Trećeg dana zaražene djece je bilo 25, a proboj zaraženih preostalih dana trajanja bolesti dan je u tablici 1. Prosječno vrijeme trajanja bolesti je od 5 do 6 dana, a vrijeme zaraznosti je 2 dana.

Dan t	0	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$I(t)$	1	25	75	227	296	258	236	192	126	71	28	11	7

Iz danih podataka imamo sljedeće:
$N = 763$-ukupna populacija
$S_\infty = 763 - 1 - 25 - 75 - 227 - 296 - 258 - 236 - 192 - 126 - 71 - 28 - 11 - 7 = 19$, što je broj dječaka koji nisu zaraženi.

Procjena je da zaraženost traje 2 dana, iz čega slijedi $\gamma = \frac{1}{2}$.

Trećeg dana nastave primijećena je zaraza, pa je to nama početni trenutak za $t = 0$:

$$S_0 = S_3 = 763 - 25 = 738$$
$$I_0 = 25.$$

Iz formule $\frac{\gamma}{\beta} = \frac{I_0 + S_0 - S_\infty}{\ln\left(\frac{S_0}{S_\infty}\right)}$ izračuna se β:

$$\beta = \frac{\gamma \ln \frac{S_0}{S_\infty}}{I_0 + S_0 - S_\infty} = \frac{\frac{1}{2} \ln \frac{738}{19}}{25 + 738 - 19} = 0,00246.$$

Odatle možemo dobiti omjer $\frac{\gamma}{\beta}$ i I_{max} :

$$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{\frac{1}{2}}{0,00246} = 203,25$$

$$I_{\max} = \frac{\gamma}{\beta}\left[\ln\left(\frac{\gamma}{\beta}\right) - \ln S_0 - 1\right] + S_0 + I_0$$
$$I_{\max} = \frac{\frac{1}{2}}{0,00246}\left[\ln\left(\frac{\frac{1}{2}}{0,00246}\right) - \ln 738 - 1\right] + 738 + 25 = 297,4.$$

Zaključak:

Ovom metodom možemo dobro modelirati zarazu koja se širi unutar zatvorenog prostora za tu određenu bolest, ali ključno za dobro ponašanje modela je dobra procjena ulaznih parametara.

Napomena:

Kako bi zahtjev za dobrom procjenom ulaznih parametara bio opravdan, na temelju simulacije događaja analizirat će se mogući ishodi u situacijama malih izmjena parametara. Neka populaciju čini 100 ljudi i broj zaraženih je 10. Stoga je $N = 100$, $I = 10$. Ako su parametri procijenjeni s $\beta = 0,01$ i $\gamma = 0,3$, tada broj zaraženih raste, a broj ljudi koji se potencijalno mogu zaraziti opada. Ako se γ poveća na 0,9 , tada se ljudi brzo oporavljaju, toliko brzo da ne uspijevaju zaraziti druge. Ako povećamo β na $0,1$, zaraza se brzo širi, da se cijela populacija zarazila.

4 | Zaključak

Velika tvrtka, proizvodni pogon, populacija pogođena boleŝću ili bilo koja druga skupina ljudi ili korporacija kada se susretne s nekim problemom očekuje od ljudi koji se bave tim područjem da daju gotovo rješenje. Između stvarnog problema i rješenja slijedi matematičko modeliranje pomoću kojeg se dolazi do matematičkog modela, a rješavanje modela dovodi nas do matematičkog zaključka kojeg treba interpretirati u rješenju problema i eksperimentom potvrditi da je to uistinu rješenje početnog problema.
Pojedinac ili tvrtka nisu uključeni u korake između problema i rješenja, jer se u njima stvarna situacija preoblikuje u matematički jezik o kome svi nemaju dovoljno znanja da bi se njime služili. Iz istog razloga matematički zaključak se mora „prevesti" u terminologiju stvarnog problema. Kada dođe do zaraze u nekoj populaciji, od epidemiologa i liječnika očekuje se da nađu rješenje i provedu određene postupke kako bi se što prije ljudi izliječili i kako bi epidemija nestala. Bolesnik ne razmišlja o koracima kako će to na epidemiološki način provesti, to jest bolesnik nije uključen u epidemiološki model, ali u istom tom procesu bolesnik provodi korake koji uključuju prepoznavanje simptoma, javljanje liječniku, pridržavanje uputa liječnika i slično, što je opet matematički model, ali s drugačijim koracima i metodama. Ista osoba, u ovom slučaju bolesnik, sama je provodila jedan matematički model, dok se koristila rezultatima drugog modela (epidemiološkog modela). Često intuitivno provodimo jednostavne matematičke modele i nesvjesno koristimo rješenja onih složenih.

Literatura

[1] Anonymous. Influenza in a boarding school. British Medical Journal 1, 587, 1978..

[2] Burazin K., Jankov J., Kuzmanović I., Soldo I., Primjene diferencijalnog i integralnog računa funkcija jedne varijable. Osijek: Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku – Odjel za matematiku

[3] Davis Philip J. i sur., Doživljaj matematike. Golden marketing-Tehnička knjiga, Zagreb, 2004.

[4] Hrvatsko strukovno nazivlje, Struna
(pristupljeno 25.8.2023.) s http://struna.ihjj.hr/naziv/modeliranje/35046/

[5] Marušić, M. (2022). Matematičko modeliranje širenja epidemije. Liječnički vjesnik, 144 (Supp 5), 30-31. <https://doi.org/10.26800/LV-144-supl5-13>

[6] Matematika-Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje. Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2021.
http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=39398
(pristupljeno 27. 8. 2024.)

[7] Sveučilište u Zagrebu Fakultet elektrotehnike i računarstva, Matematičko modeliranje u inženjerstvu
(pristupljeno 20.8.2023.) s https://www.fer.unizg.hr/predmet/mmui.

Sažetak

Tema ovog rada je matematičko modeliranje s naglaskom na epidemiološko modeliranje. U prvom dijelu rada istaknut ćemo povezanost matematičkih vještina i izvršavanje svakodnevnih obaveza. Objasnit ćemo proces matematičkog modeliranja, navest ćemo vrste matematičkog modeliranja i primjere iz fizičkog svijeta. Posebno ćemo promatrati epidemiološki model počevši od povijesnog konteksta i potrebe za razvijanjem modela za analizu širenje zaraznih bolesti u populaciji. Nadalje ćemo razmatrati osnovni koncept SIR modela i analizirati primjer njegove provedbe.

Ključne riječi

modeliranje, matematičko modeliranje, epidemiološko modeliranje, širenje zaraznih bolesti, epidemija

Mathematical Modeling and Application of Epidemiological Models

Summary

The focus of this paper is on mathematical modeling, with a particular emphasis on epidemiological modeling. In the first part of the paper, we will highlight the connection between mathematical skills and the execution of everyday tasks. The process of mathematical modeling will be explained, including the types of mathematical models and examples from the physical world. Special attention will be given to epidemiological models, beginning with the historical context and the need for developing models to analyze the spread of infectious diseases within a population. Furthermore, we will examine the fundamental concept of the SIR model and analyze a case study of its implementation.

Keywords

modeling, mathematical modeling, epidemiological modeling, spread of infectious diseases, epidemic