Važne ličnosti iz povijesti razvoja teorije vjerojatnosti

Hankić, Benjamin

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Benjamin Hankić

Važne ličnosti iz povijesti razvoja teorije vjerojatnosti

Završni rad

Osijek, 2022.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Benjamin Hankić

Važne ličnosti iz povijesti razvoja teorije vjerojatnosti

Završni rad

Mentor: doc. dr. sc. Ivan Papić

Osijek, 2022.

Sažetak:

Tema ovog rada su zanimljivosti i povijesne osobe koje su imale utjecaj na razvoj teorije vjerojatnosti. Vjerojatnost je jedna od novije formiranih matematičkih disciplina. Iako je bila široko zastupljena u svakodnevnom životu kroz razne događaje, tek sredinom druge polovice drugog tisućljeća znanstvenici poprimaju zanimanje za istraživanjem vjerojatnosti. Navedeno je kako je od običnih igara na sreću krenuo početni razvoj vjerojatnosti kao matematičke grane zahvaljujući velikanima poput Cardana, Pascala, Fermata, Huygensa, Bernoullija, de Moivrea i drugih. Navedene su i osnovne definicije i neki od prvih veliki zakona koji su postali temelj za daljnji razvitak vjerojatnosti.

Ključne riječi:
vjerojatnost, pokus, događaj, povoljan događaj, šansa, binomna razdioba, Pascalov aritmetički trokut, figurativni brojevi

Important personalities from the history of the development of probability theory

Abstract:

Topic of this bachelor's thesis are interesting things and historical persons important for developing theory of probability. Probability is one of newer branches of mathematics. Although things and events that were connected with probability were very often in every day life, the analysis of probability by scientists started just at beginning of second half of second millennium. In this thesis it is stated how from ordinary gambling games development of theory of probability has started thanks to great mathematicians like Cardano, Pascal, Fermat, Huygens, Bernoulli, de Moivre and others. Basic definitions and some of the first big laws that have become foundation for future development of probability are also stated.

Keywords:
probability, experiment, event, favorable event, chance, binomial distribution, Pascal arithmetical triangle, figurative numbers

Sadržaj

1. Uvod

U samom početku vjerojatnosti događaji nisu bili razmatrani na način kako je to danas, već su bili promatrani kao događaji koji se realiziraju bez nekog pravila. Stari Grci nisu smatrali vjerojatnost dostojnom proučavanja, analiziranja te uspostavljanja kao grane matematike. Prošlo je puno vremena dok nije došlo do neke značajnije promjene po tom pitanju. Tek 1500-tih godina kad istraživanje vjerojatnosti započinje Girolamo Cardano dolazi do nekih značajnijih promjena. Iako nije naveo neke formalne definicije, u svojoj knjizi *Liber de Ludo Aleae* naveo je mnogo bitnih primjera i problema od kojih je za neke uspio pronaći rješenje. Njegov rad su pobliže proučili i nadogradili Blaise Pascal i Pierre de Fermat putem svoje suradnje, a Pascal formira i svoj aritmetički trokut koji će biti vrlo koristan u rješavanju budućih problema. Prve velike zakone vjerojatnosti naveo je Jacob Bernoulli, dok je de Moivre njegove zakone još malo proširio i pobliže objasnio.

U ovom završnom radu prvo ćemo se upoznati s korijenima spominjanja vjerojatnosti i njenog proučavanja te zatim s njenim preporodom i daljnim razvojem u renesansi. Zatim ćemo redom po poglavljima navesti važne ličnosti koje su postavili temelje za razvoj vjerojatnosti kao matetičke discipline, a to su Giloramo Cardano i njegovo djelo *Liber de Ludo Aleae*, zatim vrlo uspješna suradnja Blaisea Pascala i Pierrea de Fermata, Christiaan Huygens, Jacob Bernoulli i Abraham de Moivre. Na kraju rada ćemo navesti i neke zanimljivosti iz početka razvoja moderne teorije vjerojatnosti.

2. Teorija vjerojatnosti kroz povijest

2.1. Pojam vjerojatnosti u doba Antike i Srednjem vijeku

Prvobitni koncept vjerojatnosti i slučajnosti pojavio se u antičkom dobu kao poveznica s vračanjem, proricanjem budućnosti, igrama na sreću, zakonima, filozofijom, osiguranjima i pogreškama procjene u drugim znanostima, kao što su naprimjer astronomija i medicina. S obzirom na mnogobrojne uspjehe Grka u razvijanju matematike i raznih znanosti pomalo je iznenađujuće kako nisu iskoristili simetričnost igara na sreću ili stabilnost relativnih frekvencija kako bi napravili aksiomatsku teoriju vjerojatnosti istovrsnu njihovoj geometriji. Simetrija i stabilnost koje su nama danas vrlo očite to tada nisu bile zbog nesavršenosti tadašnjih promatranih slučajnih događaja. Umjesto danas korištenih kockica, tada su najčešće u upotrebi bili astragali, odnosno petne kosti kopitara. Shmuel Samburski je 1956. naveo da tada popularna igra na sreću u kojoj su se koristila četiri astragala jedan ishod je bio cijenjen više od ostalih unatoč tomu da su ostali imali manju vjerojatnost. To nas upućuje na to da Grci nisu primjećivali veličine odgovarajućih relativnih frekvencija. Neki smatraju da je proučavanje i razvijanje teorije vjerojatnosti u Antici je bilo spriječeno od strane religije, dok drugi kao mogući razlog navode izostanak pojma slučajnog događaja.To nas dovodi do zaključka da je teorija vjerojatnosti trebala biti istražena. Sličan zaključak je naveo Samuel Sambursky koji tvrdi da je filozofija Platona i Aristotela ograničila perspektivu Grčkih znanstvenika tako da su oni tražili regularnosti samo u matematici i nebesima. Takav način razmišljanja nas dovodi do filozofska rada Aristotela koji je podijelio događaje u tri kategorije. Prva kategorija su bili događaji koji će se sigurno dogoditi, odnosno koji su neizbježni, druga kategorija su bili vjerojatni događaji, odnosno oni koji se dogode u većini slučajeva, a treća su bili događaji su bili nepredvidivi ili nepoznati događaji koji su se događali potpuno slučajno. U tu treću kategoriju Aristotel je uvrstio igre na sreću, te zbog toga se za njih smatralo da nisu valjane za znanstvena istraživanja. Također, uz igre na sreću uopće nije vezao pojam vjerojatnosti. Aristotelovo poimanje vjerojatnosti je epistemiološko i nekvantitativno. Rimljani su naslijedili razmatranja i znanja starih Grka te je vjerojatnost i dalje bila poimana kako je Aristotel naveo.

2.2. Vjerojatnost u doba renesanse

Koncept vjerojatnosti u doba renesanse je i dalje bio nematematički i epistemiološki, dok je šansa bila iskazana kao omjer broja poželjnih i broja mogućih ishoda, a račun šansi je postao dio algebre. Početkom 18. stoljeća pojam šanse i vjerojatnosti postali su sinonimi, što nas upućuje na to da je vjerojatnost također postala numerička, odnosno da je postala dio algebre. Vjerojatnost prva numerička obilježja dobiva 1662. u radu izdanom od strane Antoinea Arnaulda i Pierrea Nicolea. Račun šansi od tada biva primijenjen i na vjerojatnost. Doktrina šansi se razvila u teoriju vjerojatnosti koja je bivala sve više primijenjena od strane drugih znanstvenika bez previše brige oko njene interpretacije, a izuzetak je bio Jacob Bernoullie. Moderan koncept teorije vjerojatnosti doveo je do velike rasprave među matematičarima tog vremena i proučavanja osnovnih obilježaja tog koncepta. Motivaciju za istraživanjem i dokazivanjem vjerojatnosti kao dio matematičke teorije matematičari su dobili kroz igre na sreću, odnosno kroz kockanje. Prvi koji je osnovna matematička obilježja vjerojatnosti objedinio u knjigu bio je Girolamo Cardano u djelu *Liber de luda aleae iliti*

Knjiga o bacanju kocke. Knjiga je nastala oko 1565., ali je objavljena tek 1663. Djelo je nastalo iz velike strasti Cardana prema kocki. Tema knjige je opis izračunavanja dobitka u igrama na sreću. U njoj je dana i klasična definicija vjerojatnosti *kao omjer broja poželjnih ishoda i broja mogućih ishoda.* Zbog te želje za što sigurnijim dobitkom teorija vjerojatnosti se razvila u matematičku disciplinu kroz prepiske Fermata i Pascala. Njihove prepiske i razmišljanja je objedinio i nastavio nizozemski znanstvenik Christian Huygens. 1713. Jacob Bernoulli prezentira kombninatornu vjerojatnost u potpuno sređenom obliku.

2.3. Moderna teorija vjerojatnosti

U razdoblju između dva svjetska rata, veliki razvitak doživjela je moderna teorija vjerojatnosti, te je postala prava matematička disciplina. Razlog tomu su bili jasno definiran koncept, utvrđeni glavni teoremi i obrazložene metode. Do tog uspjeha došlo je integriranjem pojedenih polja aksiomatske matematike, zakona velikih brojeva i distribucije slučajnih varijabli. Glavna poveznica između srednjovjekovne i moderne teorije vjerojatnosti bio je centralni granični teorem, koji također može biti utvrđen kao klasični i osnovni dio u modernoj teoriji vjerojatnosti.
U modernim notacijama Laplace je iznio sljedeće zapažanje: neka su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne, jednako distribuirane i ograničene slučajne varijable koje su neprekidne ili diskretne. Ukoliko je n veliki broj, tada za $\mu := EX_1$ i $\sigma^2 := E(X_1 - \mu)^2$ vrijedi

$$P(\eta\mu + r_1\sqrt{n} \leq X_1, \ldots, X_n \leq \eta\mu + r_2\sqrt{n} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt$$

Deriviranjem ove aproksimacije, Laplace je iznio grubi oblik centralnog graničnog teorema koji je baziran na metodi karakterističnih funkcija. Primjena tog teorema je imala golemi utjecaj na tri područja: vjerojatnosno opravdanje korištenja metode najmanjih kvadrata za izračunavanje distribucije pogreške mjerenja, proučavanje očitih ili skrivenih pravilnosti u prirodi, te prednost izračunavanja vjerojatnosti budućih događaja odnosno rani začetak teorije rizika.
Teorem je poslužio za postavljanje intelektualnih temelja za hipotezu "elementarnih pogrešaka" koju su prvi spomenuli Hagen i Bassel. Hipoteza pretpostavlja da se svaka pogreška mjerenja sastoji od sume velikog broja mali nezavisnih elementarnih pogrešaka. Upravo na osnovu tih Laplaceovih temelja mnogi, pogotovo Quetelet, su nastavili na razvoju te hipoteze, te je ona ubrzo primjenjena u biologiji i u socijalnim znanostima. Von Plato je definirao razvoj moderne teorije vjerojatnosti na dva različita stajališta. U prvom stajalištu je razvoj započeo Borelsovim strogim zakonom velikih brojeva za relativne frekvencije 1909. godine. Uz to su se pojavili novi problemi oko beskonačnih skupova koji nisu mogli biti rješavani s postojećim jednadžbama i razmatranjima koji su korišteni za konačne skupove, kao naprimjer prijelaz s diskretne vjerojatnosti na funkciju gustoće gdje nisu mogli biti primjenjeni "klasični" teoremi vjerojatnosti. Kao posljedica pronalaska rješenja tih problema nastale su osnove teorije mjere za teoriju vjerojatnosti.
Drugo stajalište govori kako su osnovne interpretacije vjerojatnosnih rezultata u prirodnim znanostima prešle na indeterministički svjetonazor, odnosno da se smatra da su događaji slučajni i da nisu uvjetovani nikakvim zakonima. Von Plato "skok" s klasične na modernu teoriju vjerojatnosti naziva "vjerojatnostnom revolucijom", koju vidi kao dio potpune preobrazbe vjerojatnosti iz klasične u modernu znanost. Također navodi kako se utjecaj "klasičnih" problema teorije vjerojatnosti koji su utjecali na razvoj moderne teorije između dva svjetska rata može očitovati i u razvoju centralnog graničnog teorema.

3. Povijesne ličnosti

3.1. Girolamo Cardano

Girolamo Cardano rođen je 24. rujna 1501. godine u Paviji u blizini Milana, a preminuo je 21. rujna 1576. u Rimu. Bio je talijanski fizičar i matematičar, a područja i problemi u matematici kojima se bavio bili su algebra, kubne jednadžbe i vjerojatnost. Bio je vanbračni sin Milanskog odvjetnika koji je bio i nastavnik matematike. Pohađao je sveučilište u Paviji sve do 1526. kada dobiva svoju diplomu iz područja medicine. Nakon toga se prijavljuje na sveučilište za fiziku u Milanu, ali dobiva službenu odbijenicu zbog svog statusa kao vanbračno dijete, međutim vjeruje se da je pravi razlog bio njegov čudan karakter. Bio je poznat kao osoba britkog jezika, vrlo ekscentričan i strastveni kockar. Seli se u Milano 1532. gdje živi u velikom siromaštvu sve dok ne počne podučavati matematiku. Godine 1545. objavljuje rad iz algebre u kojemu se po prvi puta nalazilo rješenje kubne jednadžbe, a to je rješenje kasnije postalo poznato još kao i Cardanova formula. Zbog svoje strasti prema kockanju napisao je jedno od njegovih najboljih djela, *Liber de Ludo Aleae*, koje je bilo jedan od temelja razvoja vjerojatnosti kao matematičke discipline. Osim na području matematike imao je uspjeha i na području fizike, odnosno mehanike, gdje je imao par vrlo bitnih izuma. Bio je jedan od najizvanrednijih matematičara svoga doba.

3.2. Liber de Ludo Aleae ili Knjiga o bacanju kocke

Knjiga o bacanju kocke je rasprava o moralnosti, praktičnosti i teorijskim aspektima kockanja. Napisana je prostim rječnikom i s mnogo anegdota iz Cardanovog osobnog iskustva s kockom. U svojoj autobiografiji je izjavio da je 25 godina konstantno kockao svaki dan. U knjizi Cardano daje korisne savjete o kockanju, kako i kad igrati, o korisnosti poraza i osnovnim principima kockanja. Većina teorije u ovom djelu je iznesena u obliku primjera. U nekim slučajevima Cardano je do rješenja nekih problema došao nizom pokušaja, dok knjiga sadrži ispravna i neispravna rješenja. Također, dotakao se problema za koje nije uspio pronaći rješenja, pa je stoga dao rješenja za koja on smatra da su približna. Prvi je uočio da se igraća kocka sastoji od šest strana koje su sve jednako vjerojatne, naravno pod uvjetom da je kocka simetrična i pravilna. Definiciju šanse koju on uvodi je ta koja kaže da je šansa jednaka omjeru broja poželjnih događaja i broju preostalih događaja. U ovom djelu uveo je sljedeće oznake kako bi lakše pojasnio slučaj pojavljivanja brojeva na kockicama kada su u igri tri kockice:

- brojem 6 je označio slučaj kada se pojave 3 ista broja
- brojem 30 slučaj kada se pojave 2 ista broja
- brojem 20 slučaj kada su svi brojevi različiti.

U sljedećem koraku je izračunao permutacije u svakom od navedenih slučaja, te je za navedeni primjer rezultat bio redom 1, 3 i 6. Krajnji rezultat bio je $6 * 1 + 30 * 3 + 20 * 6 = 216$. Cardano promatra distribuciju zbroja vrijednosti dobivenih u bacanjima u igri s dvije i tri kockice. U tablici navodi broj kombinacija dobivenih vrijednosti u igri s bacanjem dvije, odnosno tri kockice za sljedeće događaje:

- s 1 je označio bacanje u kojem se pojavi barem jedna jedinica na kockici

- s 2 bacanje u kojem se pojavi barem jedna jedinica ili dvojka
- s 3 bacanje u kojem se pojavi barem jedna jedinica, dvojka ili trojka
- s 4 bacanje u kojem se pojavi barem jedna jedinica, dvojka, trojka ili četvorka
- s 5 bacanje u kojem se pojavi barem jedna jedinica, dvojka, trojka, četvroka ili petica
- s 6 bacanje u kojem se pojavi barem jedna jedinica, dvojka, trojka, četvroka,petica ili šestica.

Važno je napomenuti da moguće ishode koji se ponove više puta Cardano broji samo jednom odnosno samo prvi put kada se pojave. Naprimjer, u igri s dvije kockice ishod $(1, 2)$ je valjan i za slučaj "1" i za slučaj "2", ali u tablici taj ishod je uračunat samo u slučaju "1" jer se tamo prvi put pojavljuje. Cardano svoje rezultate zapisuje u obliku sljedeće tablice:

	Dvije kockice	**Tri kockice**
1	11	91
2	9	61
3	7	37
4	5	19
5	3	7
6	1	1
Ukupno:	36	216

Tablica 1: U tablici je prikazan broj povoljnih ishoda po određenim slučajevima

Uz postignuća navedana u gornjoj tablici, Cardanovo najnaprednije postignuće bilo je takozvano *"pravilo multipliciranja"* kojim se računa je li pogodno vratiti se igranju igre ili je bolje odustati nakon određenog broja ponavljanja. Neka nam t označava broj jednakovjerojatnih ishoda, a r broj željenih ishoda tako da je šansa za dobitka $\frac{r}{t-r}$. Nakon niza pogrešaka i pokušaja izračunavanja dolazi do rezultata da nakon n odigranih ponavljanja šansa za dobitak bi bila $\frac{r^n}{t^n-r^n}$. Ako uvedemo supstituciju $p = \frac{r}{t}$ dano rješenje se tada može zapisati i kao $\frac{p}{1-p}$. To je matematički zapis šanse koji se koristi i dan danas. Cardano je naveo nekoliko primjera primjene navedenog pravila u knjizi. Spomenut ćemo najkompliciraniji primjer, a to je sljedeći. U igri u kojoj se koriste tri pravilne kockice, broj povoljnih ishoda u kojima se pojavi barem jedna jedinica je 91, a ukupan mogući broj ishoda je 216. Šansa da se to dogodi svaki put u tri odigrana ponavljanja igre je $\frac{91^3}{216^3-91^3} = \frac{753{,}571}{9{,}324{,}125}$ što je nešto manje od $\frac{1}{12}$. Naveo je još i nekoliko primjera u kojima se računa prosječna vrijednost dobivena prilikom bacanja kockica u raznim vrstama igre.

Nekoliko poglavlja svoje knjige Cardano je posvetio kartaškim igrama, točnije igri zvanoj Primero koja je bila srednjovjekovna inačica današnjeg pokera. Pokazao je kako doći do vjerojatnosti nekih jednostavnijih ishoda pomoću izvlačenja karata iz špila.

Bez dokaza je naveo i pravilo po kojemu se računa na koliko načina n kockica može pasti isključivo kao redoslijed Figurativnih brojeva[1], tj. kao ponavljajuće zbrajanje $(1, 1, , ..., 1)$ odakle dobivamo $(1, 2, 3, ..., 6), (1, 3, 6, ..., 21)$ itd. 1539. godine izvodi formulu $2^n - n - 1$ za računanje broja kombinacija n stvari od kojih se barem 2 vrše istovremeno. Uočio je poveznicu između geometrijskih brojeva i kombinatornih brojeva C_k^n (broj mogućih izbora k

[1] Redoslijed brojeva koji se može prikazati koristeći geometrijske likove (figure)

elemenata u skupu od n elemenata). Dodatno je još pokazao da je

$$C_k^n = \frac{n-k+1}{k} C_{k-1}^n$$

iz čega je izveo da je

$$C_k^n = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}.$$

Veoma začuđujuće je što Cardano koji je bio vrsni matematičar svoga doba ne navodi nikakve empirijske podatke u svojoj knjizi. Nije navedena čak niti jedna relativna frekvencija nekog događaja iz igre unatoč tomu što je imao bogato kockarsko iskustvo. No, Cardano u knjizi iznosi mnoga korisna zapažanja. Uspio je postaviti osnovne temelje za daljni razvoj vjerojatnosti kao matematičke grane, a jedno od najvažnijih je bilo da se u suštini observacije moraju promatrati pod istim uvjetima. Pascal je 1654. izjavio da se Cardanova formula $\frac{p}{1-p}$ smatrala osnovnom formulom vjerojatnosti.

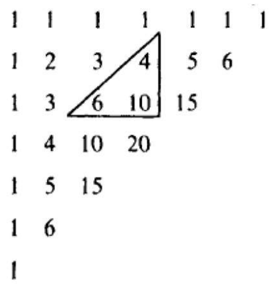
3.3. Pascalove i Fermatove osnove teorije vjerojatnosti

3.3.1. Blaise Pascal

Blaise Pascal rođen je 19. lipnja 1623. u Clermont-Ferrandu u Francuskoj, a preminuo je 19. kolovoza 1662. godine u Parizu. Majka mu je umrla kada je imao tri godine, pa ga je gotovo cijelo djetinjstvo odgajao njegov otac koji je bio sudac, ali s velikim zanimanjem za znanost. Pascala su nazvali čudom od djeteta još od rane dobi. Od strane oca mu je bilo naređeno da prvo mora završiti jezično obrazovanje, a učenje matematike bilo mu je strogo zabranjeno do 15. godine. Zbog velike znatiželje koju je ta zabrana izazivala s 12 godina počinje se baviti geometrijom. Nakon samo par tjedana bavljenja geometrijom uspio je dokazati da je zbroj kuteva u trokutu jednak zbroju dva prava kuta. Rezultat je jako impresionirao njegovog oca, te ga je počeo voditi sa sobom na sastanke Mersenneaske akademije na kojima su se okupljali mnogi najbolji znanstvenici Francuske toga vremena, te će oni kasnije zajedno osnovati francusku akademiju znanosti. Sa 16 godina je napisao mali rad u kojemu je naveo da je projekcija konusnih presjeka kružnica. Također, naveo je i mnoge druge tvrdnje, ali bez dokaza. No, njegov rad i trud ukazivali su na to da je voljan dalje nastaviti istraživati i proučavati. Kako se otac bavio i ubiranjem poreza s 18 godina izumio je stroj za zbrajanje i oduzimanje kako bi ocu olakšao posao, a 8 godina kasnije ga je i usavršio. Nadahnut radovima Galilea i Torricellia postigao je vrlo značajna postignuća na području fizike. Njegov uspjeh na području fizike može se očitovati u tome što je pored niza važnih zakona mjerna jedinica za tlak nazvana po njemu. Zbog teške bolesti umire relativno mlad, a u zadnjim godinama života živio je od naslijeđenog očevog bogatstva i bavio se religioznim temama.

3.3.2. Pascalov trokut

Često su razni rezultati, radovi ili izračuni utjecali na razvoj određenih matematičkih disciplina, iako to možda nije bila primarna namjera matematičara. Jedan od tih rezultata je i Pascalov trokut. Pascal je kasnije uočio neka svojstva trokuta koja su uvelike olakšala način računanja u kombinatorici, odnosno olakšao je način izračunavanja binomnih koeficijenata



Slika 1: Slika Pascalovog trokuta preuzeta iz [1]

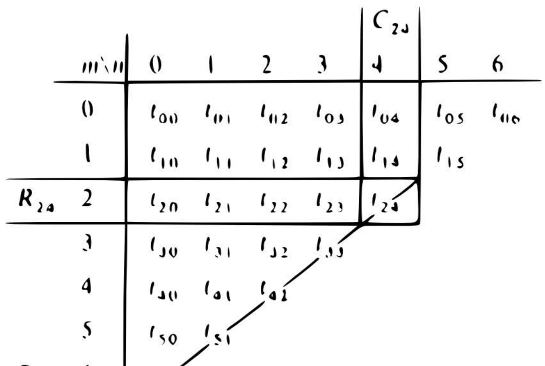
tako što je odsad bilo moguće očitati binomni koeficijent direktno iz trokuta. Na taj način se izbjelo ispisavanja silnih nizova. Zbog navedenog svojstva Pascalovog trokuta došlo je i do uspjeha i napretka na području vjerojatnosti. Pomoću olakšanog načina računanja binomnih koeficijenata Pascal i Fermat rješavaju *problem uloga odnosno problem raspodjele uloga* koji u to vrijeme bio možda i glavni problem iz vjerojatnosti. Način na koji su Pascal i Fermat iskoristili Pascalov trokut spomenut ćemo malo kasnije. Pascalov trokut je niz brojeva koji počinje s cjelinom. Glavno obilježje je da za svaki "trokut" brojeva suma prva dva broja na dijagonali jednaka je trećem broju koji se nalazi do dijagonale, kao što je prikazano na slici iznad. Važnost ovog njegovog rada leži u tome što je jasno i sustavno izloženo te u njegovim rigoroznim dokazima.
Zanimljivo svojsto Pascalovog trokuta je to da se u svakom retku nalazi niz figurativnih brojeva. U drugom retku trokuta se nalaze prirodni brojevi, u sljedećem trokutni[2], zatim piramidalni[3] itd.
Kao što je već navedeno, Pascal definira brojeve u aritmetičkom trokutu pomoću rekurzije. Zamislimo tablicu s dva obilježja i neka je broj u *(m+1).* retku i *(n+1).* stupcu označen s t_{mn} određen rekurzivnom formulom

$$t_{mn} = t_{(m-1),n} + t_{m,(n-1)}, \quad m, n = 0, 1, \ldots, \quad (m, n) \neq (0, 0)$$

s graničnim uvjetom

$$t_{m,-1} = t_{-1,n} = 0, \quad m, n = 1, 2, \ldots$$

i početnim uvjetom $t_{00} = 1$.



Slika 2: Pascalov aritmetički trokut iz [2]

[2]niz brojeva elemenata koji se mogu pravilno posložiti u oblik jednakostraničnog trokuta, 1,3,6,10,15,...
[3]niz brojeva elemenata koji se mogu pravilno posložiti u oblik piramide, 1,4,9,16,25,...

Pascal je izračunao brojeve sve do $m = n = 9$. Iznio je hipoteza o tome kako je broj t_{mn} moguće zapisati u multiplikativnom obliku

$$t_{mn} = \frac{(m+n)(m+n-1)\cdots(m+1)}{n(n-1)\cdots 1}.$$

Danas su njegovi rezultati uvršetni u kombinatoriku, no u malo drugačijem obliku

$$t_{mn} = \binom{m+n}{m} = \frac{(m+n)!}{m!n!}$$

te stoga njegova rekurzivna formula sad izgleda ovako

$$\binom{m+n}{m} = \binom{m+n-1}{m-1} + \binom{m+n-1}{n-1}.$$

3.3.3. Pierre de Fermat

Rođen je 1607. u Beaumont-de-Lomagne u Francuskoj, a preminuo 12. siječnja 1665. u Castresu. Dolazi iz bogate obitelji koja se bavila trgovinom kože. Studirao je pravo na sveučilištu u Toulouseu i matematiku na sveučilištu u Bordeauxu. Glavna profesija mu je bila pravo, odnosno odvjetništvo što mu je bio i jedini izvor zarade, dok mu je matematika bila hobi. Bio je jako društvena i pristupačna osoba, te je zbog toga stekao mnogo kolega unutar i izvan Francuske. S njima je uvijek prokomentirao svoja postignuća na području matematike. Iako je bio smatran amaterom i nije imao obavezu da svoje radove objavi, dobio je itekako zasluženo poštovanje od svojih kolega. Uzor mu je bio Viet, te se najviše njegovog rada zasniva na proučavanju grčkih teza i Vietovih algebarskih metoda. Velik doprinos napravio je u teoriji brojeva gdje je konstruirao slutnju koja kaže da ne postoje cjelobrojna rješenja jednadžbe

$$x^n + y^n = a^n \quad za \quad n > 2.$$

Sir Andrew John Wiles dokazao je navedenu Fermatovu slutnju, a dokaz je objavljen 1995. Iste godine postaje dobitnik Fermatove nagrade.

3.3.4. Pascal i Fermat

Uzrok ovog novog doprinosa razvoja teorije vjerojatnosti bili su upiti o igrama na sreću upućena Blaiseu Pascalu od strane Antoinea Gombauda Chevaliera de Merea 1654. Pascal se konzultirao s Pierreom de Fermatom radi odobravanja odgovora na dane upite, te je nakon toga uslijedilo njihovo međusobno dopisivanje. U to vrijeme znanstveni časopisi nisu postojali, stoga je popularna navika bila da kad netko od znanstvenika dođe do novog rješenja konzultira se sa svojim kolega putem pisama radi provjere točnosti tog rješenja. Poput Cardana, Pascal i Fermat koristili su princip numeracije jednako vjerojatnih događaja i među njima pogodnih događaja za igrača, ali su sad još na raspolaganju imali i kombinatornu teoriju. Na osnovu toga postavili su temelje za ono što danas nazivamo diskretna vjerojatnost. Pisali su o broju događaja i nisu koristili izraz vjerojatnost. Koristili su pravila o zbranjaju i množenju nad vjerojatnostima zdravo za gotovo. Uveli su izraz *"vrijednost igre"* kao *vjerojatnost dobitka* puta *ukupan ulog*, temeljna veličina koju Huynges tri godine kasnije naziva **očekivanje**. Pascal je također uveo *rekurziju* ili *"jednadžbu razlika"* kao novi način rješavanja vjerojatnosnih problema. Riješili su *"problem podjele"* pomoću binomne i negativne binomne distribucije.

"Problem podjele" je glasio ovako: dva igrača ulažu jednake uloge prije početka igre, s tim da je pobjednik onaj igrač koji prvi pobijedi u unaprijed dogovorenih n rundi. Igra iz nekog nepoznatog razloga prekida prije nego što je ijedan igrač došao do n pobjeda. Pitanje je kako će se pravedno podijeliti ukupni ulog s obzirom da u danom trenutku nitko nije pobjedio.

Rješavanje problema započinje navodeći dvije očite tvrdnje, odnosno dva korolara. Prvi korolar kaže da ako igrač osvoji određenu sumu novca tokom trajanja igre, bez obzira na to kako igra u konačnici završi, ta suma novca na kraju mora mu biti dodijeljena. U drugom korolaru navodi da ukoliko ukupni ulog pripada pobjedniku s vjerojatnošću 1/2, a igra još nije odigrana, ulog treba biti podijeljen ravnomjerno između dva igrača. Odnosno, zapisano pomoću formule možemo reći da *vrijednost igre* ili *očekivana zarada* igrača iznosi $\frac{ukupni\ ulog}{2}$.

Pomoću navedenog Pascal dokazuje prvi korolar. Ako igraču pripada iznos s kada izgubi i iznos $s+t$ kada pobijedi, te ako igra nije odigrana, onda bi njemu trebalo pripasti $s+\frac{t}{2}$ gdje

je t ulog u igri. U dokazu prvo koristi *korolar 1* koji kaže da bi igrač prvo trebao imati iznos s koji njemu pripada neovisno o ishodu igre, te da bi također dodatno trebao imati $\frac{t}{2}$ prema *korolaru 2*.
U *korolaru 2* jednostavno opaža da se isti iznos može dobiti zbrajanjem dvaju iznosa i dijeljenjem s 2. Pascal u navedenim korolarima izvodi igračev očekivani dobitak u slučaja kada dva ishoda igre odgovaraju različitim nagradama koje ne moraju biti ograničene na ukupni ulog i nulu.
Pascal navodi kako podjela uloga treba isključivo ovisiti o tome koliko svakom igraču nedostaje do n pobjeda. Radi jednostavnosti ulog ćemo označiti kao "cjelinu", a neka e(a,b) označava ujedno i vjerojatnost pobjede igrača A, te a broj pobjeda koje nedostaju do n igraču A i b broj pobjeda koje nedostaju igraču B. Pascal označava da ukupna vrijednost uloga iznosi "1" kako bi označavalo cjelinu, te zbog toga je e(a,b) jednako očekivanom dobitku igrača A i vjerojatnosti njegove pobjede. Kako bi izbjegao pojavljivanje razlomaka

	a	b	$e(a-1,b)$ $e(a,b-1)$	$e(a,b)$
(1)	0	$n>0$		1
(2)	n	n		1/2
(3)	1	2		
(3a) A wins	0	2	1	3/4
(3b) A loses	1	1	1/2	
(4)	1	3		
(4a) A wins	0	3	1	7/8
(4b) A loses	1	2	3/4	
(5)	1	4		
(5a) A wins	0	4	1	15/16
(5b) A loses	1	3	7/8	
(6)	2	3		
(6a) A wins	1	3	7/8	11/16
(6b) A loses	2	2	1/2	

Slika 3: Pascalov rekurzivni način izračunavanja e(a,b) iz [1]

pri računaja e(a,b) postavlja iznos uloga svakog igrača kao potenciju broja 2. U prikazanoj tablici nalaze se vjerojatnosti pobjede igrača A. Rezultati (1) i (2) su očiti. U (3) i sljedećim slučajevima Pascal razmatra dva moguća ishoda sljedeće igre u nizu, ili A pobjeđuje ili gubi, te je za svaki slučaj poznato očekivanje iz prethodnog računa i konačno očekivanje pronalazi se kao prosjek dva srednja očekivanja prema *korolaru 2*. Pascal zaključuje da se formula može koristiti općenito s uvjetnim argumnetom koji odgovara formuli

$$E[X] = \frac{E[X|A] + E[X|A^C]}{2}.$$

Koristeći moderne notacije, Pascalov postupak može se zapisati i na ovaj način

$$e(0,n) = 1 \quad i \quad e(n,n) = \frac{1}{2}, \quad n = 1,2,\dots$$
$$e(a,b) = \frac{1}{2}[e(a-1,b) + e(a,b-1)], \quad (a,b) = 1,2,\dots$$

Ovo je također i jednostavni primjer parcijalne jednadžbe, te osim toga odlično prikazuje međuovisnost matematike i teorije vjerojatnosti. Kako bi dobio eksplicitno rješenje za e(a,b) koristi svojstva svog aritmetičkog trokuta. U 18. stoljeću Pascalova rekurzivna formula postala je jako popularna i pomogla je u rješevanju težih matematičkih problema, a koristili su ju poznati znanstvenici poput *Moivrea, Lagrangea* i *Laplaca* za traženje načina za opće računanje rješenja diferencijalih i parcijalnih jednadžbi.
Za velike vrijednosti (a,b) numerička rekurzija prikazana u tablici na *slici 3* je glomazna i nezgrapna za računanje. Iz tog razloga Pascal je krenuo u potragu za lukavijim i jednostavnijim načinom izračuna. Pronašao je način uspoređujući rekurzivne formule za očekivanje za brojeve koji iz aritmetičkog trokuta razlikuju samo za faktor $\frac{1}{2}$ i rubne uvjete. Stoga on predlaže sljedeću formulu

$$e(a,b) = \frac{1}{D_{a+b-1,a+b-1}} \sum_{j=a}^{a+b-1} t_{a+b-1-j,j} \ , \quad a+b = 2,3,\dots, \tag{1}$$

gdje je $t_{m,n}$ element u *m-tom* retku i *n-tom* stupcu u Pascalovom trokutu, a $D_{m+n,n} = \sum_{j=0}^{n} t_{m+n-j,j}$ dijagonalna suma. Zbog simetrije zadnjih b članova koji su jednaki kao prvih b članova vrijedi

$$e(a,b) = \frac{D_{a+b-1,b-1}}{D_{a+b-1,a+b-1}}. \tag{2}$$

Navedenu formulu Pascal dokazuje indukcijom. Kako formula očito vrijedi za $a+b=2$, pretpostavlja da vrijedi i za $a+b=k$, te dokazuje da vrijedi i za $a+b=k+1$. Kako bi pronašao $\mathbf{e}(a,k+1-a)$ koristi rekurzivnu formulu

$$\begin{aligned} e(a,k+1-a) &= \frac{e(a-1,k+1-a) + e(a,k-a)}{2} \\ &= \frac{D_{k-1,k-a} + D_{k-1,k-a-1}}{2D_{k-1}} \\ &= \frac{D_{k,k-a}}{D_{k,k}}. \end{aligned}$$

Dodatno je primjetio da se (1) i (2) mogu također zapisati kao

$$e(a,b) = \sum_{i=a}^{a+b-1} \binom{a+b-1}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{a+b-1} = \sum_{i=0}^{b-1} \binom{a+b-1}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{a+b-1}.$$

Pascal nastavlja istraživati neke specijalne slučajeve. Ukoliko je $a < b$, dio uloga igrača $\boldsymbol{B}$ pridodaje se igraču $\boldsymbol{A}$, pod uvjetom da su početni ulozi igrača $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ jednaki. Taj dio uloga iznosi $2[e(a,b) - \frac{1}{2}]$, a prema jednadžbi (4) i svojstvima aritmetičkog trokuta vrijedi

$$2\Big[e(1,b)-\frac{1}{2}\Big] = 1-\frac{1}{D_{b-1,b-1}} = 1-\Big(\frac{1}{2}\Big)^{b-1},$$
$$2\Big[e(b-1,b)-\frac{1}{2}\Big] = \frac{t_{b-1,b-1}}{D_{2b-2,2b-2}} = \binom{2b-2}{b-1}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{2b-2},$$
$$2\Big[e(b-2,b)-\frac{1}{2}\Big] = \frac{2t_{b-2,b-1}}{D_{2b-3,2b-3}} = \binom{2b-3}{b-2}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{2b-4}.$$

Također navodi da je zadnji rezultat jednak dvostrukom predzadnjem rezultatu, odnosno dobitak igrača ***A*** ako osvoji prvi bod je jednak dobitku kao da osvoji i drugi bod. To znači da on razmatra dio uloga igrača ***B*** koji odlazi igraču ***A*** samo kad igrač ***A*** osvoji bod, odnosno pobijedi u jednoj rundi igre. Pascal izvodi općeniti izraz koji glasi

$$2\Big[e(a,b)-e(a+1,b)\Big] = \frac{t_{a.b-1}}{D_{a+b-1}} = \binom{a+b-1}{a}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{a+b-1}$$

te koji se lako može dokazati putem rekurzijske formule i jednadžbe (4). Iz navedenog zapisa može se očitovati da vrijednost osvajanja boda iliti pobjede u rundi koja se računa pomoću protivnikova uloga jednaka je binomnoj vjerojatnosti.

Pascalovi rezultati i rad su čisto matematički, ne pokušava navesti nikakve kombinatorne interpretacije, iako navodi da se problem podjele može također riješiti kombinatornim putem. Ta tema je diskutirana u prepiskama i dogovoru s Fermatom.

Fermat je bio taj koji je uvidio vezu s kombnacijama, odnosno s Pascalovim aritmetičkim trokutom. U pismu upućenom Pascalu iz 24. kolovoza 1654. Fermat navodi da ako igraču ***A*** nedostaje ***a*** bodova do unaprijed dogovorenog broja bodova i igraču ***B*** ***b*** bodova, onda će igra biti završena nakon najviše $a+b-1$ rundi. Uzmimo naprimjer da igraču ***A*** nedostaje 2 boda, a igraču ***B*** 3 boda, odnosno (a,b)=(2,3). Najveći broj rundi koji se može odigrati dok pobjednik ne bude odlučen je $2+3-1=4$, stoga imamo $2^4=16$ kombinacija mogućih ishoda. Neka nam ***a*** predstavlja osvojeni bod od strane prvog igrača, a ***b*** osvojeni bod od strane drugog igrača. Promotrimo sve moguće kombinacije: ***aaaa, aaab, aaba, aabb, abaa, abab, abba, abbb, baaa, baab, baba, babb, bbaa, bbab, bbba, bbbb***. U svakoj kombinaciji u kojoj se pojavljuju dva slova a je slučaj u kojemu prvi igrač pobjeđuje, odnosno igrač ***A***, a kombinacije u kojima su barem tri slova b predstavlja slučajeve koji su u koristi drugogo igrača, odnosno igrača ***B***. Iz navedenih kombinacija mogućih ishoda vidljivo je da će igrač ***A*** pobijediti u 11 slučajeva, a igrač ***B*** u 5 slučajeva, točnije omjer pobjeda igrača ***A*** naspram pobjeda ***B*** je 11:5. S obzirom da je riječ o kombinacijma jasna je upotreba Pascalova trokuta kako bi se zaobišlo ispisivanje svih mogućih kombinacija. Za naš slučaj potrebno je gledati četvrti red Pascalovog aritmetičkog trokuta, odnosno brojeve 1, 4, 6, 4, 1, u kojem su redom navedni brojevi kombinacija dva objekta, tj. pobjede po rundama, u kojima je pobjeda prvog igrača (4, 3, 2, 1, 0 puta) i pobjeda drugog igrača (0, 1, 2, 3, 4 puta). Pošto su za konačnu pobjedu prvog igrača u igri dovoljna dva kruga, za njega su povoljna prva tri slučaja odnosno $1+4+6=11$, dok za druga su povoljna preostala dva slučaja $4+1=5$, te tako opet dolazimo do omjera 11:5.

Zbog navedenog načina rješavanja uvedena je **binomna razdioba**. Ukoliko neki promatrani pokus ima samo dva moguća ishoda, tada je vjerojatnost opisana **binomnom razdiobom**. Označimo li s p vjerojatnost uspjeha, tada je q, što je $q=1-p$, vjerojatnost neuspjeha, vjerojatnost da će u n ponavljanja našeg promatranog pokusa se dogoditi k uspjeha, odnosno

n-k neuspjeha jednaka je k-tom članu binomnog razvoja $(p+q)^n$, tj.

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Tako je naprimjer vjerojatnost da se u nekoj obitelji s četvero djece (n=4) točno tri dječaka (k=3) jednaka

$$\binom{4}{3} p^3 q$$

ukoliko pretpostavimo da je vjerojatnost da se rodi dječak jednaka vjerojatnosti da se rodi djevojčica, tj. p=q=0.5, tada je tražena vjerojatnost jednaka

$$\binom{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{1}{2} = 4 \times \frac{1}{2^4} = \frac{4}{16} = 0.25.$$

3.4. Christiaan Huygens

Rođen je 14. travnja 1629. u Den Haagu u Nizozemskoj, a preminuo je 8. srpnja 1695. također u Den Haagu. Potekao je iz bogate nizozemske obitelji čiji su članovi bili većinom diplomatski dužnosnici Nizozemske. Sami njegov život nije bio pretjerano zanimljiv, ali su zato njegova znanstvena uspijeća itekako bila. Njegovo glavno područje bila je geometrija. Izumio je poboljšanu verziju teleskopa uz koju je rješio mnoge astronomske probleme, izumio je prvi sat s njihalom, te je jedan od najzaslužnijih ljudi za izum džepnog sata s regulirajućom oprugom. Svojim znanstvenim umijećima stekao je toliku popularnost da mu je kralj Francuske Luj XIV. dao mirovinu, ali pod uvjetom da se preseli i radi u Parizu na što je on vrlo lako pristao. 1673. godine objavljuje i svoje glavno djelo Horologium Oscillatorium u kojemu obrađuje centrifugalnu silu, pad tijela u vakumu i promatra obilježja njihala. Treće poglavlje navedene knjige sadrži vrlo važan dio za razvoj diferencijalne geometrije. 1681. godine se vraća u svoju rodnu Nizozemsku zbog ogromne netolerancije od strane katolika u Francuskoj. U tom razdolju svoje vrijeme je posvetio razvoju i konstrukciji leća velikih fokalnih duljina. Odlazi u Englesku 1689. i upoznaje Isaaca Newtona, a 1690. objavljuje rad o svjetlosti, te se dotiče Hookeovih ideja i razmatranja o svjetlosti kao valu. Osim u diferencijalnoj geometriji postigao je važne uspjehe i u drugim matematičkim poljima kao što su matematička analiza i diferencijalni račun. Najvažnije njegovo djelo iz područja vjerojatnosti je knjižica De ratiociniis in ludo aleae u kojoj govori o teoriji vjerojatnosti na temelju razmatranja njegovih prethodnika, Pascala i Fermata.

3.5. Jacob Bernoulli

Rođen je 6. siječnja 1655. godine u Baselu. a preminuo je 16. kolovoza 1705. godine također u Baselu. Bio je švicarski matematičar belgijskog podrijetla, te je potekao iz obitelji koja se generacijama unazad bavila trgovinom začina. Njegova obitelj bila je protjerana i tražena od strane Španjolaca zbog protivljenja "Španjolskom pravilu" u doba vladavina cara Filipa II. Španjolskog. Otac i majka su mu stekli veliki ugled u Baselu, a otac Nicholass je postao i član gradske uprave, a majka je bila iz poznate baselske bankarske obitelji. Prema želji svojih roditelja Jacob je pohađao filozofiju i teologiju, ali je veliku ljubav gajio prema matematici i astronomiji. On će postati i prvi matematičar najslavnije matematičarske dinastije Bernoulli. Poslije završenog teološkog i filozofskog obrazovanja putuje u Francusku gdje uči matematiku od Decartesova sljedbenika.
Kada se njegov brat Johann počeo aktivno baviti matematikom njih dvojica uspostavljaju zajedničku suradnju. Roditelji su za Johanna, kao i za Jacoba, unaprijed odlučili šta će studirati, te je u ovom slučaju to bila medicina, no unatoč tomu Johann i dalje nastavlja proučavati matematiku i moli brata da ga poduči. 1687. dobiva posao profesora matematike na sveučilištu u Baselu. Tada se braća Bernoulli skupa počinju baviti matematikom na temelju von Liebnitzovih rezultata, no vrlo brzo dolazi do sukoba i raskola među braćom. Vrhunac zavade bilo je javno vrijeđanje i prozivanje Johanna od strane Jacoba koji je rekao da sve što Johann zna i razumije o matematici ga je on naučio, te da je on automatski bolji matematičar. Jacob ostaje profesor na sveučilištu do svoje smrti, a nakon toga na njegovo mjesto pristiže Johann koji je u međuvremenu morao pobjeći u Nizozemsku zbog sjene svoga brata.

1685. godina je prva godina u kojoj Jacob pravi svoj značajan doprinos razvoju teorije vjerojatnosti, a 1689. objavljuje svoj **zakon velikih brojeva**. Zakon velikih brojeva kaže da ako pokus ponovimo dovoljno mnogo puta relativna frekvencija[4] je približna vjerojatnosti uspjeha. Njegovo najvažnije, ujedno i najorginalnije, djelo iz područja vjerojatnosti je *Ars Conjectandi.* Iako samo djelo nije uspio upotpunosti završiti ono se i dalje smatra prvim kompletnim pregledom teorije vjerojatnosti i zahvaljujući tome teorija vjerojatnosti postaje zasebna matematička grana. U djelu iznosi filozofsku definiciju vjerojatnosti a priori i a posteriori. Samo djelo sastoji se od 4 poglavlja. U prvom poglavlju Jacob proširuje i nadograđuje neke detalje Huygensovih rezultata. Drugo poglavlje je u cijelosti posvećeno kombinatorici, te Jacob tu koristi suvremene vjerojatnosne pojmove kao što su kombinacija i permutacija. Također, tu se pojavljuju i Bernoullijevi brojevi, a to su brojevi oblika B_n gdje je $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_n = 0$ ako je n neparan i veći od 1, a $B_{n+1} = -\frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+2}{k}B_k$. Navedeni brojevi su imali vrlo važnu i značajnu primjenu u analitičkoj teoriji brojeva. Također, jedna zanimljivost vezana uz te brojeve je i da vrijedi

$$\frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!}x^{2n}.$$

Tema trećeg poglavlja je primjena kombinatorike u vjerojatnosti. Iako je četvrto poglavlje nezavršeno, glavne stvari koje su navedene su da se vjerojatnost može odrediti *a posteriori* iz promatranih frekvencija događaja. Jacob pokušava odrediti gornju među broja pokusa da je procjena vjerojatnosti iz rezultata bude "moralno sigurna". Prvi veliki teorem teorije vjerojatnosti dobio je naziv prema Jacobu Bernoulliju, a naziv mu je **Bernoullijev zakon velikih brojeva**. Zakon kaže da niz relativnih frekvencija uspjeha po vjerojatnosti konvergira prema vjerojatnosti uspjeha u svakom pojedinom pokusu. Ako je f_n relativna frekvencija nekog događaja, a p njegova vjerojatnost onda vrijedi:

$$\forall\epsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} P\Big(\Big|\frac{f_n}{n} - p\Big| < \epsilon\Big) = 1.$$

S porastom broja n vjerojatnost da se relativna frekvencija značajnije razlikuje od vjerojatnosti p, opada prema nuli.
Također, pokazana još jedna tvrdnja; uzmimo dva događaja koja se međusobno isključuju i označimo ih s A i A^C, te neka pokus nema drugih mogućih ishoda. Ako je nakon $m + n$ ponavljanja m puta dogodio A, a n puta A^C, onda se za veliki broj ponavljanja pokusa $\frac{m}{n}$ približava broju $\frac{p}{q}$ gdje je p vjerojatnost događaja A, a $q = 1 - p$ vjerojatnost događaja A^C:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{n}{k-n} = \frac{p}{q}$$

gdje je $k = m + n$.

[4]broj povoljnih ishoda podijeljen s brojem izvedenih ponavljanja pokusa

3.6. Abraham de Moivre

Rođen je 26. svibnja 1667. u Vitry-le-François u Francuskoj u protestantskoj obitelji, a preminuo je 27. studenoga 1754. u Londonu u Ujedinjenom Kraljevstvu. Otac mu je bio kirurg, a pošto obitelj nije pripadala Francuskom plemstvu, morali su nadodati "*de*" na svoje prezime. De moivre je imao kvalitetno obrazovanje i samostalno je proučavao i učio matematiku, te je upisao matematički fakultet u Parizu 1684. Zbog progona protestanata u Francuskoj 1687. bježi u Englesku. Tamo uspijeva steći poštovanje uglednih engleskih znanstvenika i stupa u kontak s Isaacom Newtonom. Poput svih matematičara u početku se bavio rješavanjem raznih algebarskih jednadžbi, te formula

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

danas nosi njegovo ime. Njegov rad na teoriji vjerojatnosti i osiguranja je čisto deduktivan, nije prikupljao i analizirao podatke o svojim observacijama kako bi demonstrirao primjenu svoga rada.
U svijet vjerojatnosti ulazi sasvim slučajno iz čiste nužde jer kako bi osigurao svoj opstanak počeo je naplaćivati savjete kockarima kako se što sigurnije kockati. Pojednostavio je postupak Jacoba Bernoullija i demonstrirao je da je limes binomne razdiobe zapravo normalna razdioba, te poznavajući tu informaciju moguće je smanjiti broj potrebnih ponavljanja pokusa za određivanje vjerojatnosti *a posterioiri.* U njegovom djelu *The doctrine of chance* iz 1718. godine nalaze se definicije nezavisnosti i uvjetne vjerojatnosti, te uz njih niz problema iz kockarskih igara. Dao je prvu klasičnu definiciju vjerojatnosti kao omjer broja povoljnih ishoda pokusa i broja mogućih ishoda pokusa, a to su ujedno koristili Pascal i Fermat, ali bez definicije. 1733. godine dao je formulu za **normalnu razdiobu**, odnosno danas poznatije kao **centralni granični teorem** koji govori o aproksimaciji binomne slučajne varijable normalnom. Za $n \in \mathbb{N}$ neka je $X_n \sim B(n,p), 0 < p < 1$. Tada vrijedi da je $E(X_n) = np, Var(X_n) = npq$ i $\sigma(X_n) = \sqrt{npq}$. Definirajmo $Y_n := \frac{X_n - E(X_n)}{\sigma(X_n)} = \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}}$. De Moivreov centralni granični teorem kaže da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\phi(x) = \lim_{n\to\infty} P(Y_n \leq x)$$

gdje je dana funkcija ϕ funkcija distribucije standardne normalne distribucije, tj.

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad .$$

Jedna od rijetkih De Moivreovih primjena na svakodnevni život zapisana je u njegovom djelu *Annuities on lives* u kojem primjenjuje vjerojatnost na izračunavanje mirovine i životnog osiguranja.

Literatura

[1] A. Hald, *A History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750.*, John Wiley & Sons, Inc, 1990.

[2] M.A. Todhunter, *A history of the mathematical theory of probability - from the time of Pascal to that of Laplace*, Macmillan, Cambridge London, 1865.

[3] H. Fischer, *History of the Central Limit Theorem From Classical to Modern Probability Theory* , Springer, 2010.

`http://www.mathos.unios.hr/~bruckler/vjerojatnost.pdf`