Nejednakosti u teoriji vjerojatnosti

Terzić, Marina

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
FAKULTET PRIMIJENJENE MATEMATIKE I INFORMATIKE

Sveučilišni diplomski studij matematike
modul: financijska matematika i statistika

Nejednakosti u teoriji vjerojatnosti

DIPLOMSKI RAD

Mentor:
doc. dr. sc. Ivan Papić

Student:
Marina Terzić

Osijek, 2024.

Sadržaj

1 | Uvod

Vjerojatnosne nejednakosti su neizostavan dio suvremene teorije vjerojatnosti, a imaju važnu ulogu i u statistici, strojnom učenju, financijama, teoriji igara itd. Prve nejednakosti u teoriji vjerojatnosti pojavile su se paralelno s njezinim razvojem, koji se obično veže uz 17. stoljeće. Primjerice, poznato je da vjerojatnost proizvoljnog događaja A uvijek poprima vrijednost između 0 i 1, odnosno

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Također, vjerojatnost P je funkcija koja zadovoljava svojstvo *σ-subaditivnosti*. Ako je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i $(A_i, i \in I) \subseteq \mathcal{F}$, $I \subseteq \mathbb{N}$ prebrojiva familija događaja, onda je

$$P\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \leq \sum_{i\in I} P(A_i).$$

Više o ovom svojstvu ćemo reći u nastavku rada.

S daljnjim razvojem teorije vjerojatnosti dolazi i do otkrića sve većeg broja vjerojatnosnih nejednakosti. Mnoge od njih su formulirane i dokazane upravo prilikom pokušaja dokazivanja nekih od ključnih teorema teorije vjerojatnosti. Poznata je izreka da "*iza svakog graničnog teorema stoji vjerojatnosna nejednakost*". Takav je slučaj i s jednom od najpoznatijih vjerojatnosnih nejednakosti - Čebiševljevom nejednakosti. Nju je dokazao ruski matematičar P. L. Čebišev prilikom dokazivanja opće forme Zakona velikih brojeva. Samu nejednakost je ranije formulirao francuski matematičar I. J. Bienaymé, ali ju je tek Čebišev dokazao. Danas je u teoriji vjerojatnosti poznat velik broj nejednakosti, a njihovo poznavanje ima ključnu ulogu u analizi i razumijevanju različitih aspekata vjerojatnosti. S obzirom na njihovu važnost, u ovom radu ćemo napraviti pregled poznatih i nekih manje poznatih nejednakosti u teoriji vjerojatnosti. Rad je organiziran u 3 cjeline. U prvom dijelu rada *Osnovni pojmovi teorije vjerojatnosti* navest ćemo osnovne pojmove koji su potrebni za razumijevanje rada. U drugom dijelu *Nejednakosti u teoriji vjerojatnosti* iskazat ćemo i dokazati odabrane vjerojatnosne nejednakosti, a naposljetku, u poglavlju *Primjene nekih vjerojatnosnih nejednakosti*, ćemo navesti neke od primjena spomenutih nejednakosti na stvarne probleme.

2 | Osnovni pojmovi teorije vjerojatnosti

U ovom poglavlju navest ćemo ključne pojmove teorije vjerojatnosti koji su potrebni za razumijevanje vjerojatnosnih nejednakosti i njihovih dokaza koji su izloženi u nastavku rada. Više definicija i teorema može se pronaći u izvorima [3] i [5] , koji nude opsežan pregled i dodatne informacije o teoriji vjerojatnosti.

Računanje vjerojatnosti vezano je uz neki pokus (npr. bacanje igraće kockice ili novčića, izvlačenje karte iz špila itd.). U teoriji vjerojatnosti, ishod ili rezultat pokusa naziva se elementarni događaj i označava se s ω. Skup svih mogućih ishoda odnosno skup svih elementarnih događaja naziva se prostor elementarnih događaja i najčešće ga označavamo s Ω. Sada kada smo definirali prostor elementarnih događaja slučajnog pokusa treba odrediti stupanj vjerovanja da se neki događaj realizira, odnosno potrebno je definirati vjerojatnost. Prva definicija vjerojatnosti pojavljuje se u Laplaceovom djelu *Théorie Analytique des Probabilités*, a danas je poznata kao klasična definicija vjerojatnosti.

Definicija 1. (Klasična definicija vjerojatnosti) *Neka je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ neprazan i konačan skup. Ako su svi ishodi u konačnom skupu elementarnih događaja Ω jednako mogući, vjerojatnost realizacije događaja $A \subseteq \Omega$ jednaka je kvocijentu broja elemenata skupa A i broja elemenata skupa Ω tj.*

$$P(A) = \frac{k(A)}{k(\Omega)}.$$

Klasičan pristup određivanja vjerojatnosti nekog događaja bio je značajan u razvoju teorije vjerojatnosti, ali nije uvijek primjenjiv. Taj problem je riješio Andrej Nikolajevič Kolmogorov koji je 1933. godine uveo vjerojatnosni prostor te aksiomatizirao vjerojatnost.

Definicija 2. *Neka je Ω neprazan skup. Familija $\mathcal{F}$ podskupova skupa Ω naziva se σ-algebra skupova na Ω ako vrijede sljedeća svojstva:*

(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$,

(ii) ako je $A \in \mathcal{F}$, onda je i $A^c \in \mathcal{F}$,

(iii) ako je dana prebrojiva familija skupova $(A_i, i \in I), I \subseteq \mathbb{N}$ iz $\mathcal{F}$, onda je i njihova unija također iz $\mathcal{F}$, tj.

$$\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}.$$

Definicija 3. *Neka je Ω neprazan skup elementarnih događaja i $\mathcal{F}$ σ-algebra skupova na njemu. Funkciju $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ nazivamo vjerojatnost na Ω ako zadovoljava sljedeća svojstva:*

(i) nenegativnost vjerojatnosti: $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}$,

(ii) normiranost vjerojatnosti: $P(\Omega) = 1$,

(iii) σ-aditivnost vjerojatnosti: *ako je dana prebrojiva familija međusobno disjunktnih skupova $(A_i, i \in I), I \subseteq \mathbb{N}$ iz $\mathcal{F}$, tj. $A_i \cap A_j = \emptyset$ za $i \neq j$, onda je*

$$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i).$$

Prethodna svojstva nazivamo aksiomima vjerojatnosti.

Definicija 4. *Neka je Ω neprazan skup, $\mathcal{F}$ σ-algebra događaja na njemu i $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ vjerojatnost na Ω. Uređenu trojku $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ nazivamo vjerojatnosni prostor.*

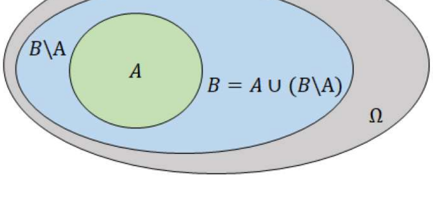
Vjerojatnosni prostor kod kojega je Ω diskretan skup (konačan ili prebrojiv) nazivamo diskretan vjerojatnosni prostor.
Za razumijevanje rada od velike važnosti su i osnovna svojstva vjerojatnosti, koja su na temelju aksioma vjerojatnosti automatski zadovoljena čim je zadanom funkcijom definirana vjerojatnost. U nastavku navodimo i dokazujemo svojstva relevantna za ovaj rad.
Uočimo da iz prvog i drugog aksioma vjerojatnosti, nenegativnosti i normiranosti, proizlazi već spomenuta nejednakost

$$0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \in \mathcal{F},$$

odnosno, možemo reći da će vjerojatnost proizvoljnog događaja A uvijek poprimiti vrijednost iz intervala $[0, 1]$.
Na temelju aksioma vjerojatnosti mogu se dokazati i mnoga druga svojstva koja su zadovoljena kada je danom funkcijom definirana vjerojatnost. Primjerice, jedno takvo svojstvo je i monotonost vjerojatnosti.

Propozicija 1. (Monotonost vjerojatnosti) *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosti prostor i $A, B \in \mathcal{F}$, takvi da je $A \subseteq B$. Tada je $P(A) \leq P(B)$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $A \subseteq B$. U tom slučaju skup B možemo prikazati kao uniju disjunktnih skupova A i $(B \setminus A)$ tj. $B = A \cup (B \setminus A)$ (slika 2.1).



Slika 2.1: Skup B prikazan kao unija disjunktnih skupova A i $(B \setminus A)$

Budući da je vjerojatnost nenegativna funkcija te vrijedi σ-aditivnost vjerojatnosti, slijedi da je

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A). \tag{2.1}$$

$\square$

Također, iz izraza (2.1) možemo zaključiti da ako je $A \subseteq B$, onda vjerojatnost razlike skupova B i A tj. $P(B \setminus A)$ možemo prikazati kao razliku vjerojatnosti događaja B i A, odnosno ako je $A \subseteq B$ onda vrijedi

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A). \tag{2.2}$$

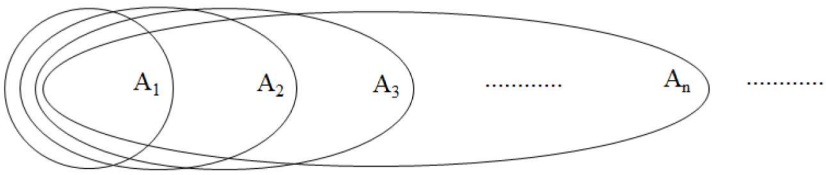
U uvodnom poglavlju ovoga rada spomenuli smo da funkcija vjerojatnosti P zadovoljava i svojstvo σ-subaditivnosti.

Propozicija 2. (σ-subaditivnosti vjerojatnosti) *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosti prostor i $(A_i, i \in I) \subseteq \mathcal{F}, I \subseteq \mathbb{N}$, prebrojiva familija događaja tog prostora, onda je*

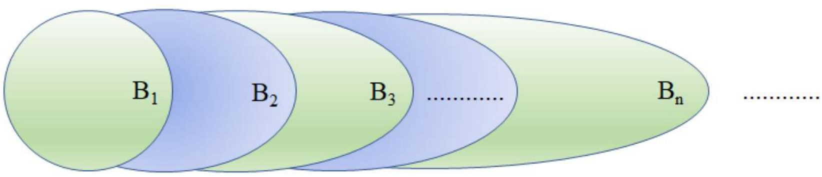
$$P\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \leq \sum_{i\in I} P(A_i). \tag{2.3}$$

Dokaz. Kako bi dokazali ovo svojstvo iz dane familije $(A_i, i \in I), I \subseteq \mathbb{N}$, formirat ćemo novu familiju $(B_i, i \in I), I \subseteq \mathbb{N}$, međusobno disjunktnih događaja i to na način da je

$$B_1 = A_1, \quad B_2 = A_2 \setminus A_1, \quad \cdots, \quad B_n = A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i, \quad \cdots.$$



Slika 2.2: Familija događaja $(A_i, i \in I), I \subseteq \mathbb{N}$



Slika 2.3: Familija međusobno disjunktnih događaja $(B_i, i \in I), I \subseteq \mathbb{N}$

Skupovi $B_i, i \in I$, definirani na taj način, su međusobno disjunktni, a dodatno vrijedi i da je

$$B_i \subseteq A_i\,, \quad \bigcup_{i\in I} B_i = \bigcup_{i\in I} A_i\,.$$

Primjenom σ-aditivnosti i monotonosti vjerojatnosti na familiju $(B_i, i \in I)$ slijedi da je

$$P\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \sum_{i\in I} P(B_i) \leq \sum_{i\in I} P(A_i)\,.$$

□

Pored vjerojatnosti i vjerojatnosnih svojstava, za razumijevanje nejednakosti koje ćemo opisati, od velike će nam važnosti biti pojam slučajne varijable i njezinih numeričkih karakteristika.

Definicija 5. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor. Funkciju $X : \Omega \to \mathbb{R}$ nazivamo slučajna varijabla na Ω ako je $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ za proizvoljan $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, odnosno $X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{F}$, gdje je $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ σ-algebra generirana familijom otvorenih skupova u $\mathbb{R}$.*

Slučajne varijable dijelimo na diskretne (one kojima je skup svih vrijednosti diskretan skup) i neprekidne (one kojima je skup svih vrijednosti neprebrojiv skup). Navedimo i njihove precizne definicije.

Definicija 6. *Neka je dan diskretan vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. Svaku funkciju $X : \Omega \to \mathbb{R}$ nazivamo diskretna slučajna varijabla.*

Ako je X diskretna slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, a skup svih vrijednosti koje ona može poprimiti označimo s $\mathcal{R}(X) = \{x_i : i \in I\}$, $I \subseteq \mathbb{N}$, te ako su $\{p_i, i \in I\}$ pripadne vjerojatnosti za koje vrijedi

$$p_i = P\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\}\right) = P(X = x_i), \;\; i \in I,$$

onda slučajnu varijablu X možemo prikazati u obliku tablice

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Takav prikaz diskretne slučajne varijable nazivamo zakon razdiobe, tablica distribucije ili, kraće, distribucija slučajne varijable X.

Definicija 7. *Neka je dan vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi:*

(i) $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \{X \leq x\} \in \mathcal{F}$ *za svaki* $x \in \mathbb{R}$,

(ii) postoji nenegativna realna funkcija realne varijable, f, takva da vrijedi:

$$P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt\,, \;\; \forall x \in \mathbb{R}.$$

Funkciju X zovemo neprekidna slučajna varijabla.

Funkciju f iz prethodne definicije nazivamo funkcija gustoće slučajne varijable X te ona zadovoljava svojstva koja su poznata kao nenegativnost i normiranost, redom:

(i) $f(x) \geq 0$, za svaki $x \in \mathbb{R}$,

(ii) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Vjerojatnosna svojstva svake slučajne varijable opisuju se pomoću tzv. funkcije distribucije.

Definicija 8. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i neka je X slučajna varijabla. Funkciju $\mathrm{F} : \mathbb{R} \to [0, 1]$ koja realnom broju x pridružuje vjerojatnost da dana slučajna varijabla bude manja ili jednaka tom broju, tj. funkciju*

$$\mathrm{F}(x) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = P\{X \leq x\},$$

nazivamo funkcija distribucije slučajne varijable X.

U opisivanju slučajnih varijabli često nam pomažu za nju specifične numeričke karakteristike. Osnovna numerička karakteristika slučajne varijable je matematičko očekivanje.

Definicija 9. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i X slučajna varijabla na njemu. Matematičko očekivanje ili očekivanje slučajne varijable X je broj*

$$\mathrm{E}(X) = \int XdP.$$

Teorem 1. *Ako je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ izmjeriva funkcija takva da je $g(X) \geq 0$ ili $\mathrm{E}\,|g(X)| < \infty$, onda vrijedi*

$$\mathrm{E}(g(X)) = \int\limits_{\Omega} g(X)dP = \int\limits_{\mathbb{R}} g(X)dP_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(X)dF(x).$$

Dokaz prethodnog teorema dostupan je u [11]. Ako u prethodnom teoremu uzmemo $g(x) = x$, onda dobivamo sljedeće

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xdF(x),$$

odnosno očekivanje možemo računati kao integral s obzirom na funkciju distribucije slučajne varijable X. Razmotrimo sada računanje matematičkog očekivanja posebno za diskretne i neprekidne slučajne varijable.

Ako je X diskretna slučajna varijabla, s tablicom distribucije (2.4), onda očekivanje slučajne varijable X (ako ono postoji) računamo kao

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{i \in I \subseteq \mathbb{N}} x_i p_i.$$

Ukoliko je X neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f, onda očekivanje slučajne varijable X (ako ono postoji) računamo kao

$$\mathrm{E}\left(X\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Definirajmo i ostale bitne numeričke karakteristike slučajnih varijabli.

Definicija 10. *Za slučajnu varijablu X i $r > 0$, takve da $\mathrm{E}\left(X^r\right)$ postoji, definiramo*

(i) r-ti moment od X: $\mathrm{E}\left(X^r\right)$,

(ii) r-ti apsolutni moment od X: $\mathrm{E}\left(|X|^r\right)$.

Ako je $\mathrm{E}\left(|X|\right) < \infty$*, definiramo i*

(i) r-ti centralni moment od X: $\mathrm{E}\left(X - \mathrm{E}\left(X\right)\right)^r$,

(ii) r-ti apsolutni centralni moment od X: $\mathrm{E}\left(|X - \mathrm{E}\left(X\right)|\right)^r$.

Uočimo kako je očekivanje slučajne varijable X njezin moment prvog reda. Drugi centralni moment

$$\mathrm{Var}\left(X\right) = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)^2$$

nazivamo varijanca, a $\sqrt{\mathrm{Var}\left(X\right)}$ standardna devijacija. Očekivanje slučajne varijable X interpretira se kao srednja vrijednost slučajne varijable, dok varijanca označava očekivano kvadratno odstupanje slučajne varijable od njenog očekivanja.

Definirajmo još neke pojmove iz teorije vjerojatnosti koji su važni za ovaj rad.

Kažemo da događaj A (ili svojstvo koje on opisuje), na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, vrijedi gotovo sigurno (g.s.) ako je $P(A) = 1$.

Za skup A, s $\mathbf{1}_A$ označavamo indikatorsku funkciju koja se definiran na sljedeći način

$$\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}.$$

Definicija 11. *Funkcija izvodnica momenata*[1] *slučajne varijable X je funkcija M definirana s*

$$M(t) = M_X(t) = \mathrm{E}\left(e^{tX}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tX} dF_X(x), \quad t \in \mathbb{R},$$

kada to očekivanje postoji.

[1] eng. Moment Generating Function, MGF

Lema 1. *Ako su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne varijable i $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, onda je*

$$M_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t).$$

Dokaz. Zbog nezavisnosti slučajnih varijabli slijedi

$$\begin{aligned} M_{S_n}(t) &= \mathrm{E}\left(e^{tS_n}\right) = \mathrm{E}\left(e^{t\sum_{i=1}^{n} X_i}\right) \\ &= \mathrm{E}\left(\prod_{i=1}^{n} e^{tX_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}\left(e^{tX_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} M_{x_i}(t). \end{aligned}$$

□

3 | Nejednakosti u teoriji vjerojatnosti

U ovom poglavlju rada napravit ćemo pregled nekih poznatih i manje poznatih vjerojatnosnih nejednakosti. Prvi dio poglavlja posvećen je nejednakostima koje se odnose na vjerojatnosti događaja. U drugom dijelu usmjerit ćemo se na nejednakosti koje imaju ključne uloge u primjenama te se često koriste u dokazima važnih teorema teorije vjerojatnosti. Fokus će biti stavljen na nejednakosti vezane uz momente slučajnih varijabli i distribucije repnih vjerojatnosti.

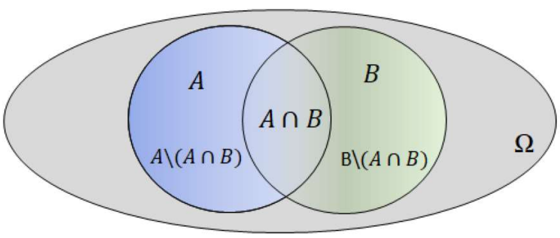
3.1 Osnovne nejednakosti vjerojatnosti događaja

Za početak promotrimo vjerojatnost unije događaja. Ona je već obuhvaćena trećim aksiomom iz definicije vjerojatnosti − *σ-aditivnost* vjerojatnosti. Međutim, taj aksiom odnosi se samo na familije međusobno disjunktnih skupova. Ipak, vjerojatnost unije dvaju skupova moguće je odrediti i u slučaju kada skupovi nisu međusobno disjunktni.
Ako je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosti prostor i $A, B \in \mathcal{F}$, onda je

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \tag{3.1}$$

Ovo svojstvo naziva se vjerojatnost unije događaja, a kako bismo ga dokazali prikažimo uniju skupova A i B kao uniju sljedećih disjunktnih skupova (slika 3.1):

$$A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus (A \cap B))\,.$$



Slika 3.1: Skup $A \cup B$ prikazan kao unija disjunktnih skupova

Budući da imamo disjunktne skupove, primjenom *σ-aditivnost* vjerojatnosti slijedi da je

$$P(A \cup B) = P\left(A \setminus (A \cap B)\right) + P\left(A \cap B\right) + P\left(B \setminus (A \cap B)\right).$$

Uočimo da je $(A \cap B) \subseteq A$ i $(A \cap B) \subseteq B$. Kako u tom slučaju možemo primijeniti svojstvo vjerojatnosti razlike skupova (2.2), vrijedi sljedeće

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned}$$

Svojstvo vjerojatnosti unije dvaju događaja može se generalizirati i na vjerojatnost unije konačno mnogo događaja čime se dobiva takozvana Sylvesterova formula.

Propozicija 3. (Sylvesterova formula) *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosti prostor i $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{F}$. Tada vrijedi*

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i \cap A_j) \\ &+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right). \end{aligned}$$

Dokaz. Sylvesterovu formulu dokazujemo metodom matematičke indukcije.
Za $n = 1$ tvrdnja je očigledna jer je $P(A_1) = P(A_1)$. Za $n = 2$, imamo

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

što smo već ranije pokazali da vrijedi prilikom dokazivanja svojstva vjerojatnosti unije dvaju događaja (3.1). Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi i za sve familije od $n - 1$ događaja. Sada, opći slučaj dokazujemo indukcijom po n.
Neka je

$$B = \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i, \quad C_i = A_i \cap A_n, \text{ gdje je } i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Tada vrijedi sljedeće

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cup A_n\right) = P(B \cup A_n) \\ &= P(B) + P(A_n) - P(B \cap A_n). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Kako je

$$\begin{aligned} P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n-1} P(A_i \cap A_j) \\ &+ \sum_{1 \le i < j < k \le n-1} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n} P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \end{aligned}$$

i

$$
\begin{aligned}
P(B \cap A_n) &= P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cap A_n\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n)\right) \\
&= P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} C_i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} P(C_i) - \sum_{1 \le i < j \le n-1} P(C_i \cap C_j) \\
&+ \sum_{1 \le i < j < k \le n-1} P(C_i \cap C_j \cap C_k) - \cdots + (-1)^n P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} C_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i \cap A_n) - \sum_{1 \le i < j \le n-1} P(A_i \cap A_j \cap A_n) \\
&+ \sum_{1 \le i < j < k \le n-1} P(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_n) - \cdots + (-1)^n P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right),
\end{aligned}
$$

uvrštavanjem u početnu jednakost (3.2) dobivamo upravo Sylvesterovu formulu. □

Navedimo sada prvu vjerojatnosnu nejednakost u ovom poglavlju. Nejednakost je poznata pod nazivom Booleova nejednakost, a ime je dobila po engleskom matematičaru Georgeu Booleu. Ovu nejednakost smo zapravo već dokazali u prethodnom poglavlju prilikom dokazivanja svojstva *σ-subaditivnosti* vjerojatnosti. Booleova nejednakost daje gornju granicu vjerojatnosti prebrojive unije događaja, odnosno tvrdi da ta vjerojatnost nije veća od sume vjerojatnosti svakog pojedinog događaja.

Propozicija 4. (*Boolova nejednakost*) *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor i* $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$. *Tada vrijedi*

$$
P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i). \tag{3.3}
$$

Dok Booleova nejednakost pruža gornju granicu, sljedeća nejednakost nam daje donju granicu vjerojatnosti unije događaja. Riječ je o Bonferronijevoj nejednakosti, koja je ime dobila u čast talijanskog matematičara Carla Emilia Bonferronija.

Propozicija 5. (*Bonferronijeva nejednakost*) *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor i neka su* $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$, *događaji. Tada vrijedi*

$$
P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \ge \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i \cap A_j). \tag{3.4}
$$

Dokaz. Dokaz se provodi metodom matematičke indukcije. Za $n = 1$ i $n = 2$, imamo trivijalnu situaciju tj. $P(A_1) = P(A_1)$ i $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) -$

$P(A_1 \cap A_2)$, što sigurno vrijedi. Za $n = 3$, uz korištenje Sylvesterove formule imamo sljedeće

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = {} & P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) \\ & - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3). \end{aligned}$$

Kako je $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \geq 0$ nejednakost vrijedi i za $n = 3$, odnosno

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \geq \sum_{i=1}^{3} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq 3} P(A_i \cap A_j).$$

Pretpostavimo da Bonferronijeva nejednakost vrijedi za $n = k$ tj. da vrijedi

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{k} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq k} P(A_i \cap A_j). \tag{3.5}$$

Pokažimo sada da vrijedi i za $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right) &= P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \cup A_{k+1}\right) \\ &= P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) + P(A_{k+1}) - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \cap A_{k+1}\right) \\ &= P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) + P(A_{k+1}) - P\left(\bigcup_{i=1}^{k} (A_i \cap A_{k+1})\right) \\ &\overset{(3.5)}{\geq} \sum_{i=1}^{k} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq k} P(A_i \cap A_j) + P(A_{k+1}) - P\left(\bigcup_{i=1}^{k} (A_i \cap A_{k+1})\right) \\ &\overset{(2.3)}{\geq} \sum_{i=1}^{k+1} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq k} P(A_i \cap A_j) - \sum_{i=1}^{k} P(A_i \cap A_{k+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} P(A_i \cap A_j). \end{aligned}$$

Pokazali smo da tvrdnja vrijedi i za $n = k + 1$ pa je time Bonferronijeva nejednakost dokazana. □

Postoji još jedna verzija Bonferronijeve nejednakosti koja daje i gornju i donju granicu za vjerojatnost unije n, $n \in \mathbb{N}$, događaja.

Lema 2. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor,* $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$, *događaji te neka su*

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \\ S_2 &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) \\ &\vdots \\ S_k &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \cdots A_{i_k}), \ \ k = 3, \dots, n. \end{aligned}$$

Tada vrijedi

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &\leq \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} P(S_j), \ \ \textit{za neparne } k = 1, \dots, n, \\ P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &\geq \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} P(S_j), \ \ \textit{za parne } k = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Dokaz je dostupan u izvoru [4]. Promotrimo još neke nejednakosti koje se odnose na na vjerojatnosti događaja.

Korolar 1. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *vjerojatnosti prostor i neka su* $A, B \in \mathcal{F}$ *dva proizvoljna događaja. Tada vrijedi*

$$|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}.$$

Dokaz. Dokažimo prvo da vrijedi

$$P(A \cap B) - P(A)P(B) \leq \frac{1}{4}. \tag{3.6}$$

Kako je

$$A \cap B \subseteq A \quad \text{i} \quad A \cap B \subseteq B$$

zbog monotonosti vjerojatnosti slijedi

$$P(A \cap B) \leq P(A) \quad \text{i} \quad P(A \cap B) \leq P(B),$$

pa vrijedi

$$(P(A \cap B))^2 \leq P(A)P(B).$$

Sada je

$$P(A \cap B) - P(A)P(B) \leq P(A \cap B) - (P(A \cap B))^2 = P(A \cap B)(1 - P(A \cap B)).$$

Označimo li s $p = P(A \cap B)$, desnu stranu nejednakosti možemo zapisati kao

$$f(p) = p(1 - p), \quad p \in [0, 1].$$

Funkcija f je kvadratna funkcija koja svoj maksimum postiže u točki

$$p = \frac{1}{2},$$

pa vrijedi početna nejednakost.

Korištenjem prethodno dokazane nejednakosti, pokažimo da vrijedi i

$$P(A \cap B) - P(A)P(B) \geq -\frac{1}{4}.$$

Kako je $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$, vrijedi $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$ iz čega slijedi da je

$$P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B^c).$$

Sada je

$$\begin{aligned} P(A \cap B) - P(A)P(B) &= P(A) - P(A \cap B^c) - P(A)P(B) \\ &= P(A)(1 - P(B)) - P(A \cap B^c) \\ &= P(A)P(B^c) - P(A \cap B^c). \end{aligned}$$

Budući da prethodno dokazana nejednakost (3.6) vrijedi za svaki $A, B \in \mathcal{F}$, onda vrijedi i za $A, B^c \in \mathcal{F}$ pa imamo

$$P(A \cap B) - P(A)P(B) = P(A)P(B^c) - P(A \cap B^c) \geq -\frac{1}{4},$$

čime je dokazana i druga strana nejednakosti. □

Propozicija 6. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosti prostor i neka su A, $B \in \mathcal{F}$ dva proizvoljna događaja. Tada vrijedi*

$$P(A \cap B) \geq 1 - P(A^c) - P(B^c).$$

Dokaz. Kako je $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ i $P(A \cup B) \leq 1$, imamo

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B) \leq 1.$$

Budući da je $P(A) = 1 - P(A^c)$ i $P(B) = 1 - P(B^c)$ dobivamo

$$1 - P(A^c) + 1 - P(B^c) - 1 \leq P(A \cap B),$$

iz čega onda proizlazi

$$1 - P(A^c) - P(B^c) \leq P(A \cap B).$$

□

Napomena 1. *Prethodna nejednakost vrijedi i u općem slučaju*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} P(A_i^c),$$

gdje su $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ i $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosti prostor.

Dokaz općeg slučaja provodi se metodom matematičke indukcije.

3.2 Nejednakosti vezane uz momente slučajnih varijabli

U ovom dijelu rada usmjerit ćemo se na nejednakosti vezane uz momente slučajnih varijabli. Razmotrit ćemo različite nejednakosti koje omogućuju procjenu očekivanja produkta i zbroja slučajnih varijabli, što je ključno u mnogim primjenama teorije vjerojatnosti. Analizirat ćemo nekoliko važnih nejednakosti, uključujući Hölderovu, Cauchy-Schwarzovu, Jensenovu, Ljapunovljevu i Paley-Zygmundovu nejednakost te nejednakost Minkowskog.

3.2.1 Hölderova nejednakost

Prva u nizu nejednakosti vezanih uz momente slučajnih varijabli je Hölderova nejednakost, nazvana po njemačkom matematičaru Ludwigu Ottu Hölderu. Postoji nekoliko verzija ove nejednakosti, a u ovom radu ćemo se usredotočiti na onu koja je relevantna u teoriji vjerojatnosti.

Propozicija 7. (*Hölderova nejednakost*) *Neka su* $p, q \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $q > 1$ *takvi da je* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Neka su* X *i* Y *slučajne varijable takve da je* $\mathrm{E}\left(|X|^p\right) < \infty$ *i* $\mathrm{E}\left(|Y|^q\right) < \infty$. *Tada je* $\mathrm{E}\left(|XY|\right) < \infty$ *i vrijedi*

$$\mathrm{E}\left(|XY|\right) \leq \left(\mathrm{E}\left(|X|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\mathrm{E}\left(|Y|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{3.7}$$

U svrhu dokaza prethodnog teorema, navodimo dodatnu propoziciju i poznatu *Youngovu nejednakost*.

Propozicija 8. *Ako su* X *i* Y *slučajne varijable takve da je* $E|X| < \infty$ *i* $E|Y| < \infty$, *tada vrijedi*

(*i*) *Ako je* $X = 0$ (*g.s.*), *tada je* $\mathrm{E}\left(X\right) = 0$,

(*ii*) *Ako je* $X = Y$ (*g.s.*), *tada je* $\mathrm{E}\left(X\right) = \mathrm{E}\left(Y\right)$.

Teorem 2. (*Youngova nejednakost*) *Neka su* a, b *pozitivni realni brojevi te* $1 < p, q < \infty$ *takvi da je* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Tada vrijedi*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \tag{3.8}$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je $a^p = b^q$.

Dokaz. Ako je barem jedan od a, b jednak nuli, tada (3.8) vrijedi trivijalno. Pretpostavimo zato da je $a > 0$ i $b > 0$ te definirajmo funkciju φ na sljedeći način

$$\varphi(t) = \frac{t^p}{p} + \frac{t^{-q}}{q}, \ \ t > 0.$$

Deriviranjem funkcije φ dobivamo

$$\varphi'(t) = t^{p-1} - t^{-q-1}.$$

Neka je $t_0 > 0$ rješenje jednadžbe $\varphi'(t) = 0$. Tada imamo sljedeće

$$t_0^{p-1} - t_0^{-q-1} = 0$$
$$t_0^{-1}\left(t_0^p - t_0^{-q}\right) = 0.$$

Budući da je $t_0 > 0$ sada imamo

$$t_0^p - t_0^{-q} = 0,$$

iz čega slijedi $t_0^{p+q} = 1$, odnosno $t_0 = 1$.
Dodatno, $\varphi'(t) < 0$ za $0 < t < 1$, $\varphi'(t) > 0$ za $t > 1$ te vrijedi

$$\lim_{t\to 0} \varphi(t) = \lim_{t\to\infty} \varphi(t) = +\infty.$$

Iz prethodnoga slijedi da je $t = 1$ jedinstveni minimum funkcije φ na intervalu $(0, +\infty)$ pa vrijedi

$$\frac{t^p}{p} + \frac{t^{-q}}{q} \geq \varphi(1) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad t > 0. \tag{3.9}$$

Ako u (3.9) uvrstimo $t = \frac{a^{\frac{1}{q}}}{b^{\frac{1}{p}}}$ dobivamo traženu nejednakost. □

Dokažimo sada Hölderovu nejednakost.

Dokaz. Prema Propoziciji 8.(i) očigledno je da Hölderova nejednakost (3.7) vrijedi ako je barem jedna od slučajnih varijabli X ili Y jednaka nuli $(g.s.)$. Pretpostavimo sada da je $\mathrm{E}(|X|^p) > 0$ i $\mathrm{E}(|Y|^q) > 0$. Ako za $\omega \in \Omega$ u (3.8) uvrstimo

$$a = \frac{|X(\omega)|}{(\mathrm{E}(|X|^p))^{\frac{1}{p}}}, \quad b = \frac{|Y(\omega)|}{(\mathrm{E}(|Y|^q))^{\frac{1}{q}}},$$

dobivamo sljedeće

$$|XY| \leq \frac{|X(\omega)|}{(\mathrm{E}(|X|^p))^{\frac{1}{p}}} \frac{|Y(\omega)|}{(\mathrm{E}(|Y|^q))^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{X(\omega)^p}{p\,(\mathrm{E}(|X|^p))} + \frac{Y(\omega)^q}{q\,(\mathrm{E}(|Y|^q))},$$

odnosno

$$|XY| \leq (\mathrm{E}(|X|^p))^{\frac{1}{p}} (\mathrm{E}(|Y|^q))^{\frac{1}{q}} \left[\frac{1}{p}\frac{|X|^p}{\mathrm{E}(|X|^p)} + \frac{1}{q}\frac{|Y|^q}{\mathrm{E}(|Y|^q)}\right].$$

Uzimanjem matematičkog očekivanja i skraćivanjem prethodnog izraza dobivamo

$$\mathrm{E}(|XY|) \leq \mathrm{E}(|X|^p)^{\frac{1}{p}} \mathrm{E}(|Y|^q)^{\frac{1}{q}} \left[\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right],$$

a budući da je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ konačno slijedi Hölderova nejednakost. □

Napomena 2. *Često se koristi i oznaka* $\|X\|_p = (\mathrm{E}(|X|^p))^{\frac{1}{p}}$, *pa se Hölderova nejednakost može zapisati u obliku* $\mathrm{E}(|XY|) \leq \|X\|_p \|Y\|_q$.

Hölderova nejednakost za $p = q = 2$ dovodi do Cauchy-Schwarz(-Bunjakovski) nejednakosti, koju ćemo razmotriti u nastavku.

3.2.2 Cauchy - Schwarzova nejednakost

Cauchy - Schwarzova nejednakost prvi put se spominje u djelu *Cours d'analyse de l'Ecole Royal Polytechnique* francuskog matematičara Augustina-Louisa Cauchyja. U tom djelu iz 1821. godine, Cauchy spominje ovu nejednakost samo kao bilješku, bez dokaza. Prvi dokaz ove nejednakosti dao je 1859. godine ruski matematičar, a ujedno i Cauchyjev učenik, Viktor Jakovljevič Bunjakovski, u znanstvenom časopisu *Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St-Pétersbourg*. Iako je časopis bio štampan na francuskom jeziku, nije bio široko rasprostranjen u Europi, pa dokaz nije bio poznat njemačkom matematičaru Karlu Hermannu Amandusu Schwarzu. On je 1888. godine, u svom djelu *Über ein die Flächen kleinsten Flächeninhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung*, dao još jedan dokaz Cauchyjeve nejednakosti. Dokazi Bunjakovskog i Schwarza nisu slični, pa se Schwarzov dokaz smatra neovisnim, iako je kasnijeg datuma. Zbog toga je ova nejednakost poznata i pod nazivom Cauchy-Schwarz-Bunjakovski nejednakost, posebno u ruskoj i istočnoeuropskoj literaturi, dok se u zapadnoj literaturi najčešće spominju samo Cauchy i Schwarz.

Kao i ostale nejednakosti u ovom radu, Cauchy-Schwarzovu nejednakost razmatramo u kontekstu teorije vjerojatnosti.

Propozicija 9. (*Cauchy - Schwarzova nejednakost*) *Neka su X i Y slučajne varijable takve da je $EX^2 < \infty$ i $EY^2 < \infty$. Tada je $E|XY| < \infty$ i vrijedi*

$$E|XY| \leq \sqrt{EX^2\, EY^2}. \tag{3.10}$$

Dokaz. Kako su $EX^2 < \infty$ i $EY^2 < \infty$ možemo primijeniti Hölderovu nejednakost za $p = q = 2$. Slijedi

$$E|XY| \leq \left[EX^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[EY^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

odnosno

$$E|XY| \leq \sqrt{EX^2\, EY^2}.$$

□

Teorem 3. *Ako EX postoji, onda je $|EX| \leq E|X|$.*

Dokaz. Kako je $X \leq |X|$ odnosno

$$-|X| \leq X \leq |X|,$$

primjenom očekivanja dobivamo

$$-E|X| \leq EX \leq E|X|,$$

iz čega proizlazi $|EX| \leq E|X|$. □

Iz *Cauchy - Schwarzove nejednakosti* i Teorema 3. slijedi

$$|\mathrm{E}(XY)| \leq \mathrm{E}(|XY|) \leq \left[\mathrm{E}\left(X^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}\left[\mathrm{E}\left(Y^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Za slučajne varijable X i Y te $r > 0$ sljedeća nejednakost je očita

$$|X+Y|^r \leq [2\max\{|X|,|Y|\}]^r \leq 2^r\left[|X|^r,|Y|^r\right].$$

Iz prethodnoga proizlazi

$$\mathrm{E}(|X+Y|^r) \leq 2^r\left[\mathrm{E}(|X|^r), \mathrm{E}(|Y|^r)\right]. \tag{3.11}$$

Prema tome, ako X i Y imaju (konačne) r-te apsolutne momente, tada $X+Y$ također ima r-ti apsolutni moment.

3.2.3 Jensenova nejednakost

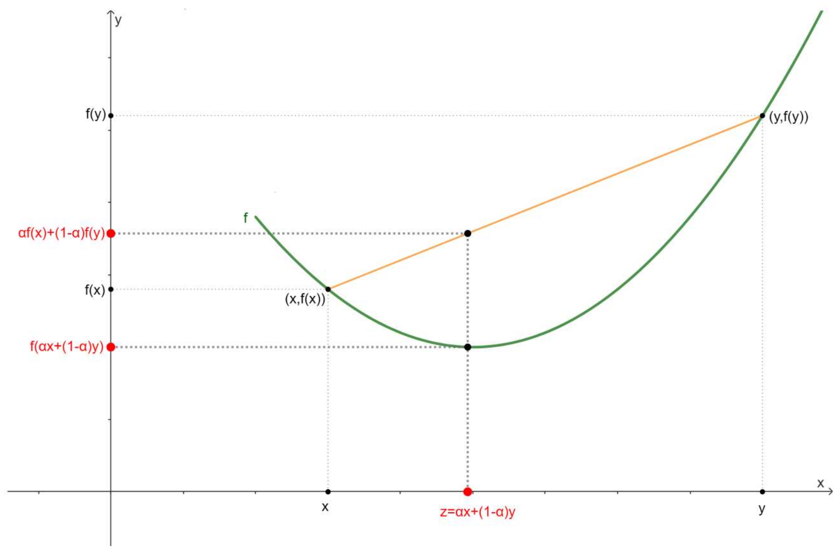
Jensenova nejednakost jedna je od najpoznatijih nejednakosti u matematici, a svoju primjenu ima i u vjerojatnosti. Nejednakost je 1906. godine dokazao danski matematičar Johan Ludwig William Valdemar Jensen u svom radu *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes* te je nazvana njemu u čast.

Prije samog iskaza i dokaza Jensenove nejednakosti, objasnit ćemo pojam konveksnosti funkcije.

Definicija 12. (*Konveksna funkcija*) *Kažemo da je funkcija* $f : I \to \mathbb{R}$ *konveksna na intervalu* $I \subseteq \mathbb{R}$ *ako za sve* $x_1, x_2 \in I$ *i svaki* $\alpha \in [0,1]$ *vrijedi*

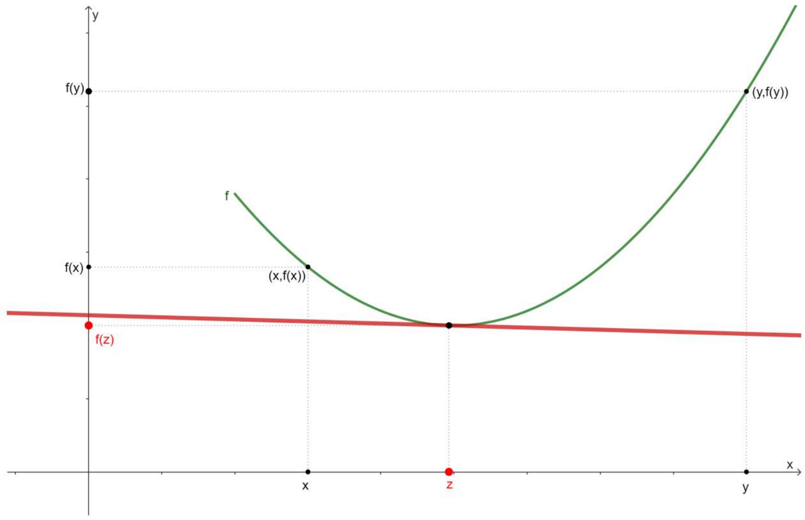
$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2).$$

Promotrimo sada geometrijsku interpretaciju konveksne funkcije. Prethodna definicija zapravo kaže da se nad svakim segmentom $[x,y]$ graf konveksne funkcije f nalazi ispod sekante koja prolazi točkama $(x, f(x))$ i $(y, f(y))$.



Slika 3.2: Konveksna funkcija f

Konveksnu funkciju promotrit ćemo i na način koji je prikladniji za dokaz Jensenove nejednakosti. Možemo reći da je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je konveksna ako i samo ako se graf funkcije $y = f(x)$ uvijek nalazi iznad tangente u proizvoljnoj točki $(z, f(z))$, za neki $z \in \mathbb{R}$.



Slika 3.3: Tangenta u točki $(z, f(z))$

Jednadžba tangente na graf funkcije f u proizvoljnoj točki $(z, f(z))$ dana je izrazom

$$y = f(z) + k(x - z), \ \ k \in \mathbb{R}.$$

Realan broj k predstavlja koeficijent smjera tangente. Kako se graf konveksne funkcije f uvijek nalazi iznad tangente u točki $(z, f(z))$, vrijedi sljedeća nejednakost

$$f(x) \geq f(z) + k(x - z), \ \ \text{za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

Teorem 4. (*Jensenova nejednakost*) *Neka je X slučajna varijabla i g konveksna funkcija na $\mathbb{R}$. Ako je $\mathrm{E}|X| < \infty$ i $\mathrm{E}|g(X)| < \infty$, onda je*

$$g(\mathrm{E}\,(X)) \leq \mathrm{E}\,(g(X))\,. \tag{3.12}$$

Dokaz. Neka je X slučajna varijabla. Njezino očekivanje označimo s $z = \mathrm{E}\,(X)$. Iz prethodnog razmatranja smo vidjeli da za konveksnu funkciju g vrijedi nejednakost

$$g(x) \geq g(z) + k(x - z), \ \ \text{za svaki } x \in \mathbb{R},$$

odnosno vrijedi

$$g(X) \geq g(\mathrm{E}\,(X)) + k(X - \mathrm{E}\,(X)).$$

Djelujemo li s matematičkim očekivanjem na prethodnu nejednakost dobivamo

$$\mathrm{E}\,(g(X)) \geq g(\mathrm{E}\,(X)) + k(\mathrm{E}\,(X) - \mathrm{E}\,(X))$$

odnosno dobivamo Jensenovu nejednakost

$$g(\mathrm{E}\,(X)) \leq \mathrm{E}\,(g(X))\,.$$

$\square$

3.2.4 Ljapunovljeva nejednakost

Ljapunovljeva nejednakost je poseban slučaj Jensenove nejednakosti, a ime je dobila po ruskom matematičaru Aleksandru Mihajloviču Ljapunovu.

Teorem 5. (*Ljapunovljeva nejednakost*) *Neka je X slučajna varijabla takva da je $E|X|^p < \infty$ te neka su $r, p \in \mathbb{R}$ takvi da je $0 < r < p$. Tada vrijedi*

$$[\mathrm{E}(|X|^r)]^{\frac{1}{r}} \leq [\mathrm{E}(|X|^p)]^{\frac{1}{p}}.$$

Dokaz. Definirajmo slučajnu varijablu $Y = |X|^r$ i neka je $s = \frac{p}{r}$. Ljapunovljevu nejednakost dokazat ćemo upotrebom Jensenove nejednakosti za funkciju $g(x) = |x|^s$ i slučajnu varijablu Y.
Prema Jensenovoj nejednakosti (3.12) vrijedi

$$g(\mathrm{E}(Y)) \leq \mathrm{E}(g(Y)),$$

odnosno, kako je $Y = |X|^r$ imamo

$$g(\mathrm{E}(|X|^r)) \leq \mathrm{E}(g(|X|^r)).$$

Djelovanjem funkcije g i uvrštavanjem $s = \frac{p}{r}$ dobivamo sljedeće

$$\left(\mathrm{E}\left(|X|^r\right)\right)^{\frac{p}{r}} \leq \mathrm{E}\left(\left||X|^r\right|^{\frac{p}{r}}\right).$$

Sada potenciramo prethodnu nejednakost s $\frac{1}{p}$ kako bi dobili Ljapunovljevu nejednakost

$$\left[\mathrm{E}\left(|X|^r\right)\right]^{\frac{1}{r}} \leq \left[\mathrm{E}\left(|X|^p\right)\right]^{\frac{1}{p}}.$$

□

Napomena 3. *S obzirom na Napomenu 2., Lajpunovljeva nejednakost može se pisati i u obliku $\|X\|_r \leq \|X\|_p$.*

3.2.5 Paley - Zygmund nejednakost

Paley - Zygmundova nejednakost daje donju granicu vjerojatnosti da je pozitivna slučajna varijabla mala, u odnosu na njezino očekivanje i varijancu tj. u odnosu na prva dva momenta. Ime je dobila po engleskom matematičaru Raymondu Paleyu te poljsko-američkom matematičaru Antoni Zygmundu koji su ju razvili i dokazali.

Teorem 6. (*Paley - Zygmund nejednakost*) *Neka je $X \geq 0$ slučajna varijabla takva da je $EX^2 < \infty$ te neka je $0 \leq \lambda \leq 1$. Tada vrijedi*

$$P(X > \lambda EX) \geq (1-\lambda)^2 \frac{(EX)^2}{EX^2}.$$

Dokaz. Za početak izrazimo očekivanje slučajne varijable X na sljedeći način

$$\mathrm{E}\,(X) = \mathrm{E}\left(X \cdot \mathbf{1}_{\{X \le \lambda \mathrm{E}(X)\}}\right) + \mathrm{E}\left(X \cdot \mathbf{1}_{\{X > \lambda \mathrm{E}(X)\}}\right), \tag{3.13}$$

gdje su $\mathbf{1}_{\{X \le \lambda \mathrm{E}(X)\}}$ i $\mathbf{1}_{\{X > \lambda \mathrm{E}(X)\}}$ indikatorske funkcije tj.

$$\mathbf{1}_{\{X \le \lambda \mathrm{E}(X)\}} = \begin{cases} 1, & X \le \lambda \mathrm{E}\,(X) \\ 0, & X > \lambda \mathrm{E}\,(X) \end{cases} \quad \text{i} \quad \mathbf{1}_{\{X > \lambda \mathrm{E}(X)\}} = \begin{cases} 1, & X > \lambda \mathrm{E}\,(X) \\ 0, & X \le \lambda \mathrm{E}\,(X) \end{cases}.$$

Jednakost (3.13) vrijedi jer su $\{X \le \lambda \mathrm{E}\,(X)\}$ i $\{X > \lambda \mathrm{E}\,(X)\}$ suprotni događaji pa je $\mathbf{1}_{\{X \le \lambda \mathrm{E}(X)\}} + \mathbf{1}_{\{X > \lambda \mathrm{E}(X)\}} \equiv 1$.
Prvi član sume iz (3.13) je najviše $\lambda \mathrm{E}\,(X)$. Na drugi član možemo primijeniti Cauchy - Schwarzovu nejednakost pa slijedi

$$\mathrm{E}\left(X \cdot \mathbf{1}_{\{X > \lambda \mathrm{E}(X)\}}\right) \le \sqrt{\mathrm{E}\,(X^2) \cdot \mathrm{E}\left(\mathbf{1}_{\{X > \lambda \mathrm{E}(X)\}}\right)} = \sqrt{\mathrm{E}\,(X^2) \cdot P\,(X > \lambda \mathrm{E}\,(X))}.$$

Sada imamo

$$\mathrm{E}\,(X) \le \lambda \mathrm{E}\,(X) + \sqrt{\mathrm{E}\,(X^2) \cdot P\,(X > \lambda \mathrm{E}\,(X))}.$$

Uz činjenicu da je $\mathrm{E}\,(X) \ge 0$, sređivanjem i kvadriranjem prethodnog izraza, slijedi tražena nejednakost

$$\begin{aligned} (1-\lambda)^2\,(EX)^2 &\le E(X^2) \cdot P\,(X > \lambda EX)\,, \\ P\,(X > \lambda EX) &\ge (1-\lambda)^2 \frac{(EX)^2}{E(X^2)}. \end{aligned}$$

□

3.2.6 Nejednakost Minkowskog

Dok se Hölderova nejednakost odnosi na momente produkata slučajnih varijabli, nejednakost Minkowskog odnosi se na zbroj slučajnih varijabli. Nejednakost je otkrio i dokazao njemački matematičar Hermann Minkowski krajem 19. stoljeća te je nazvana njemu u čast.

Propozicija 10. (*Nejednakost Minkowskog*) *Neka je* $1 \le p < \infty$ *i neka su* X *i* Y *slučajne varijable takve da je* $\mathrm{E}\,(|X|^p) < \infty$, $\mathrm{E}\,(|Y|^p) < \infty$. *Tada je* $\mathrm{E}\,(|X+Y|^p) < \infty$ *i vrijedi*

$$[\mathrm{E}\,(|X+Y|^p)]^{\frac{1}{p}} \le [\mathrm{E}\,(|X|^p)]^{\frac{1}{p}} + [\mathrm{E}\,(|Y|^p)]^{\frac{1}{p}}.$$

Dokaz. Za $p = 1$, slučaj je trivijalan, stoga je dovoljno promatrati slučaj kada je $1 < p < \infty$. $\mathrm{E}\,(|X+Y|^p) < \infty$ vrijedi prema (3.11). Ako stavimo $q = \frac{p}{p-1}$ imamo

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ pa možemo primijeniti Hölderovu nejednakost.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(|X+Y|^p\right) &= \mathrm{E}\left(|X+Y|^{p-1}|X+Y|\right) \\
&\le \mathrm{E}\left(|X+Y|^{p-1}|X|\right) + \mathrm{E}\left(|X+Y|^{p-1}|Y|\right) \\
&\le \left(\mathrm{E}\left(|X+Y|^{(p-1)q}\right)\right)^{\frac{1}{q}} \left(\mathrm{E}\left(|X|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&+ \left(\mathrm{E}\left(|X+Y|^{(p-1)q}\right)\right)^{\frac{1}{q}} \left(\mathrm{E}\left(|Y|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \left(\mathrm{E}\left(|X+Y|^p\right)\right)^{\frac{1}{q}} \left(\left(\mathrm{E}\left(|X|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\mathrm{E}\left(|Y|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}}\right).
\end{aligned}$$

Tražena nejednakost slijedi iz posljednje nejednakosti dijeljenjem s $\left(\mathrm{E}\left(|X+Y|^p\right)\right)^{\frac{1}{q}}$. □

3.3 Nejednakosti u ocjeni repnih vjerojatnosti

Sljedeća klasa nejednakosti koju ćemo razmatrati odnosi se na različite ocjene repnih vjerojatnosti. Repnim vjerojatnostima smatramo vjerojatnosti oblika

$$P(|X| > x), \quad P(X > x), \quad P(X < x)$$

i slične, za proizvoljni $x \in \mathbb{R}$, gdje je x najčešće pozitivan i velik.
Repne vjerojatnosti igraju ključnu ulogu u analizi ekstremnih događaja jer omogućuju bolje razumijevanje ponašanja distribucija na njihovim krajnjim vrijednostima. Posebno su važne u financijama i osiguranju, gdje se koriste za procjenu i ograničavanje rizika. Razmotrit ćemo Markovljevu, Čebiševljevu, Kolmogorovljevu, Hájek–Rényi, Chernoffovu te Hoeffdingovu nejednakost.

3.3.1 Markovljeva nejednakost

Markovljeva nejednakost jedna je od najpoznatijih nejednakosti te predstavlja iznimno koristan rezultat u teoriji vjerojatnosti. Ime je dobila po ruskom matematičaru Andreju Andrejeviču Markovu koji ju je dokazao krajem 19. stoljeća. Često, za slučajnu varijablu od interesa, želimo znati kolika je vjerojatnost da slučajna varijabla poprimi vrijednost koja je "daleko" od njezine očekivane vrijednosti. Odgovor na to pitanje daje nam Markovljeva nejednakost koja pruža gornju granicu vjerojatnosti da slučajna varijabla bude veća ili jednaka od neke pozitivne konstante, čak i kada nemamo informaciju o distribuciji te slučajne varijable. Sljedeću propoziciju navodimo u svrhu dokazivanja Markovljeve nejednakosti.

Propozicija 11. *Neka je X slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i g nenegativna Borelova funkcija takva da je $\mathrm{E}[g(X)] < \infty$. Ako je g parna i neopadajuća funkcija na $[0, +\infty\rangle$, tada za svaki $\epsilon > 0$ vrijedi sljedeće*

$$P\left(|X| \ge \varepsilon\right) \le \frac{\mathrm{E}[g(X)]}{g(\varepsilon)}.$$

Dokaz. Neka je $A = \{|X| \geq \varepsilon\}$. Tada vrijedi

$$\mathrm{E}[g(X)] = \int_A g(X)dP + \int_{A^C} g(X)dP \geq \int_A g(X)dP \geq g(\varepsilon) \int_A dP = g(\varepsilon)P(A),$$

iz čega proizlazi tražena nejednakost. □

Napomena 4. *Uz poseban slučaj funkcije g, Markovljeva nejednakost direktno slijedi iz prethodne propozicije.*

Korolar 2. (*Markovljeva nejednakost*) *Neka je $r > 0$ i $\mathrm{E}(|X|^r) < \infty$. Tada za proizvoljan $\varepsilon > 0$ vrijedi*

$$P\left(|X| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{E}\left(|X|^r\right)}{\varepsilon^r}. \tag{3.14}$$

3.3.2 Čebiševljeva nejednakost

Još jedna vjerojatnosna nejednakost koja daje odgovor na pitanje kolika je vjerojatnost da slučajna varijabla poprimi vrijednost koja je "daleko" od njezinog očekivanja naziva se Čebiševljeva nejednakost. Ime je dobila po ruskom matematičaru Pafnutiju Lavoviču Čebiševu koji ju je 1867. godine dokazao u svrhu dokaza opće forme *Zakona velik brojeva*. Samu nejednakost iskazao je 14 godina ranije francuski matematičar I.-J. Bienaymé, ali ju je tek Čebišev dokazao. Iz tog razloga, nejednakost je dugi niz godina bila poznata i kao Bienaymé-Čebiševljeva nejednakost. Iako je A.A. Markov bio Čebiševljev učenik i svoju nejednakost je dokazao tek 1884. godine, u suvremenoj literaturi dokaz Čebiševljeve nejednakosti obično se izvodi uz pomoć specijalnog slučaja Markovljeve nejednakosti, što će biti slučaj i u ovom radu.

Korolar 3. (*Čebiševljeva nejednakost*) *Neka je X slučajna varijabla s konačnim očekivanjem μ i konačnom varijancom σ^2. Tada za proizvoljan $\varepsilon > 0$ vrijedi*

$$P\left(|X - \mu| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}. \tag{3.15}$$

Dokaz. Kako je $|X - \mu| \geq 0$ i $\varepsilon > 0$ vrijedi sljedeće:

$$P\left(|X - \mu| \geq \varepsilon\right) = P\left(|X - \mu|^2 \geq \varepsilon^2\right).$$

Direktnom primjenom Markovljeve nejednakosti za slučaj $r = 2$ slijedi.

$$P\left(|X - \mu| \geq \varepsilon\right) = P\left(|X - \mu|^2 \geq \varepsilon^2\right) \leq \frac{\mathrm{E}(X - \mu)^2}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

□

Napomena 5. *Ako stavimo $\varepsilon = k\sigma$, gdje je $k > 0$, dobivamo i alternativni, često korišteni, zapis Čebiševljeve nejednakosti:*

$$P\left(|X - \mu| \geq k\sigma\right) \leq \frac{1}{k^2}.$$

Možemo primijetiti da nam Čebiševljeva nejednakost zapravo govori da vjerojatnost da odstupanje slučajne varijable X od njezinog očekivanja, po apsolutnoj vrijednosti, bude veće ili jednako k standardnih devijacija, je manja ili jednaka $\frac{1}{k^2}$.

3.3.3 Kolmogorovljeva nejednakost

Kolmogorovljeva nejednakost je još jedan koristan rezultat u teoriji vjerojatnosti, posebno u proučavanju suma nezavisnih slučajnih varijabli, dokazima zakona velikih brojeva te u analizi konvergencije slučajnih procesa. Ime je dobila po ruskom matematičaru Andreju Nikolajeviču Kolmogorovu, a poznata je i pod nazivom Kolmogorovljeva maksimalna nejednakost.

Korolar 4. (*Kolmogorovljeva nejednakost*) *Neka je $X_1, X_2, \ldots, X_n$ niz nezavisnih slučajnih varijabli takvih da je $\mathrm{E}\left(X_i\right) = 0$, za svaki $i = 1, 2, \ldots, n$ i $\mathrm{Var}\left(X_i\right) < \infty$, za svaki $n \in \mathbb{N}$, te neka je $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi*

$$P\left(\max_{1\leq j\leq n} |S_j| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{\varepsilon^2}. \tag{3.16}$$

Prije samog dokaza, uočimo kako zbog $E[X_i] = 0$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$, vrijedi

$$\mathrm{E}\left(S_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\left(X_i\right) = 0, \tag{3.17}$$

iz čega slijedi

$$\mathrm{Var}\left(S_n\right) = \mathrm{E}\left(S_n^2\right) - \left(\mathrm{E}\left(S_n\right)\right)^2 = \mathrm{E}\left(S_n^2\right).$$

Prema tome, nejednakost (3.16) možemo zapisati u obliku

$$P\left(\max_{1\leq j\leq n} |S_j| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{E}\left(S_n^2\right)}{\varepsilon^2}.$$

Također, zbog nezavisnosti slučajnih varijabli $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vrijedi da je $\mathrm{Var}\left(S_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}\left(X_i\right)$ pa prethodnu nejednakost možemo pisati i u obliku

$$P\left(\max_{1\leq j\leq n} |S_j| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}\left(X_i\right).$$

Dokažimo sada Kolmogorovljevu nejednakost.

Dokaz. Promotrimo vjerojatnost $P\left(\max_{1\leq j\leq n} |S_j| \geq \varepsilon\right)$. Zanima nas indeks j za koji vrijedi $\max_{1\leq j\leq n} |S_j| \geq \varepsilon$. U tu svrhu, definirajmo indeks k kao

$$k = \inf\{j \leq n : |S_j| \geq \varepsilon\}. \tag{3.18}$$

Promotrimo događaje

$$A_i = \left\{|S_1| < \varepsilon, |S_2| < \varepsilon, \ldots, |S_{i-1}| < \varepsilon, |S_i| \geq \varepsilon\right\}, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Takvi događaji su međusobno disjunktni, odnosno vrijedi $A_i \cap A_j = \emptyset$, za svaki $i \neq j$. Sada, iz (3.18) možemo uočiti da ako je $|S_j| < \varepsilon$, $\forall j \leq n$, onda je $j = n$. Primjenom Čebiševljeve nejednakosti (3.15) i činjenice (3.17) imamo sljedeće

$$\begin{aligned} P\left(\max_{1\leq j\leq n} |S_j| \geq \varepsilon\right) &= P\left(|S_k| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\mathrm{Var}\left(S_k\right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\mathrm{E}\left(S_k^2\right) - \left(\mathrm{E}\left(S_k\right)\right)^2\right) = \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\mathrm{E}\left(S_k^2\right)\right). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Kako bi dokazali traženu nejednakost, sada je dovoljno pokazati da vrijedi $\mathrm{E}\left(S_k^2\right) \leq \mathrm{E}\left(S_n^2\right)$. Imamo

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(S_n^2\right) &= \mathrm{E}\left(\left(S_k + (S_n - S_k)\right)^2\right) = \mathrm{E}\left(S_k^2 + 2S_k(S_n - S_k) + (S_n - S_k)^2\right) \\ &= \mathrm{E}\left(S_k^2\right) + 2\mathrm{E}\left(S_k(S_n - S_k)\right) + \mathrm{E}\left((S_n - S_k)^2\right). \end{aligned}$$

Kako su S_k i $S_n - S_k$ međusobno nezavisne, vrijedi

$$\mathrm{E}\left(S_k(S_n - S_k)\right) = \mathrm{E}\left(S_k\right)\mathrm{E}\left(S_n - S_k\right) = 0.$$

Uzmemo li u obzir činjenicu da su $\mathrm{E}\left(S_k^2\right)$ i $\mathrm{E}\left((S_n - S_k)^2\right)$ pozitivne vrijednosti, slijedi da je

$$\mathrm{E}\left(S_n^2\right) = \mathrm{E}\left(S_k^2\right) + \mathrm{E}\left((S_n - S_k)^2\right) \geq \mathrm{E}\left(S_k^2\right).$$

Uvrštavanjem prethodne činjenice u (3.19) slijedi tražena nejednakost. □

Napomena 6. *Uočimo da se za slučaj $n = 1$, Kolmogorovljeva nejednakost svodi na Čebiševljevu nejednakost.*

3.3.4 Hájek – Rényi nejednakost

Hájek – Rényi nejednakost poznata je kao generalizacija Kolmogorovljeve nejednakosti. Otkrio ju je 1953. godine češki matematičar Jaroslav Hájek, dok je dokaz dao mađarski matematičar Alfréd Rényi. Ova nejednakost, kao i Kolmogorovljeva, izuzetno je korisna za dokazivanje zakona velikih brojeva i srodnih teorema

Teorem 7. (*Hájek–Rényi nejednakost*) *Neka je $X_1, X_2, \ldots, X_n$ niz nezavisnih slučajnih varijabli takvih da je $\mathrm{E}\left(X_i\right) = 0$, za svaki $i = 1, 2, \ldots, n$ i $\mathrm{Var}\left(X_i\right) < \infty$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Neka je c_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ nerastući niz pozitivnih brojeva i $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi*

$$P\left(\max_{1\leq j\leq n} c_j|S_j| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{j=1}^{n} c_j^2 \mathrm{Var}\left(X_j\right). \tag{3.20}$$

Dokaz nejednakosti prati postupak dokazivanja Kolmogorovljeve nejednakosti te ga iz tog razloga ne navodimo. Dokaz teorema dostupan je u izvorima [2] i [9].

Napomena 7. *Stavimo li $c_j = 1$, $\forall j$, nejednakost (3.20) se svodi na Kolmogorovljevu nejednakost.*

3.3.5 Chernoffova nejednakost

Chernoffova nejednakost, poznata i pod nazivom Chernoffova ograda, još je jedna u nizu nejednakosti koja daje informacije o repnim vjerojatnostima. Ova nejednakost pruža eksponencijalno opadajuću granicu vjerojatnosti odstupanja zbroja nezavisnih slučajnih varijabli od očekivane vrijednosti, koristeći pri tome funkcije izvodnice momenata. Nejednakost je prvi opisao Herman Chernoff 1952. godine, ali njen osnovni koncept se može pronaći i u ranijim radovima. Osim što je koristan alat u teoriji vjerojatnosti i statistici, Chernoffova nejednakost ima široku primjenu u računalnim znanostima, a posebno u analizi performansi algoritama. U nastavku ćemo se baviti na Chernoffovom ogradom za sumu nezavisnih Bernoullijevih varijabli, a potom ćemo razmotriti i opći slučaj.

Teorem 8. (*Chernoffova nejednakost*) *Neka je* $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$, *suma* n *nezavisnih Bernoullijevih slučajnih varijabli takvih da je*

$$X_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p_i & p_i \end{pmatrix}, p_i \in \langle 0, 1 \rangle$$

i $\mu = \mathrm{E}(S_n) = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$. *Tada vrijedi:*

(*i*) $P(S_n \geq (1+\delta)\mu) \leq e^{-\frac{\delta^2}{2+\delta}\mu}$, *za svaki* $\delta > 0$,

(*ii*) $P(S_n \leq (1-\delta)\mu) \leq e^{-\mu\delta^2/2}$, *za svaki* $0 < \delta < 1$.

Sljedeću lemu navodimo u svrhu dokaza prethodnog teorema.

Lema 3. *Neka je* X *Bernoullijeva slučajna varijabla, tj.*

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}, p \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Tada, za svaki $t \in \mathbb{R}$ *vrijedi*

$$M_X(t) = \mathrm{E}\left(e^{tX}\right) \leq e^{p(e^t-1)}.$$

Dokaz. Imamo sljedeće

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \mathrm{E}\left(e^{tX}\right) \\ &= p \cdot e^t + (1-p) \cdot 1 \quad \text{(po definiciji očekivanja)} \\ &= 1 + p(e^t - 1). \end{aligned}$$

Traženu nejednakost dobivamo primjenom poznate nejednakosti $1 + x \leq e^x$, uz supstituciju $x = p(e^t - 1)$

$$M_X(t) = 1 + p(e^t - 1) \leq e^{p(e^t-1)}.$$

□

Sada dokažimo Teorem 8.

Dokaz. Teorem dokazujemo primjenom Leme 1. i Leme 3.
Uz činjenicu da je $\mu = \mathrm{E}\left(S_n\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i$ imamo sljedeće

$$M_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{x_i}(t) \leq \prod_{i=1}^{n} e^{p_i(e^t-1)} = e^{(e^t-1)\sum_{i=1}^{n} p_i} = e^{(e^t-1)\mu}.$$

Kako bi dokazali prvu nejednakost u teoremu, označimo

$$a = (1+\delta)\mu \quad \text{i} \quad b = \ln(1+\delta).$$

Uz primjenu Markovljeve nejednakosti, sada je

$$P(S_n \geq (1+\delta)\mu) = P(S_n \geq a) = P(e^{bS_n} \geq e^{ba}) \leq \frac{\mathrm{E}\left(e^{bS_n}\right)}{e^{ba}}. \tag{3.21}$$

Uočimo da je s $\mathrm{E}\left(e^{bS_n}\right)$ definirana funkcija izvodnica momenta sume slučajnih varijabli M_{S_n} pa uz primjenu Leme 3 slijedi

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(e^{bS_n}\right) &= M_{S_n}(b) = \prod_{i=1}^{n} M_{x_i}(b) \\
&\leq \prod_{i=1}^{n} e^{p_i(e^b-1)} = e^{(e^b-1)} \prod_{i=1}^{n} e^{p_i} \\
&= e^{(e^b-1)} \cdot e^{\sum_{i=1}^{n} p_i} = e^{(e^b-1)} \cdot e^{\mu} \\
&= e^{(e^b-1)\mu}.
\end{aligned}$$

Uvrstimo li dobiveno u (3.21) i vratimo li supstituciju imamo sljedeće

$$\begin{aligned}
P(S_n \geq (1+\delta)\mu) &\leq \frac{\mathrm{E}\left(e^{bS_n}\right)}{e^{ba}} = \frac{e^{(e^b-1)\mu}}{e^{ba}} \\
&= e^{\mu\left((e^b-1)-b(1+\delta)\right)} \\
&= e^{\mu(\delta-(1+\delta)\ln(1+\delta))}.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Želimo da naša gornja granica za repnu vjerojatnost bude što manja. Kako bismo to postigli, minimizirat ćemo izraz za gornju granicu kao funkciju od b.
Neka je

$$f(b) = \mu(e^b - 1) - b(1+\delta).$$

Derivirajmo funkciju f

$$f'(b) = e^b - (1+\delta)$$

i izjednačimo ju s 0

$$e^b = 1 + \delta.$$

Funkcija f postiže svoj minimum u točki $b = \ln(1+\delta)$ koja predstavlja optimalan izbor za vrijednost parametra b. Korištenjem poznate nejednakosti

$$\ln(1+x) \geq \frac{x}{1+x/2}, \quad x > 0$$

dobivamo korisnu informaciju o vrijednosti eksponenta iz izraza (3.22)

$$\begin{aligned}
\ln(1+\delta) &\geq \frac{\delta}{1+\delta/2} \\
-(1+\delta)\ln(1+\delta) &\leq \frac{-2\delta-2\delta^2}{2+\delta} \\
\delta-(1+\delta)\ln(1+\delta) &\leq \frac{-\delta^2}{2+\delta} \\
\mu\left(\delta-(1+\delta)\ln(1+\delta)\right) &\leq \frac{-\delta^2}{2+\delta}\mu.
\end{aligned}$$

Ovime smo dobili gornju granicu repne vjerojatnosti

$$P(S_n \geq (1+\delta)\mu) \leq e^{\frac{-\delta^2}{2+\delta}\mu}$$

čime je dokazana prva tvrdnja teorema. Dokaz druge tvrdnje teorema provodi se na analogan način, ali se za supstituciju uzima $b = \ln(1-\delta)$ te se primjenjuje druga poznata nejednakost:

$$\ln(1-x) \geq -x + \frac{x^2}{2}, \quad \text{za } 0 < x < 1.$$

□

Uočimo da u Teoremu 8. gornja i donja granica imaju različite oblike. Postoje općenitije verzije ove granice u kojima nije prisutna ova razlika pa tako za $\delta \in (0,1)$, možemo kombinirati gornju i donju granicu iz prethodnog teorema kako bismo dobili sljedeću jednostavnu i korisnu granicu.

Korolar 5. *Ako vrijede iste pretpostavke kao u Teoremu 8., onda vrijedi*

$$P(|S_n-\mu| \geq \delta\mu) \leq 2e^{-\mu\delta^2/3}, \ \forall 0 < \delta < 1.$$

Chernoffova nejednakost može se primjeniti i na druge slučajne varijable. U nastavku navodimo Chernoffovu nejednakost za ograničene slučajne varijable, a koja ne ovisi o njihovoj distribuciji.

Teorem 9. *Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n \in \mathbb{N}$, slučajne varijable takve da je $a \leq X_i \leq b$, za svaki $i = 1, 2, \ldots, n$. Neka je $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ i $\mu = \mathrm{E}(S_n)$. Tada, za svaki $\delta > 0$ vrijedi sljedeće:*

(i) $P(S_n \geq (1+\delta)\mu) \leq e^{-\frac{2\delta^2\mu^2}{n(b-a)^2}}$,

(ii) $P(S_n \geq (1-\delta)\mu) \leq e^{-\frac{\delta^2\mu^2}{n(b-a)^2}}$.

3.3.6 Hoeffdingova nejednakost

Hoeffdingova nejednakost, slično kao i Chernoffova nejednakost, pruža gornju granicu vjerojatnosti odstupanja sume nezavisnih slučajnih varijabli od očekivane vrijednosti. Nejednakost je nazvana po finsko - američkom statističaru Wassilyju Hoeffdingu, a možemo ju smatrati pojednostavljenom i slabijom generalizacijom Chernoffove nejednakosti.

Teorem 10. *Neka su* $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n \in \mathbb{N}$, *nezavisne slučajne varijable takve da je* $a_i \leq X_i \leq b_i$, *za svaki* $i = 1, 2, \ldots, n$. *Neka je* $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ *i* $\mu = \mathrm{E}(S_n)$.
Tada, za svaki $\delta > 0$ *vrijedi:*

$$(i)\ \ P(S_n - \mu \geq \delta) \leq e^{-\frac{2\delta^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}},$$

$$(ii)\ \ P(|S_n - \mu| \geq \delta) \leq 2e^{-\frac{2\delta^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}}.$$

Budući da se radi o generalizaciji Chernoffove nejednakosti koju smo dokazali u prethodnom poglavlju, dokaz prethodnog teorema ne navodimo. Dokaz je dostupan u izvoru [2].

4 | Primjene nekih vjerojatnosnih nejednakosti

U posljednjem poglavlju ovog rada prikazat ćemo primjenu pojedinih vjerojatnosnih nejednakosti. Započet ćemo s primjenom Booleove i Bonferronijeve nejednakosti na jednom tipičnom vjerojatnosnom problemu. Nakon toga, analizirat ćemo kako se određene vjerojatnosti mogu ograničiti koristeći Markovljevu, Čebiševljevu i Chernoffovu nejednakost. Na samom kraju proučit ćemo i primjenu vjerojatnosnih nejednakosti u dokazivanju drugih važnih teorema.

4.1 Primjena Booleove i Bonferronijeve nejednakosti

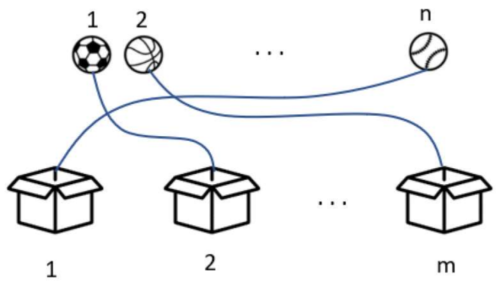
Pretpostavimo da nasumično raspoređujemo n različitih loptica u m različitih kutija, pri čemu je $n > m$. Zanima nas sljedeći događaj

$$A = \{\text{barem jedna kutija je prazna}\}.$$

Skup svih mogućih ishoda možemo opisati skupom

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) : 1 \leq \omega_i \leq m\},$$

gdje ω_i označava broj kutije u koju je spremljena i-ta loptica. Primjerice, jedan elementarni događaj je $\omega = (2, m, 5, \dots, 1)$. To znači da je prva loptica stavljena u drugu kutiju, druga loptica u zadnju kutiju, treća u petu, ... , n-ta u prvu (slika 4.1).



Slika 4.1: Prikaz jednog elementarnog događaja

Iz prethodnog razmatranja možemo zaključiti kako je $P(\omega) = \frac{1}{m^n}$, za svaki $\omega \in \Omega$. Označimo s

$$A_j = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) : \omega_i \neq j, \forall i = 1, 2, \dots, n\},\ j = 1, 2, \dots, m$$

događaj da je točno j-ta kutija prazna. Tada je

$$P(A_j) = \left(\frac{m-1}{m}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n, \; \forall j = 1, 2, \ldots, m\,,$$

a za događaj A vrijedi

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m = \bigcup_{i=1}^{m} A_i.$$

Vjerojatnost događaja A može se precizno izračunati primjenom formule uključivanja-isključivanja, ali taj postupak je često vrlo složen. Međutim, vjerojatnost je moguće ograničiti uz pomoć Booleove i Bonferronijeve nejednakosti na vrlo jednostavan način.
Primjenom Booleove nejednakosti (3.3) slijedi

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{m} P(A_i) = \sum_{i=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n = m\left(1 - \frac{1}{m}\right)^n,$$

čime smo dobili gornju granicu tražene nejednakosti. Primijenimo sada i Bonferronijevu nejednakost (3.4) kako bi dobili donju granicu

$$\begin{aligned} P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) &\geq \sum_{i=1}^{m} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq m} P(A_i \cap A_j) \\ &= m\left(1 - \frac{1}{m}\right)^n - \binom{m}{2}\left(\frac{m-2}{m}\right)^n. \end{aligned}$$

Dakle, imamo

$$m\left(1 - \frac{1}{m}\right)^n - \binom{m}{2}\left(1 - \frac{2}{m}\right)^n \leq P(A) \leq m\left(1 - \frac{1}{m}\right)^n.$$

Ovo daje dobru procjenu kada je n velik u usporedbi s m. Primjerice, ako je $n = 50$ i $m = 10$ imamo

$$10 \cdot (0.9)^{50} - 45 \cdot (0.8)^{50} \leq P(A) \leq 10 \cdot (0.9)^{50},$$

odnosno

$$0.050895 \leq P(A) \leq 0.051537.$$

Vidimo da razlika između donje i gornje granice iznosi tek 0.000642, što daje prilično dobru procjenu.

4.2 Primjena Markovljeve, Čebiševljeve i Chernoffove nejednakosti

Pretpostavimo da imamo pravilan novčić, odnosno da s jednakom vjerojatnošću padne pismo ili glava. Novčić bacamo 1000 puta. Neka je X slučajna varijabla koja označava koliko puta je palo pismo u 1000 bacanja. To zapravo znači da je

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{1000}\,, \text{ gdje je } X_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \ i = 1, 2, \ldots, 1000.$$

Odnosno možemo reći da slučajna varijabla X ima binomnu distribuciju s parametrima $n = 1000$ i $p = \frac{1}{2}$ tj. $X \sim \mathcal{B}(1000, \frac{1}{2})$. U tom slučaju vrijedi

$$\mathrm{E}\,(X) = np = 500 \quad i \quad \mathrm{Var}\,(X) = npq = 250.$$

Recimo da nas zanima vjerojatnost da se pismo pojavilo više od 600 puta u 1000 uzastopnih bacanja novčića, odnosno zanima nas $P(X \geq 600)$.
Za početak, odredimo gornju granicu ove vjerojatnosti pomoću Markovljeve nejednakosti:

$$P(X \geq 600) \leq \frac{500}{600} = \frac{5}{6} \sim 0.833\,.$$

Možemo reći da vjerojatnost da se pismo realizira više od 600 puta u 1000 bacanja je manja od 83.3%.
Odredimo sada gornju granicu ove vjerojatnosti uz pomoć Čebiševljeve nejednakosti:

$$P(X \geq 600) = P(X - 500 \geq 100) \leq \frac{250}{100^2} = \frac{1}{40} \sim 0.025\,.$$

Vidimo da Čebiševljeva nejednakost daje puno strožu granicu nego Markovljeva nejednakost. Možemo reći da vjerojatnost da slučajna varijabla X odstupa od svoje očekivane vrijednosti za više od 100, je manja od 2.5%.
Za kraj odredimo gornju granicu spomenute vjerojatnosti i pomoću Chernoffove nejednakosti:

$$P(X \geq 600) = P\left(X \geq \left(1 + \frac{1}{5}\right) 500\right) \leq e^{-\frac{1/25}{2+1/5}500} = e^{-\frac{100}{11}} \sim 0.00011\,.$$

Možemo zaključiti da u ovom slučaju Chernoffova nejednakost daje najstrožu granicu, dok Markovljeva daje najslabiju gornju granicu vjerojatnosti.

4.3 Primjena Cauchy - Schwarzove nejednakosti

U ovom poglavlju pokazat ćemo jednu primjenu Cauchy-Schwarzove nejednakosti s pomoću koje dobivamo još jednu korisnu vjerojatnosnu nejednakost te jedan primjer iz svakodnevice. No, prije samih primjena, prisjetimo se još nekih pojmova iz teorije vjerojatnosti koji su nam potrebni u ovom djelu rada.

Propozicija 12. *Neka je X slučajna varijabla s očekivanjem $\mu \in \mathbb{R}$ i varijancom $\sigma^2 > 0$. Tada za slučajnu varijablu*

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}, \ \sigma = \sqrt{\sigma^2},$$

vrijedi da je $\mathrm{E}\,(Y) = 0$ i $\mathrm{Var}\,(Y) = 1$.

Postupak transformiranja slučajne varijable na prethodni način nazivamo postupak standardizacije slučajne varijable.

Dokaz.

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\,(Y) &= \frac{1}{\sigma}\,(\mathrm{E}\,(X) - \mu) = 0, \\ \mathrm{Var}\,(Y) &= \frac{1}{\sigma^2}\,(\mathrm{Var}\,(X)) = 1. \end{aligned}$$

□

Definicija 13. *Neka je (X, Y) dvodimenzionalan slučajni vektor. Očekivanje*

$$\mathrm{E}\left(X^k Y^l\right), \quad k, l \in \mathbb{N}_o$$

slučajne varijable $X^k Y^l$ (ako postoji) nazivamo ishodišni moment reda (k, l) slučajnog vektora (X, Y). Očekivanje

$$\mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}\,(X))^k (Y - \mathrm{E}\,(Y))^l\right)$$

(ako postoji) nazivamo ishodišni moment reda (k, l) slučajnog vektora (X, Y).

U teoriji vjerojatnosti, od velike važnosti je centralni moment reda $(1, 1)$ kojeg nazivamo korelacijski moment ili kovarijanca dvodimenzionalnog slučajnog vektora. Dakle, vrijedi

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}\,(X, Y) &= \mathrm{E}\,((X - \mathrm{E}\,(X))(Y - \mathrm{E}\,(Y))) \\ &= \mathrm{E}\,(XY - X\mathrm{E}\,(Y) - Y\mathrm{E}\,(X) + \mathrm{E}\,(X)\,\mathrm{E}\,(Y)) \\ &= \mathrm{E}\,(XY) - \mathrm{E}\,(X)\,\mathrm{E}\,(Y)\,. \end{aligned}$$

Definicija 14. *Neka je (X, Y) dvodimenzionalan slučajni vektor za koji je* $\mathrm{Cov}\,(X, Y) = 0$. *Tada kažemo da su njegove komponente X i Y nekorelirane.*

Definicija 15. *Neka je (X, Y) dvodimenzionalan slučajni vektor i neka slučajne varijable X i Y imaju varijance $\sigma_X > 0$ i $\sigma_Y > 0$. Koeficijent korelacije slučajnog vektora (X, Y) definiran je izrazom*

$$\rho_{X,Y} = \rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}\,(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Iskažimo sada teorem u čijem dokazu ćemo primijeniti Cauchy - Schwarzovu nejednakost. Teorem navodi dovoljne uvjete pod kojima kovarijanca slučajnog vektora postoji te nam daje još jednu korisnu vjerojatnosnu nejednakost.

Teorem 11. *Neka je (X, Y) slučajni vektor za koji je $0 < \mathrm{E}\left(X^2\right), \mathrm{E}\left(Y^2\right) < \infty$. Tada postoji kovarijanca i vrijedi nejednakost*

$$|\rho_{X,Y}| \leq 1.$$

Dokaz. Neka su

$$U = \frac{X - E(X)}{\sigma_X} \quad \text{i} \quad V = \frac{Y - E(Y)}{\sigma_Y}.$$

Tada vrijedi $E(U) = E(V) = 0$ i $\mathrm{Var}(U) = \mathrm{Var}(V) = 1$.
Primijenimo sada Cauchy - Schwarzovu nejednakost (3.10):

$$E(|UV|) \leq \sqrt{E(U^2)\,E(V^2)} = \sqrt{1 \cdot 1} = 1\,.$$

Uočimo sljedeće

$$\begin{aligned} E(UV) &= E\left(\frac{X - E(X)}{\sigma_X} \cdot \frac{Y - E(Y)}{\sigma_Y}\right) \\ &= \frac{1}{\sigma_X \sigma_Y} E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right) \\ &= \frac{1}{\sigma_X \sigma_Y} E\left(XY - XE(Y) - YE(X) + E(X)E(Y)\right) \\ &= \frac{1}{\sigma_X \sigma_Y}\left(E(XY) - E(X)E(Y)\right) \\ &= \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \\ &= \rho_{X,Y} \end{aligned}$$

Iz prethodnog proizlazi tražena nejednakost, odnosno

$$|\rho_{X,Y}| = |E(UV)| \leq 1.$$

□

Promotrimo sada primjenu Cauchy - Schwarzove nejednakosti na konkretnom primjeru. Pretpostavimo da je cijena goriva po litri u mjesecu kolovozu modelirana slučajnom varijablom X čije očekivanje iznosi $EX = 1.54$ eura. Također, neka količina goriva koju potroši jedno kućanstvo bude modelirana slučajnom varijablom Y s očekivanjem $EY = 400$. U tom slučaju, slučajna varijabla XY predstavlja mjesečni trošak goriva za jedno kućanstvo. Dodatno, neka je $\sigma_X = 0.2$ eura te $\sigma_Y = 50$ litara. Zanima nas očekivanje slučajne varijable XY, odnosno očekivani mjesečni trošak goriva.

Iz poznatih podataka slijedi

$$\begin{aligned} EX^2 &= \sigma_X^2 + (EX)^2 = 2.41, \\ EY^2 &= \sigma_Y^2 + (EY)^2 = 162500. \end{aligned}$$

Primijenimo li Cauchy - Schwarzovu nejednakost (3.10) dobivamo gornju granicu za očekivani trošak goriva u kućanstvu tj.

$$E|XY| \leq \sqrt{EX^2 \cdot EY^2} = 625.8.$$

4.4 Primjena nejednakosti u dokazima zakona velikih brojeva

Na početku rada istaknuli smo da su mnoge vjerojatnosne nejednakosti formulirane i dokazane prilikom dokazivanja ključnih teorema u teoriji vjerojatnosti. Jedan od ključnih teorema je svakako i zakon velikih brojeva, koji se odnosi na granične vrijednosti niza slučajnih varijabli. Postoje slabi i jaki zakoni velikih brojeva, a u ovom ćemo poglavlju, u kontekstu primjena vjerojatnosnih nejednakosti, dokazati jedan od njih.

Definicija 16. *Za niz slučajnih varijabli $X_1, X_2, \ldots, X_n$ kažemo da zadovoljava slabi zakon velikih brojeva ako za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{n}|S_n - \mathrm{E}\left(S_n\right)| \geq \varepsilon\right) = 0,$$

gdje je

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Prethodna definicija nam govori da, ako niz slučajnih varijabli zadovoljava slabi zakon velikih brojeva, tada vjerojatnost da se realizacija prosjeka varijabli $X_1, X_2, \ldots, X_n$ razlikuje od očekivane vrijednosti prosjeka za više od proizvoljno odabranog malog broja, postaje sve manja kako se povećava broj slučajnih varijabli uključenih u prosjek. Postoji mnogo rezultata koji pružaju dovoljne uvjete pod kojima niz slučajnih varijabli zadovoljava slabi zakon velikih brojeva. U ovom poglavlju dokazat ćemo jedan, koji se oslanja na primjenu Čebiševljeve nejednakosti.

Teorem 12. *Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz slučajnih varijabli takav da su slučajne varijable $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezavisne, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Neka su varijance tih slučajnih varijabli uniformno ograničene, tj. postoji $M > 0$ takav da je*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Var}\left(X_k\right) \leq M.$$

Tada za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{n}|S_n - \mathrm{E}\left(S_n\right)| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Dokaz. Za slučajnu varijablu Y, koja ima varijancu, vrijedi Čebiševljeva nejednakost tj.

$$P\left(|Y - \mathrm{E}\left(Y\right)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{Var}\left(Y\right)^2}{\varepsilon}.$$

Neka je dan prirodan broj n i neka je $Y_n = \frac{S_n}{n}$. Zbog nezavisnosti vrijedi

$$\mathrm{Var}\left(Y_n\right) = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\left(S_n\right)$$

pa slijedi

$$P\left(\frac{1}{n}|S_n - \mathrm{E}\left(S_n\right)| \geq \varepsilon\right) = P\left(|Y_n - \mathrm{E}\left(Y_n\right)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{Var}\left(S_n\right)}{n\varepsilon^2} \leq \frac{M}{n\varepsilon^2}.$$

Dakle, vrijedi

$$0 \leq P\left(\frac{1}{n}|S_n - \mathrm{E}\left(S_n\right)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{M}{n\varepsilon^2}.$$

Stoga je

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{n}|S_n - \mathrm{E}\left(S_n\right)| \geq \varepsilon\right) = 0$$

□

Literatura

[1] Z. Lin, Z. Bai, *Probability Inequalities*, Springer, Berlin, 2011.

[2] A. Gut, *Probability: A Graduate Course*, Springer, New York, 2005.

[3] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.

[4] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Wiley, New York, 2008.

[5] M. Benšić, N. Šuvak, *Uvod u vjerojatnost i statistiku*, Sveučilište J.J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2014.

[6] F. M. Brückler, *Povijest Matematike II*, Sveučilište J.J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2010.

[7] D. Jukić, *Mjera i integral*, Sveučilište J.J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2012.

[8] D. Jankov Maširević, N. Keglević, *Čebiševljeva i Markovljeva nejednakost u teoriji vjerojatnosti*, Osječki matematički list **17**(2017), 125–137.

[9] J. Hájek, A. Rényi, *Generalization of an inequality of Kolmogorov*, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae **6**(1955), 281–283.

[10] M. Ribičić Penava, K. Bošnjak, *Jensenova nejednakost i nejednakosti izvedene iz nje*, Osječki matematički list **16**(2016), 15–25.

[11] *Vjerojatnost*, dostupno na `https://oldwww.mathos.unios.hr/images/homepages/dgrahova/Vjerojatnost/Vjerojatnost-handouts.pdf`

[12] *Chernoff bounds, and some applications*, dostupno na `https://math.mit.edu/~goemans/18310S15/chernoff-notes.pdf`

[13] *Probabilistic Method and Randomized Algorithms*, dostupno na `https://i.cs.hku.hk/~algth/classes/c8603_17/notes1.pdf`

Sažetak

Ovaj rad donosi pregled ključnih vjerojatnosnih nejednakosti koje imaju velik značaj u analizama slučajnih varijabli, izvođenju graničnih teorema i sličnim problemima teorije vjerojatnosti. U prvom dijelu rada definirani su osnovni pojmovi te se upoznajemo s osnovnim nejednakostima koje se odnose na vjerojatnosti događaja. U središnjem dijelu analiziramo neke od najpoznatijih vjerojatnosnih nejednakosti, s posebnim naglaskom na one vezane uz momente slučajnih varijabli i ocjene repnih vjerojatnosti. Sve nejednakosti su potkrijepljene iskazima i dokazima ključnih tvrdnji. Naposljetku proučavamo i neke primjene spomenutih nejednakosti u konkretnim problemima.

Ključne riječi

σ-aditivnost, Booleova nejednakost, Bonferronijeva nejednakost, Hölderova nejednakost, Cauchy - Schwarzova nejednakost, Jensenova nejednakost, Ljapunovljeva nejednakost, Paley - Zygmund nejednakost, Nejednakost Minkowskog, Markovljeva nejednakost, Čebiševljeva nejednakost, Kolmogorovljeva nejednakost, Hájek–Rényi nejednakost, Chernoffova nejednakost, Hoeffdingova nejednakost

Inequalities in Probability Theory

Summary

This thesis provides an overview of key probability inequalities that are crucial in the analysis of random variables, the proof of limit theorems, and similar problems in probability theory. The first part of the thesis defines fundamental terms and introduces basic inequalities related to event probabilities. In the main section, we analyze some of the most well-known probability inequalities, with a special emphasis on those related to moments of random variables and estimates of tail probabilities. All inequalities are supported by statements and proofs of key theorems and propositions. Lastly, we review some applications of these inequalities in specific problems.

Keywords

σ-additivity, Boole's inequality, Bonferroni's inequalities, Hölder's inequality, Cauchy-Schwarz inequality, Jensen's inequality, Lyapunov's inequality, Paley-Zygmund inequality, Minkowski's inequality, Markov's inequality, Chebyshev's inequality, Kolmogorov's inequality, Hájek–Rényi inequality, Chernoff's inequality (Chernoff's bound) , Hoeffding's inequality

Životopis

Rođena sam 22. svibnja 1996. godine u Slavonskom Brodu. 2011. godine završila sam Osnovnu školu "Mijat Stojanović" Babina Greda nakon čega sam upisala Prirodoslovno - matematičku gimnaziju u Županji. Po završetku srednje škole upisala sam Sveučilišni preddiplomski studij Matematika na Odjelu za matematiku u Osijeku, a nakon toga i diplomski studij, modul Financijska matematika i statistika. Stručnu praksu sam odradila u Prvom plinarskom društvu u Vukovaru te sam 10 mjeseci radila kao nastavnica matematike u Tehničkoj školi Ruđera Boškovića u Vinkovcima. Trenutno sam zaposlena u Poslovnoj inteligenciji na poziciji Associate Consultant-a.