Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni diplomski studij matematike
Smjer: Financijska matematika i statistika

Marija Varga

Potpunost modela financijskog tržišta u diskretnom vremenu

Diplomski rad

Osijek, 2016.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni diplomski studij matematike
Smjer: Financijska matematika i statistika

Marija Varga

Potpunost modela financijskog tržišta u diskretnom vremenu

Diplomski rad

Mentor: doc. dr. sc. Nenad Šuvak

Osijek, 2016.

Sadržaj

1 Uvod

U drugoj polovici prošlog stoljeća dogodile su se neke vrlo bitne promjene u okvirima nacionalnog i međunarodnog financijskog sustava. Te su se promjene prvenstveno odrazile u novim, usavršenim instrumentima, institucijama i mehanizmima financijskog sustava. Stoga pod pojmom financijske imovine više ne podrazumjevamo samo novac, već sve ono što svom vlasniku, ali i društvu općenito, predstavlja neku vrijednost. Dakle, osim novcem, počelo se trgovati dionicama, obveznicama i drugim vrijednosnim papirima, koji svom vlasniku mogu donijeti nekakav oblik zarade ili pak gubitka. Najkompleksnija financijska imovina je ona čije su vrijednosti u budućnosti neizvjesne i ulaganje u njih nosi određeni rizik. Kako bi što bolje predvidjeli, odnosno procijenili vrijednosti takve imovine u budućnosti, znanstvenici su počeli izrađivati matematičke modele pomoću kojih su s više ili manje uspjeha procjenjivali te vrijednosti.

Matematički model može se definirati kao matematički zapis ponašanja i/ili osobina promatranih fizičkih veličina. Matematički model također predstavlja skup matematičkih relacija koje opisuju veze između veličina koje karakteriziraju neki proces, te odražava najvažnije karakteristike tog procesa. S obzirom da u većini slučajeva nije moguće izraditi apsolutno točan model, često koristimo određene aproksimacije i zanemarujemo malo utjecajna mjerenja.

Matematički modeli konstruiraju se u diskretnom i neprekidnom vremenu. U ovom radu baviti ćemo se opisivanjem matematičkih modela financijskog tržišta u diskretnom vremenu, te ćemo analizirati njihovu potpunost. Pritom smatramo da je model tržišta bez arbitraže potpun, ako je svaki slučajni zahtjev dostižan. Motivacija za izradu takvih modela je prije svega njihova primjenjivost u praksi, konkretno, primjenjivost na financije.

1.1 Diskretno vrijeme

Diskretno i neprekidno vrijeme dva su alternativna okvira unutar kojih modeliramo varijable. Vrijednost slučajne varijable kojom modeliramo vrijednost nekog financijskog instrumenta u diskretnom vremenu promatramo u najviše konačno mnogo trenutaka, što podrazumjeva da je vrijednost promatranog financijskog instrumenta na intervalu između dvaju uzastopnih trenutaka konstantna. Matematički model također može opisivati vrijednost financijskog instrumenta i u prebrojivo mnogo trenutaka. Modele karakterizirane takvim vremenima nazivamo modelima u diskretnom vremenu.

Prostor na kojem promatramo diskretne slučajne varijable zove se diskretan vjerojatnosni prostor. Označavamo ga s $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, pri čemu je:

- **Skup $\boldsymbol{\Omega}$** $= \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ je skup elementarnih događaja koji sadrži konačno ili prebrojivo mnogo elemenata.

- $\sigma -$ **algebra** je familija podskupova od Ω.

  Definicija 1.1. Neka je dan neprazan skup Ω. Familija $\mathcal{F}$ podskupova skupa Ω je $\sigma -$ **algebra** skupova na Ω ako vrijedi:

  i) $\emptyset \in \mathcal{F}$,

  ii) ako je $A \in \mathcal{F}$, onda je i $A_C \in \mathcal{F}$,

  iii) ako je dana prebrojiva familija skupova $(A_n, n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{F}$, onda $\mathcal{F}$ sadrži i njihovu uniju, tj.
  $$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}.$$

  Elemente σ-algebre $\mathcal{F}$ zovemo događaji.

- **Vjerojatnost** $P : \Omega \longrightarrow [0,1]$ takva da je $\forall i \in \{1,2,\dots,n\}$, $p_i = P\{\omega_i\} \geq 0$ i
  $$\sum_{i=1}^{n} P\{\omega_i\} = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Označimo sa $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ Borelovu σ-algebru na skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$. To je najmanja σ-algebra podskupova od $\mathbb{R}$ koja sadrži sve poluotvorene intervale $\langle a, b]$, $-\infty < a \leq b < \infty$. Borelova σ-algebra može se karakterizirati kao σ-algebra na skupu $\mathbb{R}$ generirana:

i) Svim otvorenim intervalima u $\mathbb{R}$,

ii) Svim otvorenim podskupovima od $\mathbb{R}$,

iii) Svim beskonačnim intervalima tipa $\langle -\infty, b]$, itd.

Definicija 1.2. Funkcija $X : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ je **slučajna varijabla** ako je praslika elementa iz $\mathcal{B}$ događaj u Ω, tj. element iz $\mathcal{F}$.

U financijskom kontekstu, slučajnom varijablom možemo modelirati npr. cijenu dionice ili nekog drugog vrijednosnog papira.

Definicija 1.3. Neka je dan diskretan vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Svaku funkciju $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ zvat ćemo **diskretna slučajna varijabla**.

Kretanje vrijednosti varijable koja se mjeri u diskretnom vremenu grafički se može prikazati step – funkcijom.

Slika diskretne slučajne varijable X je diskretan skup $\subset \mathbb{R}$, kojeg označavamo s $\mathcal{R}(X)$.

Diskretnu slučajnu varijablu X zadajemo tablicom distribucije:

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & ... & x_n \\ p_1 & p_2 & p_3 & ... & p_n \end{pmatrix}, \qquad p_i \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Ukoliko u isto vrijeme proučavamo nekoliko slučajnih varijabli, te želimo doći do nekih zaključaka o mogućim vezama između njih, proučavanje svake varijable posebno neće nam biti od neke pomoći. It tog razloga trebali bismo te varijable gledati i proučavati unutar jednog slučajnog vektora.

Definicija 1.4. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor pridružen slučajnom pokusu. Funkciju $(X_1, X_2, ..., X_n)$ koja svakom ishodu pokusa pridružuje uređenu n-torku realnih brojeva $(x_1, x_2, ..., x_n)$ zovemo ***n*-dimenzionalan slučajni vektor** ako vrijedi:

$$\{X_1 \leq x_1\} \cap ... \cap \{X_n \leq x_n\} = \{X_1 \leq x_1, ..., X_n \leq x_n\} \in \mathcal{F}$$

za svaki $x_1 \in \mathbb{R}, ..., x_n \in \mathbb{R}$.

n-dimenzionalan slučajni vektor je diskretan ako su sve varijable koje čine taj slučajni vektor diskretne. Slika tog slučajnog vektora je $\mathbb{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ jednaka $\mathcal{R}(\mathbb{X}) = \mathcal{R}(X_1) \times \mathcal{R}(X_2) \times ... \times \mathcal{R}(X_n)$.

2 Financijsko tržište

Tržište (engl. market) je svako susretanje ponude i potražnje, bez obzira na mjesto, vrijeme i oblik obavljanja kupoprodaje. Tržište se također može definirati i kao mjesto razmjene proizvoda i usluga, kupaca i prodavača. Kupnja i prodaja na tržištu mogu se obavljati i bez nazočnosti robe, te također i bez izravnog kontakta kupaca i prodavača. Primjeri takve kupovine su kupnja putem kataloga, interneta, telefona, itd. Pod pojmom tržišta se smatra i mehanizam kojim se reguliraju odnosi kupaca i prodavača u uvjetima u kojima oni ostvaruju svoje interese i ciljeve, a zbog kojih i stupaju u međusobne odnose.

Vrste tržišta:

- tržište roba i usluga,
- tržište inputa (rada, kapitala i zemlje),
- financijsko tržište.

Financijsko tržište (engl. financial market) je skup mjesta, instrumenata, osoba, tehnika i tokova koji omogućuju razmjenu novca, deviza i kapitala.[1] Postoji mnogo vrsta financijskih tržišta, npr. tržište dionica, tržište obveznica, tržište kredita, tržište potraživanja po kreditnim karticama, tržište državnih vrijednosnih papira, itd.

2.1 Financijski instrumenti

Na financijskom tržištu trguje se financijskim instrumentima. **Financijski instrument** je dokumentarni dokaz vlasništva nad nekom financijskom imovinom, primjerice blagajnički zapis, dionica, obveznica, itd, kojom se trguje na financijskom tržištu. Svrha im je:

- modeliranje kretanja cijena, te njihovih promjena na financijskom tržištu,
- mjerenje i modeliranje rizika na financijskom tržištu,
- kontroliranje i ograničavanje rizika na financijskom tržištu.

Financijski instrumenti dijele se na dvije važne kategorije:

1. OSNOVNI financijski instrumenti - tu spadaju nerizični (novac u domaćoj valuti koji ulažemo ili posuđujemo uz nepromjenjivu kamatnu stopu) i rizični (novac u stranoj valuti, obveznice, dionice, zlato,...) financijski instrumenti.

[1] http://www.pses-inova.hr/pojam/financijsko-trziste/

2. IZVEDENI financijski instrumenti - primarno se koriste za upravljanje rizikom, a vrijednost im ovisi, tj. izvodi se iz vrijednosti osnovnih financijskih instrumenata. To su npr. forward i futures ugovori, opcije, i sl.

2.1.1 Osnovni financijski instrumenti

Osnovni financijski instrumenti dijele se na nerizične i rizične financijske isntrumente.

- Nerizični financijski instrument predstavlja novac u domaćoj valuti koji se može uložiti ili posuditi uz fiksnu kamatnu stopu. Ulaganje u ove financijske instrumente, kako sam naziv kaže, ne nosi nikakav rizik, tj. poznavanje nepromjenjive kamatne stope omogućuje nam da sa 100 %-tnom točnošću možemo izračunati kako će se vrijednost tih instrumenata mijenjati kroz vrijeme.
- S druge strane, rizični financijski instrumenti nose sa sobom određeni rizik (zbog raznih fluktuacija na tržištu), te njihove buduće vrijednosti nije moguće u potpunosti točno odrediti. Rizični financijski instrumenti su najčešće novac u stranoj valuti (valutni rizik), državne i korporativne obveznice, zlato, dionice, i sl.

S obzirom da ćemo se u ovom radu najviše baviti dionicama, definirajmo prvo što je to dionica.

Definicija 2.1. Dionica je vlasnički vrijednosni papir koji predstavlja pravo vlasništva u određenom dioničkom društvu.[2]

Skup financijske imovine pojedinca ili nekog poduzeća zove se portfelj. Sastavljen je od različitih financijskih instrumenata, kako nerizičnih, tako i rizičnih. Cilj sastavljanja portfelja je postizanje određenih financijskih rezultata, odnosno dobiti.

U ovom radu promatrat ćemo financijsko tržište na kojemu trgujemo s $(d+1)$-nom financijskom imovinom, od čega je jedna nerizična, a d je rizičnih financijskih imovina.

Definicija 2.2. Portfelj je vektor $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1, ..., \varphi^d) \in \mathbb{R}^{d+1}$, gdje $\varphi^i \in \mathbb{R}$ predstavlja broj jedinica i-te financijske imovine koju investitor posjeduje u trenutku $t = 0$.

[2] https://hr.wikipedia.org/wiki/Dionica

2.1.2 Izvedeni financijski instrumenti

Izvedeni financijski instrumenti (izvedenice ili derivativi) su financijski instrumenti čija vrijednost ovisi o vrijednostima osnovnih financijskih instrumenata i ta je ovisnost opisana nekom funkcijom. Njihovu vrijednost izvodimo iz vrijednosti osnovnih financijskih instrumenata, odnosno dionice na koju se odnose. Koristimo ih kako bismo upravljali rizikom, tj. u nekoj ga mjeri kontrolirali. Međutim njima se rizik može i povećati. Kako smo već naveli, izvedenice su npr. forward i futures ugovori, opcije i drugi.

Jedna od najstarijih i najosnovnijih izvedenica je tzv. forward ugovor. Njime se unaprijed fiksira cijena neke imovine u trenutku dospijeća. Po forward ugovoru, kupac imovine je u tzv. long poziciji, dok je prodavatelj u tzv. short poziciji. Kupac se ovim ugovorom želi zaštititi od velikog rasta cijena, a prodavatelj od pada.

Definicija 2.3. Forward (terminski) ugovor je ugovor u kojem se jedna strana (kupac) obvezuje na kupnju, a druga strana (prodavatelj) na prodaju financijske imovine u trenutku dospijeća T, po dogovorenoj forward cijeni ili cijeni izvršenja K, koja je fiksna.

Ukoliko sa S_T označimo tržišnu vrijednost financijske imovine u trenutku dospijeća T, a cijenu izvršenja dogovorenu ugovorom s K, možemo odrediti koliko forward ugovor vrijedi svom vlasniku u trenutku dospijeća.

1. Ako je tržišna vrijednost financijske imovine u trenutku dospijeća veća od cijene izvršenja, tj. ako je $\mathbf{S_T} > \mathbf{K}$, vlasnik forward ugovora generira zaradu od $(S_T - K)$.

2. Ako je tržišna vrijednost dionice u trenutku dospijeća manja ili jednaka cijeni izvršenja, tj. ako je $\mathbf{S_T} \leq \mathbf{K}$, tada vlasnik forward ugovora gubi iznos $(K - S_T)$.

U trenutku dospijeća T, forward ugovor svom vlasniku vrijedi

$$C^{fw} = S_T - K$$

Na međunarodnim financijskim tržištima trguje se i tzv. futures ugovorima. U prošlosti su i forward i futures ugovori nastali na trgovini poljoprivrednim proizvodima.

Definicija 2.4. Futures (ročni) ugovor je oblik kupoprodajnog ugovora kod kojeg se cijena i uvjeti unaprijed definiraju, a isporuka je odgođena.

Futures ugovori sadržajno su jednaki forward ugovorima, ali se futures ugovori sklapaju u okvirima burzi, pa burze onda određuju i pravne okvire ovih ugovora. Za razliku od forwards ugovora, kod kojih je ugovorna cijena fiksirana danom ugovaranja, a na dan izvršenja općenito ne mora biti jednaka tržišnoj vrijednosti, kod futures ugovora se ugovorna cijena korigira svakoga dana na tržišnu vrijednost uspostavljenu na burzi. Stoga se kupac i prodavač futures ugovora svakodnevno obračunavaju prema tržišnoj cijeni. S obzirom da se trgovina odvija na burzi, u njoj obavezno postoji posrednik – broker

Primjer 2.5. *Uzmimo za primjer futures ugovor na dugoročne državme obveznice na čikaškoj burzi roba (CBT). Neka vrijednost svakog ugovora iznosi 100 000 $ nominalne vrijednosti. To u bodovima znači 100 bodova (1 bod = 1 000 $).*

Sve obveznice koje temeljem ugovora treba dostaviti moraju na datum dostave imati još najmanje 15 godina do dospijeća i na datum dostave ne smiju biti opozive najmanje još 15 godina. Recimo da su rokovi kraj ožujka, lipnja, rujna i prosinca.

Na datum isteka futures ugovora, vrijednost ugovora jednaka je vrijednosti imovine koja se dostavlja. U primjeru zaštite od kamatnog rizika i pada tržišne vrijednosti obveznice, banka "A" long poziciju zauzima prodajom 50 futures ugovora (na dugoročne državne obveznice) na čikaškoj burzi robe (5 milijuna $ = 50 · 100 000 $). Tvrtka "B" zaštitu od kamatnog rizika (rasta cijene obveznice u budućnosti) provodi kupnjom 50 futures ugovora (na dugoročne državne obveznice) na čikaškoj burzi robe (5 milijuna dolara = 50 · 100 000 dolara).

Kupci i prodavatelji futures ugovora zaključuju svoje ugovore s klirinškom kućom povezanom s terminskom burzom (CBT). U takvim okolnostima kupci ugovora ne moraju brinuti o financijskoj stabilnosti i pouzdanosti prodavatelja i obrnuto. Dokle god je klirinška kuća stabilna, kupci ugovora nemaju razloga za brigu.

Kupci i prodavatelji futures ugovora trebaju uplatiti početni depozit (margin requirement), npr. 2 000 $ po ugovoru na račun margine. Futures ugovori se zatim svakodnevno prilagođavaju, što znači da se na kraju svakog dana trgovanja promjene u 3 vrijednosti ugovora oduzimaju ili dodaju računu.

Npr. ako nakon kupovine ugovora po cijeni 100 $, cijena na kraju dana padne na 99, sudionik gubi bod, tj. 1 000 $ i treba dodati još 1 000 $ na svoj račun margine kako bi mu stanje iznosilo 2 000 $. Nakon što su futures ugovori jednom prodani ili kupljeni, njima se može dalje trgovati u bilo koje vrijeme do datum dostave.

Osim forward i futures ugovora, postoje i tzv. opcije, koje se kao i forward ugovori mogu koristiti za smanjivanje rizika na financijskom tržištu. No zahvaljujući njima, rizik je vrlo lako i značajno povećati.

Opcija je ugovor koji svom vlasniku daje pravo, ali ne i obavezu da proda ili kupi neki financijski instrument do određenog budućeg datuma (vremena dospijeća) po unaprijed dogovorenoj cijeni (cijeni izvršenja).

Definicija 2.6. Europska call opcija (ECO) je ugovor koji svom vlasniku daje pravo, ali ne i obavezu, da u unaprijed određenom trenutku T kupi neku financijsku imovinu po unaprijed određenoj cijeni K.

Uz iste oznake kao i kod forward ugovora, možemo odrediti koliko ECO vrijedi svom vlasniku u trenutku dospijeća.

1. Ako je tržišna vrijednost dionice u trenutku dospijeća veća od cijene izvršenja, tj. ako je $\mathbf{S_T} > \mathbf{K}$, vlasnik opcije iskoristit će svoje pravo iz ugovora, te će od prodavatelja opcije kupiti dionicu po cijeni izvršenja K, jer je ona niža od tržišne cijene. Na taj način vlasnik ECO ostvaruje profit od $(S_T - K)$.

2. Ako je tržišna vrijednost dionice u trenutku dospijeća manja ili jednaka cijeni izvršenja, tj. ako je $\mathbf{S_T} \leq \mathbf{K}$, vlasnik opcije neće iskoristiti svoje pravo iz ugovora, pa mu ECO u tom slučaju vrijedi 0, tj. bezvrijedna je.

U trenutku dospijeća T, ECO svom vlasniku vrijedi:

$$C^{call} = \max(0, S_T - K) = (S_T - K)_+.$$

Definicija 2.7. Europska put opcija (EPO) je ugovor koji svom vlasniku daje pravo, ali ne i obavezu, da u unaprijed određenom trenutku T proda neku financijsku imovinu po unaprijed određenoj cijeni K.

Sada, uz iste oznake možemo odrediti koliko EPO vrijedi svom vlasniku u trenutku dospijeća.

1. Ako je tržišna vrijednost dionice u trenutku dospijeća veća od cijene izvršenja, tj. ako je $\mathbf{S_T} > \mathbf{K}$, vlasnik opcije neće iskoristiti svoje pravo iz ugovora, pa mu EPO u tom slučaju vrijedi 0, tj. bezvrijedna je.

2. Ako je tržišna vrijednost dionice u trenutku dospijeća manja ili jednaka cijeni izvršenja, tj. ako je $\mathbf{S_T} \leq \mathbf{K}$, vlasnik opcije iskoristit će svoje pravo iz ugovora, te će prodati dionicu po cijeni izvršenja K, jer je ona viša od tržišne cijene. Na taj način vlasnik EPO ostvaruje profit od $(K - S_T)$.

U trenutku dospijeća T, EPO svom vlasniku vrijedi:

$$C^{put} = \max(0, K - S_T) = (K - S_T)_+.$$

2.1.3 Cijene i povrati

- **Cijenu (vrijednost) nerizične financijske imovine**, često nazivane nultom financijskom imovinom, u trenutku t označavamo sa S_t^0. U trenutku $t = 0$, S_0^0 je poznata konstanta, a u trenutku $t > 0$, vrijednost nerizične financijske imovine u diskretnom vremenu je:

  - u sustavu jednostavnog ukamaćivanja $S_t^0 = S_0^0(1 + r't)$,
  - u sustavu složenog ukamaćivanja $S_t^0 = S_0^0(1 + r')^t$,

  gdje je r' konstantna efektivna kamatna stopa.

- **Cijena rizične financijske imovine** u budućnosti je neizvjesna, tj. nije nam poznata, pa ju modeliramo nenegativnim slučajnim varijablama čije su vrijednosti u trenutku $t > 0, S_t^i, i \in \{1, 2, ..., d\}$.

  Osim jedne nerizične, promatramo i d rizičnih financijskih instrumenata, odnosno dionica. Takav skup od $(d + 1)$ financijskih instrumenata nazivamo portfelj.

- **Vrijednost portfelja** φ u trenutku $t = 0$ jednaka je

$$V_0(\varphi_0) = \sum_{k=0}^{d} \varphi_0^k S_0^k = (\varphi_0, S_0),$$

  gdje (φ_0, S_0) označava skalarni produkt u $\mathbb{R}^{d+1}$.

  Uzmemo li da je $\omega \in \Omega$ stvarno stanje svijeta, tada cijene svih financijskih instrumenata u trenutku $t = 1$ iznose $S_1(\omega) = \Big(S_1^0,\ S_1^1(\omega), ...,\ S_1^d(\omega)\Big)$, pa vrijednost portfelja φ u trenutku $t = 1$ iznosi

$$\Big(\varphi_1, S_1(\omega)\Big) = \sum_{k=0}^{d} \varphi_1^k S_1^k(\omega) = \varphi_1^0(1 + r') + \sum_{k=1}^{d} \varphi_1^k S_1^k(\omega).$$

  To znači da je vrijednost portfelja φ u trenutku $t = 1$ slučajna varijabla (φ_1, S).

- **Cijenu izvršenja forward ugovora** iskazat ćemo pomoću leme, međutim, prvo bismo trebali objasniti što je to arbitraža. Naime, arbitraža je portfelj koji ne košta ništa, a s pozitivnom vjerojatnošću donosi pozitivan profit, tj. nije izložen riziku gubitka.

Lema 2.8. [3] *Ako financijsko tržište ne dopušta arbitražu, cijena izvršenja forward ugovora s dospijećem u trenutku T za dionicu čija je sadašnja vrijednost S_0, mora biti*

$$K = S_0(1 + r')^T.$$

Dokaz. Pretpostavimo da ne vrijedi $K = S_0(1 + r')^T$.

1. slučaj:

Pretpostavimo da vrijedi $K > S_0(1 + r')^T$.

U trenutku $t = 0$ prodavatelj u forward ugovoru posudi novac u vrijednosti S_0, te za taj iznos kupi jednu dionicu.

U trenutku $t = T$ proda dionicu za iznos K, vrati banci dug u iznosu $S_0(1+r')^T$. Ostaje sa $K - S_0(1 + r')^T$ zarade bez rizika.

2. slučaj:

Pretpostavimo da vrijedi $K < S_0(1 + r')^T$.

U trenutku $t = 0$ kupac u forward ugovoru posudi jednu dionicu i proda ju (short sell). Zatim investira iznos S_0 na tržištu novca.

U trenutku $t = T$ podigne $S_0(1 + r')^T$ investiranog novca, kupi jednu dionicu po cijeni K i vrati je vlasniku. Ostaje sa $(S_0(1 + r')^T - K)$ zarade bez rizika.

□

- **Cijene ECO i EPO** - kako smo već naveli, ECO svom vlasniku u trenutku izvršenja T vrijedi $\max(0, S_T - K) = (S_T - K)_+$, dok EPO vrijedi $\max(0, K - S_T) = (K - S_T)_+$. Iz dobivenih rezultata dalo bi se zaključiti da vlasnik opcije nikada nije na gubitku, dok prodavatelj može biti. Iz tog razloga kupac opcije mora platiti neku cijenu za opciju, tj. premiju. Glavno pitanje koje se nameće je - kako pravedno i racionalno odrediti tu

[3] B. Basrak, *Matematičke financije*, web - skripta, 2009.

cijenu, a da ona bude jedinstvena? Takvu cijenu u trenutku $t = 0$ možemo dobiti na jedan od sljedećih načina:

1. Prvi način temelji se na REPLICIRAJUĆEM PORTFELJU, npr. $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1)$, ako se trguje s dvije financijske imovine, jednom nerizičnom (novac u banci uložen uz efektivnu kamatnu stopu r') i jednom rizičnom (dionica). Uzmimo npr. da $r' = 0.05$, te da trgujemo dionicom tvrtke Coca-Cola. Na datum 15.08.2016., najviša cijena dionice bila je 44.1 \$, što je tada iznosilo ≈ 296.06 kn. Pretpostavimo da je vrijeme dospijeća opcije 15.08.2017., tj. $T = 1$, a cijena dospijeća, $K = 300$ kn.

   Dakle, imamo portfelj $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1)$, gdje nam, u trenutku $t = 0$, φ^0 označava iznos novca u banci, a φ^1 broj dionica tvrtke Coca-Cola u posjedu investitora.

   ▶ Vrijednost tog portfelja u početnom trenutku $t = 0$, tj. promatranom datumu 15.08.2016. iznosi:

$$V_0(\varphi_0) = \varphi^0 + \varphi^1 S_0 = \varphi^0 + 296.06\varphi^1.$$

   Pretpostavimo sada da je skup $\omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ skup stvarnih stanja svijeta. Tada u trenutku $t = 1$ postoje dvije moguće realizacije slučajne varijable S_1 (moguće vrijednosti dionice u trenutku dospijeća). To su:

   - $S_1(\omega_1) = 400$ kn
   - $S_1(\omega_2) = 200$ kn.

   Iz priloženog možemo uočiti da slučajnu varijablu S_1 možemo modelirati kao slučajnu varijablu s tablicom distribucije :

$$S_1 \sim \begin{pmatrix} 200 & 400 \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \qquad p \in \langle 0, 1 \rangle.$$

   ▶ Vrijednost tog portfelja u trenutku dospijeća $T = 1$, tj. na datum dospijeća 15.08.2017. modeliramo slučajnom varijablom $V_1(\varphi) : \{\omega_1, \omega_2\} \longrightarrow \mathbb{R}$;

$$V_1(\varphi) = \varphi^0(1 + r') + \varphi^1 S_1.$$

   U našem slučaju ($T = 1$), s obzirom da je $V_1(\varphi)$ transformacija slučajne varijable S_1, dvije su mogućnosti realizacije slučajne varijable $V_1(\varphi)$. To su:

- $V_1(\varphi)(\omega_1) = 1.05\varphi^0 + 400\varphi^1$
- $V_1(\varphi)(\omega_2) = 1.05\varphi^0 + 200\varphi^1$.

Portfelj φ:

⋆ u slučaju ECO, replicira ECO ako vrijedi da je $V_T(\varphi) = C_T^{call}$, gdje je $C_T^{call} = \max\{0, S_T - K\}$,

⋆ u slučaju EPO, replicira EPO ako vrijedi da je $V_T(\varphi) = C_T^{put}$, gdje je $C_T^{put} = \max\{0, K - S_T\}$.

C_T^{call} i C_T^{put} su također Bernoullijeve slučajne varijable s tablicama distribucije:

$$C_1^{call} \sim \begin{pmatrix} 0 & 100 \\ 1-p & p \end{pmatrix}; \qquad C_1^{put} \sim \begin{pmatrix} 0 & 100 \\ p & 1-p \end{pmatrix}, \qquad p \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Uz sve pretpostavke i dobivene rezultate, sada dobijemo sustave jednadžbi:

- za ECO:

$$\begin{aligned} 1.05\varphi^0 + 400\varphi^1 &= 100 \\ 1.05\varphi^0 + 200\varphi^1 &= 0. \end{aligned}$$

Rješavanjem ovog sustava jednadžbi dobijemo da novac u banci, odnosno φ^0 iznosi -95.24 kn, tj. banci dugujemo 95.24 kn, te posjedujemo $\frac{1}{2}$ dionice tvrtke Coca-Cola. Te dvije stavke čine replicirajući portfelj za ovu ECO. U tom slučaju realna cijena ove ECO, koja ni kupcu niti prodavatelju ne omogućava zaradu bez rizika, iznosi:

$$C_0^{call} = V_0(\varphi) = -95.24 + \frac{1}{2}296.06 = 52.79 \ kn.$$

- za EPO:

$$\begin{aligned} 1.05\varphi^0 + 400\varphi^1 &= 0 \\ 1.05\varphi^0 + 200\varphi^1 &= 100. \end{aligned}$$

Rješavanjem ovog sustava jednadžbi dobijemo da novac u banci, odnosno φ^0 iznosi 190.48 kn, te posjedujemo $-\frac{1}{2}$ dionice tvrtke Coca-Cola, tj. dužni smo

$\frac{1}{2}$ dionice tvrtke Coca-Cola. Te dvije stavke čine replicirajući portfelj za ovu EPO. U tom slučaju realna cijena ove EPO, koja ni kupcu niti prodavatelju ne omogućava zaradu bez rizika, iznosi:

$$C_0^{put} = V_0(\varphi) = 190.48 - \frac{1}{2}296.06 = 42.45\ kn.$$

2. Drugi se način određivanja cijene ECO i EPO u $T = 0$ temelji na ARTIFICIJELNOJ VJEROJATNOSTI $P^* : \{\omega_1, \omega_2\} \longrightarrow [0, 1]$, pri čemu vrijedi:

$$P^*\{\omega_1\} = p^*; \qquad P^*\{\omega_2\} = 1 - p^*.$$

Kako bismo mogli odrediti koliko nam iznosi artificijelna vjerojatnost p^*, potrebno je da prvo definiramo diskontirane cijene, jer s obzirom na P^*, očekivana diskontirana cijena dionice u trenutku $t = 1$ treba biti baš S_0, tj. početna cijena dionice, koja iznosi 296.06 kn.

Diskontirane cijene financijskih instrumenata i cjelokupnog portfelja iznose:

- diskontirana cijena koju bi u $t = 0$ imao rizični i-ti ($i \in \{0, 1, ..., d\}$) financijski instrument, da je nerizičan, iznosi:

$$\widetilde{S}_t^i = \frac{1}{(1 + r')^t} S_t^i.$$

- diskontirana cijena portfelja φ_t, gdje je $\widetilde{V}_0(\varphi_0) = V_0(\varphi_0)$, iznosi:

$$\widetilde{V}_t(\varphi_t) = (\varphi_t, \widetilde{S}_t) = \sum_{i=0}^{d} \varphi_t^i \widetilde{S}_t^i.$$

Sada nam treba vrijediti:

$$S_0 = E^*\left[\frac{S_1}{(1 + r')^1}\right], tj. \qquad (1)$$

$$E^*[S_1] = (1 + r')S_0. \qquad (2)$$

Formula (2) nam govori da očekivana vrijednost u trenutku izvršenja $T = 1$, s obzirom na artificijelnu vjeroatnost P^*, jednaka je vrijednosti koju bismo imali da smo S_0 uložili nerizično, uz efektivnu kamatnu stopu r'.

Izračunajmo sada vrijednost p^* iz formule (1).

$$S_0 = \frac{1}{1.05}\Big(400p^* + 200(1-p^*)\Big) = 296.06$$

$$\Rightarrow p^* = 0.554315$$

$\star$ u slučaju ECO, $C_0^{call} = E^*\left[\dfrac{C_1^{call}}{1+r'}\right] = \dfrac{1}{1.05}\Big(0(1-p^*) + 100p^*\Big) = 52.79\ kn,$

$\star$ u slučaju EPO, $C_0^{put} = E^*\left[\dfrac{C_1^{put}}{1+r'}\right] = \dfrac{1}{1.05}\Big(100(1-p^*) + 0p^*\Big) = 42.45\ kn.$

S obzirom da su cijene nekog financijskog instrumenta najčešće međusobno zavisne, prilikom statističke analize nailazimo na razne probleme, pa nam trebaju neke veličine koje nisu međusobno zavisne. Stoga su znanstvenici pri izradi modela počeli koristiti priraste cijena, tj. povrate, jer ih često možemo opisivati slučajnim procesima s nezavisnim komponentama i određenim svojstvima stacionarnosti.

Definicija 2.9. **Povrat** je relativna promjena cijene financijske imovine u određenom vremenskom intervalu, često izražena kao postotak.

Dvije su vrste povrata koji se koriste u matematičkim modelima. To su:

1. **Relativni ili aritmetički povrat**

- Jednostavni (jednoperiodni) relativni povrat za i-ti financijski instrument u trenutku t je
$$R_t^i = \frac{S_t^i - S_{t-1}^i}{S_{t-1}^i} = \frac{S_t^i}{S_{t-1}^i} - 1, i \in \{0, 1, ..., d\}; t \in \{0, 1, ..., T\}.$$
Vrijednost $1 + R_t^i = \dfrac{S_t^i}{S_{t-1}^i}$ nazivamo **bruto povrat**.

- n - periodni relativni povrat za i-ti financijski instrument u trenutku t; $n \leq t$, je

$$R_t^i(n) = (1 + R_t^i) \cdot (1 + R_{t-1}^i) \cdot ... \cdot (1 + R_{t-n+1}^i) = \frac{S_t^i}{S_{t-n}^i} - 1,$$

$i \in \{0, 1, ..., d\}; t \in \{0, 1, ..., T\}$.

- Što se tiče cjelokupnog portfelja φ_t, njegov jednoperiodni relativni povrat u trenutku t jednak je sumi relativnih jednoperiodnih povrata financijskih instrumenata iz tog portfelja. Tj.

$$R_{V_t(\varphi_t)} = \sum_{k=0}^{d} \varphi_t^k R_t^k = \sum_{k=0}^{d} \varphi_t^k \left(\frac{S_t^k}{S_{t-1}^k} - 1 \right).$$

2. **Log-povrat** - definiran je kao prirodni logaritam bruto povrata.

- Jednoperiodni log-povrat za i-ti financijski instrument u trenutku t je

$$r_t^i = ln(1 + R_t^i), i \in \{0, 1, ..., d\}; t \in \{0, 1, ..., T\}.$$

- n - periodni log-povrat za i-ti financijski instrument u trenutku t je suma jednoperiodnih log-povrata, te je

$$r_t^i(n) = ln\Big(1 + R_t^i(n)\Big) = ln(1 + R_t^i) + ln(1 + R_{t-1}^i) + ... + ln(1 + R_{t-n+1}^i)$$

$$= r_t^i + r_{t-1}^i + ... + r_{t-n+1}^i.$$

- Log-povrat cjelokupnog portfelja jednak je prirodnom logaritmu sume, pa nemamo tako lijepi rezultat kao kod relativnih povrata.

$$r_{V_t(\varphi_t)} = ln(1 + R_{V_t(\varphi_t)}) = ln\left(1 + \sum_{k=0}^{d} \varphi^k R_t^k\right).$$

3 Modeli financijskog tržišta

Kako smo već naveli, cijene vrijednosnih papira u budućnosti nisu nam poznate, pa je ulaganje u vrijednosne papire rizično. Kako bi pokušali što bliže odrediti njihove cijene u budućnosti, znanstvenici postavljaju neke pretpostavke, te izračunavaju njihove vjerojatnosti na temelju cijena vrijednosnih papira u prošlosti i sadašnjosti. Tako nastaju matematički modeli. **Matematički model** je matematički okvir unutar kojega se oponaša realni problem i njegovo rješavanje.

Ukoliko nam je poznat matematički model, to znači da u okvirima tog modela poznajemo ponašanje i osobine promatranih fizičkih veličina.

Za potrebe izrade matematičkih modela, cijene vrijednosnih papira modelirane su slučajnim procesima, čije se vrijednosti mijenjaju kroz vrijeme. Funkcija koja opisuje realizaciju slučajnog procesa kroz vrijeme zove se trajektorija.

Definicija 3.1. **Trajektorija** slučajnog procesa je preslikavanje

$$t \longmapsto X(t, \omega)$$

za neki fiksni ω.

Kako bismo što bolje modelirali kretanje cijena, najprije moramo promatrati kvalitativno ponašanje vrijednosnih papira čije cijene pokušavamo modelirati (dosadašnje cijene, investitore, tvrtke,...).

Postoje jednostavniji i složeniji modeli. Jednostavniji su nekad prejednostavni i nisu dovoljno realni, odnosno točni. Dok složeniji modeli mogu biti realni, ali nekad i vrlo teški za korištenje. Iz tog razloga se, u gotovo svim područjima u kojima se koriste matematički modeli, istraživači susreću s problemom kako najbolje uravnotežiti model, da s jedne strane bude dovoljno jednostavan za korištenje, a s druge strane, da bude dovoljno realan.

3.1 Osnovne pretpostavke matematičkih modela na financijskom tržištu

Šest je osnovnih pretpostavki, a to su:

1. U trenutku $t = 0$ cijene osnovnih rizičnih financijskih instrumenata su poznate konstante, dok u trenutku $t > 0$ cijene modeliramo nenegativnim slučajnim varijablama.

2. Svi investitori na tržištu imaju jednak pristup svim informacijama, a te informacije ugrađene su u cijene financijskih instrumenata.

3. Trgovati se može bez transakcijskih troškova na financijskom tržištu.

4. Sva financijska imovina beskonačno je djeljiva, likvidna je (može se kupovati i prodavati u neograničenim količinama) i može se posuđivati bez troškova, tj. moguće je posjedovati negativan broj bilo koje financijske imovine (moguće je zadužiti se u dionicama).

5. Ulaganje i posuđivanje novca moguće je uz fiksnu kamatnu stopu.

6. Posjedovanjem financijske imovine ne ostvarujemo nikakav dodani prihod ili trošak.

Napomena 3.2. *Neke od ovih pretpostavki moguće je oslabiti, međutim, analiza modela tada postaje značajno složenija. Npr. postoje modeli koji:*

- *uključuju isplatu dividendi,*
- *uključuju transakcijske troškove,*
- *promjenu kamatnih stopa modeliraju slučajnim procesom,*
- *ograničavaju mogućnost zaduživanja u dionicama tzv. short selling.*

4 Modeli financijskog tržišta u diskretnom vremenu

Za izradu modela financijskog tržišta u diskretnom vremenu pretpostavit ćemo da trgujemo s $(d+1)$ financijskim instrumentom u trenucima $t \in \{0, 1, \ldots, T\}$. Od toga je jedan nerizični financijski instrument (novac), a $d \in \mathbb{N}$ je rizičnih (dionica).

Početna cijena nerizičnog financijskog instrumenta (u trenutku $t = 0$) je poznata i iznosi $S_0^0 > 0$. Cijenu u trenutku $t \in \{1, 2, \ldots, T\}$ možemo izračunati i ona iznosi $S_t^0 = S_0^0(1 + r')^t$, gdje je r' efektivna kamatna stopa.

Početne cijene rizičnih financijskih instrumenata također su poznate i iznose S_0^i, za $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$, a cijene u trenucima $t \in \{1, 2, \ldots, T\}$ modeliramo nenegativnim slučajnim varijablama S_t^i.

Ako promatramo cijene $(d+1)$ financijske imovine u jednom trenutku $t \in \{0, 1, \ldots, T\}$, dobijemo vektor cijena $S_t = (S_t^0, S_t^1, \ldots, S_t^d)$ s vrijednostima u $\mathbb{R}^{d+1}$.

Kako bismo mogli nastaviti s opisivanjem modela, prvo bismo trebali definirati neke osnovne pojmove.

Definicija 4.1. Familija $\{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ σ - algebri na skupu Ω zove se **filtracija** ako vrijedi da je $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Drugim riječima, $\forall n \in \mathbb{N}_0$ filtracija je svaka rastuća familija σ - algebri na Ω, koje su sve sadržane u σ - algebri $\mathcal{F}$ iz vjerojatnosnog prostora $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Pritom je σ - algebra $\mathcal{F}_n$ generirana slučajnim vektorom $(X_1, X_2, ..., X_n)$. Filtraciju interpretiramo kao rastući tok informacija o nekom slučajnom procesu.

Definicija 4.2. Slučajni proces $\varphi = (\varphi_t, t = 0, 1, \ldots, T) = ((\varphi_t^0, \varphi_t^1, \ldots, \varphi_t^d), t = 0, 1, \ldots, T)$ s vrijednostima u $\mathbb{R}^{d+1}$ je **predvidiv** u odnosu na filtraciju $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t : t = 0, 1, \ldots, T\}$ ako je $\forall t$ slučajni proces φ_t $\mathcal{F}_{t-1}$ izmjeriv $(\sigma(\varphi_t\} \subseteq \mathcal{F}_t)$, te ako je φ_0 $\mathcal{F}_0$ izmjeriv.

Definicija 4.3. Slučajni proces $\varphi = (\varphi_t, t = 0, 1, \ldots, T) = ((\varphi_t^0, \varphi_t^1, \ldots, \varphi_t^d), t = 0, 1, \ldots, T)$ s vrijednostima u $\mathbb{R}^{d+1}$ i izmjeriv u odnosu na filtraciju $\mathbb{F}$ zove se **dinamički portfelj** ili **strategija trgovanja**.

Definicija 4.4. Strategija trgovanja ili dinamički portfelj $\varphi = (\varphi_t, t = 0, 1, \ldots, T) = ((\varphi_t^0, \varphi_t^1, \ldots, \varphi_t^d), t = 0, 1, \ldots, T)$ je **samofinancirajuća** ako $\forall t \in \{0, 1, ..., T-1\}$ vrijedi

$$(\varphi_t, S_t) = \sum_{i=0}^{d} \varphi_t^i S_t^i = \sum_{i=0}^{d} \varphi_{t+1}^i S_t^i = (\varphi_{t+1}, S_t).$$

Definicija 4.5. Strategija trgovanja ili dinamički portfelj φ je **dopustiv** ako je φ samofinancirajući portfelj, te ako je $V_t(\varphi_t) \geq 0, \forall t \in \{0, 1, ..., T\}$.

Definicija 4.6. Dopustiv dinamički portfelj φ je **arbitraža** ako dodatno vrijedi da je $V_0(\varphi_0) = 0$, te $P(V_t(\varphi_t) > 0) > 0$.

Drugim riječima, arbitraža je portfelj koji ne košta ništa, a s pozitivnom vjerojatnošću donosi pozitivan profit, tj. nije izložen riziku gubitka.

Kako smo već naveli, diskontirane cijene financijskih instrumenata i cjelokupnog portfelja su:

- diskontirana cijena koju bi u $t = 0$ imao rizični i-ti ($i \in \{0, 1, ..., d\}$) financijski instrument, da je nerizičan, iznosi: $\widetilde{S}_t^i = \frac{1}{(1+r')^t} S_t^i$.

- diskontirana cijena portfelja φ_t, gdje je $\widetilde{V}_0(\varphi_0) = V_0(\varphi_0)$, iznosi:

$$\widetilde{V}_t(\varphi_t) = (\varphi_t, \widetilde{S}_t) = \sum_{i=0}^{d} \varphi_t^i \widetilde{S}_t^i.$$

Uvedimo sada pojmove adaptiranost i martingal u diskretnom vremenu.

Definicija 4.7. Za slučajni proces $(X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ kažemo da je **adaptiran** na filtraciju $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ ako je $\sigma(X_n) \subset \mathcal{F}_n, \forall n \in \mathbb{N}_0$, tj. ako je $\forall n \in \mathbb{N}_0$ X_t $\mathcal{F}_t$ - izmjeriva slučajna varijabla. Kažemo da je proces $\mathbb{F}$ - adaptiran.

Sada kada smo definirali filtraciju i adaptirani proces, možemo definirati i martingal u diskretnom vremenu.

Definicija 4.8. Slučajni proces $X = (X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ je martingal u diskretnom vremenu s obzirom na filtraciju $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ ako vrijedi:

1. $E[|X_n|] < \infty, \forall n \in \mathbb{N}_0$
2. X je adaptiran na filtraciju $\mathbb{F}$

3. $E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n, \forall n \in \mathbb{N}_0$.

Treće svojstvo martinagala u diskretnom vremenu nazivamo martingalno svojstvo.

Napomena 4.9. *Martingal u diskretnom vremenu ima konstantno očekivanje, tj.* $\forall n \in \mathbb{N}_0$ *vrijedi*

$$E[X_n] = E[E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]] = E[X_{n+1}].$$

Za nerizičnu financijsku imovinu uz efektivnu kamatnu stopu r' vrijedi martingalno svojstvo, tj. vrijedi: $E[\widetilde{S}^0_{t+1}|\mathcal{F}_t] = E[\widetilde{S}^0_t|\mathcal{F}_t] = \widetilde{S}^0_t$, što za rizičnu financijsku imovinu nije slučaj, tj. ne vrijedi: $E[\widetilde{S}^i_{t+1}|\mathcal{F}_t] = \widetilde{S}^i_t$. Iz tog razloga trebamo naći novu vjerojatnosnu mjeru P^*, s obzirom na koju je: $E^*[\widetilde{S}^i_{t+1}|\mathcal{F}_t] = \widetilde{S}^i_t$.

Definicija 4.10. Vjerojatnosna mjera P^* na izmjerivom prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ je **neutralna na rizik** ako za sve $i \in \{0, 1, ..., d\}$ i sve $t \in \{0, 1, ..., T-1\}$ vrijedi da je

$$E^*[\widetilde{S}^i_{t+1}|\mathcal{F}_t] = \widetilde{S}^i_t,$$

tj. ako je s obzirom na P^* slučajni proces diskontiranih cijena financijskih instrumenata

$$(\widetilde{S}_t, t = 0, 1, ..., T) = ((\widetilde{S}^0_t, \widetilde{S}^1_t, ..., \widetilde{S}^d_t), t = 0, 1, ..., T)$$

martingal u odnosu na filtraciju $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t = 0, 1, ..., T\}$, tj. vrijedi

$$E^*[\widetilde{S}_{t+1}|\mathcal{F}_t] = E^*[(\widetilde{S}^0_{t+1}, \widetilde{S}^1_{t+1}, ..., \widetilde{S}^d_{t+1})|\mathcal{F}_t] = (\widetilde{S}^0_t, \widetilde{S}^1_t, ..., \widetilde{S}^d_t) = \widetilde{S}_t.$$

Vjerojatnosna mjera P^* naziva se još i ekvivalentna martingalna mjera, jer se P i P^* podudaraju na skupovima vjerojatnosti nula, tj. vrijedi $P(A) = P^*(A)$ $\forall A \in \mathcal{F}$ takav da je $P(A) = 0$.

Teorem 4.11. *Ako postoji bar jedna vjerojatnost* P^* *na izmjerivom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F})$ *neutralna na rizik i ekvivalentna vjerojatnosti* P*, tada financijsko tržište u diskretnom vremenu ne dopušta arbitražu, tj. u okvirima tog modela financijskog tržišta nemoguće je konstruirati portfelj koji je arbitraža.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji barem jedna takva vjerojatnost P^*, u odnosu na koju je vektor diskontiranih cijena $(\widetilde{S}_t, t = 0, 1, ..., T)$ martingal. Trebamo pokazati da je nemoguće konstruirati arbitražu.

Pretpostavimo suprotno, tj. da je moguće konstruirati arbitražu $\varphi = (\varphi_t, t = 1, 2, ..., T) = ((\varphi_t^0, \varphi_t^1, ..., \varphi_t^d), t = 1, 2, ..., T)$.

Kako smo pretpostavili da je portfelj φ arbitraža, znamo da vrijedi $V_0(\varphi_0) = 0$, te vrijedi

$$\widetilde{V}_t(\varphi_t) = V_0(\varphi_0) + \sum_{k=1}^{t} \varphi_k^k \Delta \widetilde{S}_k,$$

gdje je $\Delta \widetilde{S}_k = \widetilde{S}_k - \widetilde{S}_{k-1}$. Također znamo i da je φ_k izmjeriv u odnosu na σ- algebru $\mathcal{F}_{k-1}$.

Sada znamo sljedeće:

- Vektor $(\Delta \widetilde{S}_t, t = 1, 2, ..., T)$ je vektor martingalnih razlika, pa je i sam martingal. Stoga ima konstantno očekivanje, tj. očekivanje mu je jednako 0.

- Vektor
$$\left(\widetilde{V}_t(\varphi_t), t = 0, 1, ..., T\right) = \left(\sum_{k=1}^{t} \varphi_k \Delta \widetilde{S}_k, t = 0, 1, ..., T\right)$$
je martingalna transformacija, pa je i sama martingal, te stoga ima i konstantno očekivanje, pa slijedi:
$$E^*[\widetilde{V}_t(\varphi_t)] = E^*[\widetilde{V}_0(\varphi_0)] = 0.$$

Ako je portfelj φ arbitraža, tada on mora biti dopustiv portfelj, tj. $\forall t \in \{0, 1, ..., T\}$ mora biti $\widetilde{V}_t(\varphi_t) \geq 0$.

Uočimo:

1. $\widetilde{V}_t(\varphi_t) \geq 0$
2. $E^*[\widetilde{V}_t(\varphi_t)] = 0$

Iz 1. i 2. slijedi da je $\widetilde{V}_t(\varphi_t) = 0$ gotovo sigurno, tj. $P^*(\widetilde{V}_t(\varphi_t) = 0) = 1$.

Specijalno, za $t = T$ je $P^*(\widetilde{V}_T(\varphi_T) = 0) = 1$, a to je u kontradikciji s našim zahtjevom da je $P^*(\widetilde{V}_T(\varphi_T) > 0) > 0$ iz definicije arbitraže.

Dakle, portfelj φ ne može biti arbitraža.

$\square$

Također vrijedi i obrat ovog teorema, tj. ako na financijskom tržištu u diskretnom vremenu ne postoji arbitraža, tada postoji barem jedna vjerojatnost P^* neutralna na rizik.

4.1 Jednoperiodni modeli financijskog tržišta u diskretnom vremenu

Sva teorija financijskih tržišta temelji se na modelu osnovnih financijskih instrumenata. Na financijskom tržištu u diskretnom vremenu, najjednostavniji takav model je onaj koji pretpostavlja da postoje samo dva datuma, početni i završni, tj. $t \in \{0, 1\}$. Kako je između ta dva datuma samo jedan period, takav model naziva se jednoperiodni model. S obzirom na pretpostavku o samo dva datuma i jednom periodu, možemo uočiti da se cijena financijskih instrumenata mijenja samo jednom. Iako su jednoperiodni modeli vrlo jednostavni, oni su korisni, ne samo u obrazovanju, nego i u izgradnji višeperiodnih modela.

Ovisno o namjeni jednoperiodnog modela, slučajnu varijablu S_1 možemo modelirati sa dvije, tri, ili više mogućih vrijednosti, uključujući i prebrojivo mnogo. Međutim, konačan broj vrijednosti je dovoljan da bi model bio primjenjiv.

4.1.1 Jednoperiodni binarni model financijskog tržišta

Opis financijske imovine

Jednoperiodni binarni model koristi dva financijska instrumenta, od kojih je jedan nerizičan, a drugi rizičan.

Kod nerizičnog financijskog instrumenta, cijena u trenutku $t = 0$ je nenegativna i poznata, te iznosi S_0^0, dok ju u trenutku $t = 1$ možemo izračunati pomoću formule

$$S_1^0 = S_0^0(1 + r'),$$

gdje je r' efektivna kamatna stopa.

Što se tiče rizičnog financijskog instrumenta, njegova cijena u trenutku $t = 0$ također je nenegativna i poznata, te iznosi S_0^1, dok nam u trenutku $t = 1$ ona nije poznata, te ju ne možemo izračunati kao kod nerizičnog financijskog instrumenta. Iz tog razloga uvodimo slučajnu varijablu pomoću koje možemo modelirati vrijednost rizičnog financijskog instrumenta u trenutku $t = 1$. Dobivamo da je

$$S_1^1 = S_0^1(1 + X_1),$$

gdje je X_1 slučajna varijabla kojom modeliramo relativni povrat u trenutku $t = 1$, tj.

$$X_1 = \frac{S_1^1 - S_0^1}{S_0^1}.$$

Relativni povrat X_1 modeliramo Bernoullijevom slučajnom varijablom. Ovisno o namjeni jednoperiodnog modela, možemo ju modelirati tako da uzima dva moguća elementarna događaja (dvije moguće cijene financijskog instrumenta), 3, 4, ili više. Pretpostavimo da imamo samo dva moguća elementarna događaja, tj. $\Omega = \{a, b\}$. Tada tablica distribucije slučajne varijable X_1 izgleda ovako:

$$X_1 \sim \begin{pmatrix} a & b \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \qquad p \in \langle 0, 1 \rangle,$$

te pritom vrijedi $-1 < a < b$; $a, b \in \mathbb{R}$.

Kako smo modelirali slučajnu varijablu X_1, sada možemo modelirati cijenu rizičnog financijskog instrumenta u trenutku $t = 1$.

- Ukoliko se slučajna varijabla X_1 realizirala elementarnim događajem $a \in \Omega$, tada s vjerojatnošću $1 - p$ cijena rizične financijske imovine u trenutku $t = 1$ iznosi:

$$S_1^1 = S_0^1(1 + a).$$

- Ukoliko se slučajna varijabla X_1 realizirala elementarnim događajem $b \in \Omega$, tada s vjerojatnošću p cijena rizične financijske imovine u trenutku $t = 1$ iznosi:

$$S_1^1 = S_0^1(1 + b).$$

Na taj način definirali smo slučajnu varijablu cijene rizičnog financijskog instrumenta u trenutku $t = 1$. Tablica distribucije te slučajne varijable izgleda ovako:

$$S_1^1 \sim \begin{pmatrix} S_0^1(1+a) & S_0^1(1+b) \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \qquad p \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Vjerojatnosni prostor na kojemu "živi" ova slučajna varijabla je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdje je

- prostor elementarnih događaja $\Omega = \{a, b\}$;
- σ - algebra $\mathcal{F}$ jednaka je partitivnom skupu od skupa Ω, tj. $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$;
- vjerojatnost $P : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1]$, takva da je $P(a) = 1 - p; P(b) = p$.

Portfelj

Sada možemo konstruirati portfelj na financijskom tržištu sa zadanim pretpostavkama. Portfelj je vektor $\varphi_t = (\varphi_t^0, \varphi_t^1)$ s vrijednostima u $\mathbb{R}^2$, gdje je $t \in \{0, 1\}$. Vrijednost tog portfelja je nenegativna, te iznosi:

- u trenutku $t = 0$ ... $V_0(\varphi_0) = \varphi_0^0 S_0^0 + \varphi_0^1 S_0^1$
- u trenutku $t = 1$ ... $V_1(\varphi_1) = \varphi_1^0 S_1^0 + \varphi_1^1 S_1^1$.

S obzirom da je $S_1^1 = S_0^1(1 + X_1)$, vidimo da je slučajna varijabla $V_1(\varphi_1)$ transformacija slučajne varijable X_1.

Već smo rekli da je arbitraža portfelj koji u trenutku $t = 0$ ne košta ništa, tj. $V_0(\varphi_0) = 0$, ne donosi gubitak, tj. $V_1(\varphi_1) > 0$, te s pozitivnom vjerojatnošću donosi zaradu, tj. $P(V_1(\varphi_1) > 0) > 0$.

Lema 4.12. *Ako ne vrijedi $a < r' < b$, u jednoperiodnom binarnom modelu postoji mogućnost arbitraže.*

Dokaz. Pretpostavimo da ne vrijedi $a < r' < b$.

1. slučaj:

Pretpostavimo da vrijedi $r' \leq a < b$.

U trenutku $t = 0$ posudimo iznos S_0^1 iz banke, uz efektivnu kamatnu stopu r' te tim novcem kupimo jednu dionicu. Pritom smo formirali portfelj $(-S_0^1, 1)$.

U trenutku $t = 1$ prodamo dionicu i dobijemo ili $S_0^1(1 + a)$ ili $S_0^1(1 + b)$. U svakom slučaju je dug banci $S_0^1(1 + r') \leq S_0^1\Big(1 + X_1(\omega)\Big)$.

Vratimo dug i generiramo zaradu od $S_1^1 - S_0^1(1 + r')$ koja s vjerojatnošću $1 - p$ iznosi $S_0^1(a - r') \geq 0$, dok s vjerojatnošću p iznosi $S_0^1(b - r') > 0$.

Primjetimo da u oba slučaja postoji arbitraža.

2. slučaj:

Pretpostavimo da vrijedi $a < b \leq r'$.

U trenutku $t = 0$ posudimo dionicu koja vrijedi S_0^1, te ju prodamo, a dobiveni novac u iznosu od S_0^1 uložimo nerizično u banku, uz efektivnu kamatnu stopu r'.

U trenutku $t = 1$ dužni smo jednu dinicu, čija vrijednost s vjerojatnošću $1 - p$ iznosi $S_1^1 = S_0^1(1 + a)$, dok s vjerojatnošću p iznosi $S_1^1 = S_0^1(1 + b)$. Sada iz banke podignemo $S_0^1(1 + r')$, što je u svakom slučaju više od $S_0^1\Big(1 + X_1(\omega)\Big)$ i vratimo S_1^1 duga.

Generiramo zaradu u iznosu od $S_0^1(1+r') - S_1^1$. S vjerojatnošću $1-p$ to je jednako $S_0^1(r'-a) > 0$, dok je s vjerojatnošću p to jednako $S_0^1(r'-b) \geq 0$.

Primjetimo da i u ovom slučaju također postoji arbitraža.

Slijedi da je za nepostojanje arbitraže nužno da vrijedi $a < r' < b$.

$\square$

Pretpostavimo da nema arbitraže na financijskom tržištu, tj. neka je r' efektivna kamatna stopa takva da vrijedi $-1 < a < r' < b$, za $a, b \in \mathbb{R}$. S obzirom da ne postoji arbitraža, po obratu teorema 4.11. slijedi da postoji barem jedna vjerojatnosna mjera $P^* : \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$ koja je neutralna na rizik, tj. s obzirom na koju vrijedi:

$$S_0^i = E^*\left[\frac{S_1^i}{1+r'}\right]; \qquad i \in \{0,1\}.$$

Prisjetimo se vrijednosti rizične financijske imovine u trenutku $t=1$:

$$S_1^1 = S_0^1(1+X_1),$$

pri čemu je X_1 Bernoullijeva slučajna varijabla, čija je tablica distribucije:

$$X_1 \sim \begin{pmatrix} a & b \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \qquad p \in \langle 0,1 \rangle.$$

S obzirom da smo zaključili da postoji vjerojatnost P^* neutralna na rizik, definirajmo sada artificijelnu distribuciju slučajne varijable X_1:

$$X_1 \sim \begin{pmatrix} a & b \\ 1-p^* & p^* \end{pmatrix}, \qquad p^* \in \langle 0,1 \rangle.$$

Odredimo sada vrijednost vjerojatnosti p^* iz ove distribucije:

$$S_0^1 = E^*\left[\frac{S_1^1}{1+r'}\right] = \frac{1}{1+r'}E^*[S_1^1] = \frac{1}{1+r'}E^*[S_0^1(1+X_1)] =$$

$$= \frac{1}{1+r'}\Big(S_0^1(1+a)(1-p^*) + S_0^1(1+b)p^*\Big),$$

odakle slijedi da je

$$1 + r' = (1 + a)(1 - p^*) + (1 + b)p^* =$$

$$= 1 - p^* + a - ap^* + p^* + bp^*,$$

pa je

$$r' - a = p^*(b - a),$$

odnosno slijedi da je

$$P^*\{b\} = p^* = \frac{r' - a}{b - a}; \qquad P^*\{a\} = 1 - p^* = \frac{b - r'}{b - a}.$$

Matematički modeli financijskog tržišta su modeli čija je svrha, između ostalog, što je moguće više smanjiti rizik pri kupovini neke financijske imovine. Kao što smo naveli, opcije također imaju svrhu smanjiti rizik. Iz tog razloga uvedimo na jednoperiodnom binarnom tržištu i pojam slučajnog zahtjeva. Najjednostavniji primjer slučajnog zahtjeva su europska call i europska put opcija:

Prisjetimo se da europska call opcija svom vlasniku u trenutku dospijeća $T = 1$, s cijenom izvršenja K, vrijedi:

$$\max(0, S_1 - K) = (S_1 - K)_+,$$

dok europska put opcija s istim uvjetima izvršenja svom vlasniku vrijedi:

$$\max(0, K - S_1) = (K - S_1)_+.$$

Generalno, slučajni zahtjev definiramo na sljedeći način:

Definicija 4.13. Slučajni zahtjev na financijskom tržištu je proizvoljna slučajna varijabla C_1 na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. **Izvedenica** je slučajni zahtjev koji je za neku Borelovu funkciju $h : \mathbb{R}^{d+1} \longrightarrow [0, \infty\rangle$ definiran kao slučajna varijabla $C_1 = h(S_1)$, gdje je $S_1 = (S_1^0, S_1^1, ..., S_1^d)$ vektor vrijednosti nerizične i rizičnih financijskih instrumenata.

Vrijednost europske call opcije u trenutku $t = 1$ na binarnom financijskom tržištu je slučajna varijabla

$$C_1 = (S_1 - K)_+ = h(S_1) : \{a, b\} \longrightarrow \mathbb{R},$$

no umjesto te varijable, u nastavku ćemo promatrati proizvoljan slučajni zahtjev. Cilj nam je odrediti nearbitražnu cijenu takvog slučajnog zahtjeva.

Teorem 4.14. *Pretpostavimo da u jednoperiodnom binarnom modelu vrijedi $a < r' < b$ (model koji ne dopušta arbitražu). Tada za proizvoljan slučajni zahtjev C_1 postoji jedinstven portfelj koji ga replicira, a jedina nearbitražna cijena ovog zahtjeva je:*

$$\frac{1}{1+r'}\left(C_1(a)\frac{b-r'}{b-a} + C_1(b)\frac{r'-a}{b-a}\right) = \frac{1}{1+r'}\big(C_1(a)(1-p^*) + C_1(b)p^*\big)$$

Dokaz. Pokažimo da za slučajni zahtjev C_1 postoji portfelj φ koji ga replicira. Kako je $C_1 : \{a,b\} \longrightarrow \mathbb{R}$, replicirajući portfelj φ mora zadovoljavati sustav lineranih jednadžbi

$$\varphi^0(1+r') + \varphi^1 S_0^1(1+a) = C_1(a)$$

$$\varphi^0(1+r') + \varphi^1 S_0^1(1+b) = C_1(b).$$

Kako je $r' > -1$, te $a < b$, ovaj sustav ima jedinstveno riješenje:

$$\varphi^1 = \frac{C_1(b) - C_1(a)}{S_0(b-a)},$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{1+r'} \cdot \frac{C_1(a)(1+b) - C_1(b)(1+a)}{b-a}.$$

Vrijednost ovog portfelja u trenutku $t = 0$ je:

$$V_0(\varphi) = \frac{1}{1+r'}\left(\frac{C_1(a)(b-r') + C_1(b)(r'-a)}{b-a}\right).$$

Ovako određena cijena ne dopušta arbitražu. Trebamo pokazati da je $V_0(\varphi)$ jedina nearbitražna cijena za C_1.

i) Ako netko ponudi više od V_0 za C_1, npr. $V' > V_0$, tada:

- u trenutku $t = 0$

  - prodamo opciju za iznos V',
  - za V_0 oformimo portfelj φ,
  - ostatak $(V' - V_0)$ uložimo u banku.

- u trenutku $t = 1$

  - isplatimo vlasnika slučajnog zahtjeva C_1,
  - ostane nam ulog $(V' - V_0)\dfrac{1}{1 + r'}$.

ii) Ako netko prodaje C_1 za $V' < V_0$, tada:

- u trenutku $t = 0$

  - kupimo opciju za V',
  - konstruiramo portfelj $(-\varphi^0, -\varphi^1)$ i zaradimo $V_0 > V'$
  - uložimo $(V_0 - V')$ u banku.

- u trenutku $t = 1$

  - dobijemo C_1 koji vrijedi upravo koliko i portfelj kojega dugujemo,
  - ostane nam novac u banci.

□

4.2 Višeperiodni modeli financijskog tržišta u diskretnom vremenu

Višeperiodni model direktna je nadogradnja jednoperiodnog modela financijskog tržišta. U jednoperiodnom modelu, promatrano razdoblje imalo je dvije točke (trenutke), početnu i završnu, te smo imali jedan period između tih trenutaka. U višeperiodnom modelu to promatrano vremensko razdoblje podijeliti ćemo na više perioda (T), te ćemo ujedno imati $T + 1$ vremenskih trenutaka. U tom slučaju financijskom imovinom trži se u trenucima $t = 0, 1, ..., T$.

4.2.1 Cox-Ross-Rubinsteinov (CRR) model financijskog tržišta

Opis financijske imovine

Cox-Ross-Rubinsteinov model je višeperiodni model financijskog tržišta u diskretnom vremenu. U ovom modelu trgujemo s dva financijska instrumenta, jednim nerizičnim (novac), te jednim rizičnim (dionica), u trenucima $t \in \{0, 1, ..., T\}$, te pritom vrijede ove cijene:

Kod nerizičnog financijskog instrumenta, cijena u trenutku $t = 0$ je nenegativna i poznata, te iznosi S_0^0, dok ju u trenutku $t \in \{1, 2, ..., T\}$ možemo izračunati pomoću formule

$$S_t^0 = S_0^0(1 + r')^t,$$

gdje je r' efektivna kamatna stopa.

Što se tiče rizičnog financijskog instrumenta, njegova cijena u trenutku $t = 0$ također je nenegativna i poznata, te iznosi S_0^1, dok nam u trenucima $t \in \{1, 2, ..., T\}$ ona nije poznata, te ju ne možemo izračunati kao kod nerizičnog financijskog instrumenta. Iz tog razloga uvodimo slučajne varijable pomoću kojih možemo modelirati vrijednost rizičnog financijskog instrumenta u trenucima $t \in \{1, 2, ..., T\}$. Po uzoru na binarni model financijskog tržišta stavljamo da je

$$\begin{aligned} S_t^1 &= S_{t-1}^1(1 + X_t) = S_{t-2}^1(1 + X_{t-1})(1 + X_t) = \\ &= ... = S_0^1 \prod_{k=1}^{t}(1 + X_k), \end{aligned}$$

gdje je X_t slučajna varijabla kojom modeliramo relativni povrat u trenutku t, tj.

$$X_t = \frac{S_t^1 - S_{t-1}^1}{S_{t-1}^1}.$$

Relativni povrat X_t modeliramo Bernoullijevom slučajnom varijablom. Ovisno o namjeni višeperiodnog modela, slučajnu varijablu S_t, kao i kod jednoperiodnog binarnog modela, možemo modelirati sa dvije, tri, ili više mogućih vrijednosti, uključujući i prebrojivo mnogo. Međutim, konačan broj vrijednosti je dovoljan da bi model bio primjenjiv.

Pretpostavimo da imamo samo dva moguća elementarna događaja, tj. $\Omega = \{a, b\}$. Tada tablica distribucije slučajne varijable X_t izgleda ovako:

$$X_t \sim \begin{pmatrix} a & b \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \qquad p \in \langle 0, 1 \rangle,$$

te pritom vrijedi $-1 < a < b$; $a, b \in \mathbb{R}$.

Vjerojatnosni prostor CRR - modela financijskog tržišta u diskretnom vremenu je produktni vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdje je:

- **Skup $\boldsymbol{\Omega}$** $= \{a, b\} \times \{a, b\} \times ... \times \{a, b\} = \{a, b\}^T$ je skup elementarnih događaja, tj. skup svih mogućih ishoda. Pritom su elementarni događaji uređene T-torke $(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_T)$, gdje je $\forall t \in \{1, 2, ..., T\}$, $\omega_t = a$ ili $\omega_t = b$.

- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\boldsymbol{\Omega})$ je σ-algebra koja sadrži informacije na tržištu u trenutku $t \in \{0, 1, ..., T\}$.
- **Vjerojatnost** $P : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1]$ svakom elementarnom događaju $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_T)$ pridružuje vjerojatnost

$$P\{\omega\} = P'\{\omega_1\} \cdot P'\{\omega_2\} \cdot ... \cdot P'\{\omega_T\} = \prod_{k=1}^{T} P'\{\omega_k\},$$

gdje je $P' : \mathcal{P}\{a, b\} \longrightarrow [0, 1]$ vjerojatnost takva da je

$$P\{a\} = 1 - p, \qquad P\{b\} = p, \qquad p \in \langle 0, 1 \rangle.$$

5 Potpunost modela financijskog tržišta u diskretnom vremenu

Definicija 5.1. Slučajni zahtjev na financijskom tržištu je proizvoljna slučajna varijabla C na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. **Izvedenica** je slučajni zahtjev koji je za neku Borelovu funkciju $h : \mathbb{R}^{d+1} \longrightarrow [0, \infty\rangle$ definiran kao slučajna varijabla $C = h(S_1)$, gdje je $S_1 = (S_1^0, S_1^1, ..., S_1^d)$ vektor vrijednosti nerizične i rizičnih financijskih imovina.

Definicija 5.2. Slučajni zahtjev C je **dostižan** ako postoji dopustiva strategija φ takva da je $V_T(\varphi) = C$. Kažemo da strategija φ replicira slučajni zahtjev C.

Uvedimo sada oznaku $\beta_t := \frac{1}{S_t^0}$. Koeficijent β_t interpretiramo kao diskontni faktor od vremena t, do vremena 0: ako u trenutku $t = 0$ uložimo u banku β_t kuna, u trenutku t imat ćemo točno 1 kunu.

Napomena 5.3. *Pretpostavimo da tržište ne dopušta arbitražu. Ako je C slučajni zahtjev takav da je $V_T(\varphi) = C$ za neku samofinancirajuću strategiju, tada je C dostižan slučajni zahtjev. Dovoljno je provjeriti da je u tom slučaju φ dopustiva strategija, tj. $V_T(\varphi) \geq 0$, $t = 0, 1, ..., T$. Taj uvjet ekvivalentan je uvjetu $\widetilde{V}_t(\varphi) \geq 0$, $t = 0, 1, ..., T$. Neka je P^* ekvivalentna martingalna mjera. Tada je $\left(\widetilde{V}_t(\varphi), 0 \leq t \leq T\right)$ P^*-martingal, pa je:*

$$\widetilde{V}_t(\varphi) = E^*[\widetilde{V}_t(\varphi) \mid \mathcal{F}_t] = E^*[\beta_T C \mid \mathcal{F}_t] \geq 0,$$

zbog $\beta_T > 0$ i $C \geq 0$.

Dostižni zahtjevi mogu se karakterizirati i algebarski kao zahtjevi C, za koje sustav linearnih jednadžbi

$$M_S\varphi = \begin{pmatrix} S_1^0(\omega_1) & ... & S_1^d(\omega_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1^0(\omega_k) & \cdots & S_1^d(\omega_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^0 \\ \vdots \\ \varphi^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1(\omega_1) \\ \vdots \\ C_1(\omega_k) \end{pmatrix} \tag{3}$$

ima bar jedno rješenje.

Definicija 5.4. Model tržišta bez arbitraže je **potpun** ako je na njemu svaki slučajni zahtjev dostižan.

Osnovni zahtjev o potpunosti tržišta je sljedeći:

Teorem 5.5. *Model tržišta bez arbitraže je potpun ako i samo ako postoji jedinstvena ekvivalentna martingalna mjera (vjerojatnost neutralna na rizik).*

Dokaz. Pretpostavimo da je model tržišta bez arbitraže potpun.
Neka je C proizvoljan slučajni zahtjev. Po pretpostavci postoji dopustiva strategija φ koja replicira slučajni zahtjev C, $C = V_T(\varphi)$. Specijalno vrijedi:

$$\beta_T C = \widetilde{V}_T(\varphi) + \sum_{j=1}^{T} \varphi_j \cdot \Delta \widetilde{S}_j,$$

pri čemu je $\Delta \widetilde{S}_t = \widetilde{S}_t - \widetilde{S}_{t-1}$.

Pretpostavimo da su P_1 i P_2 dvije ekvivalentne martingalne mjere. Tada je proces $(\widetilde{V}_T(\varphi), 0 \leq t \leq T)$ martingal u odnosu na P_1 i P_2. Specijalno, to znači da je:

$$E_1[\widetilde{V}_T(\varphi)] = E_1[V_0(\varphi)] = V_0(\varphi),$$

$$E_2[\widetilde{V}_T(\varphi)] = E_2[V_0(\varphi)] = V_0(\varphi).$$

Iz toga vidimo da je

$$E_1[\widetilde{V}_T(\varphi)] = E_2[\widetilde{V}_T(\varphi)], \;\; \textit{odnosno da je} \quad E_1[\beta_T C] = E_2[\beta_T C].$$

Budući da je $\beta_T = \dfrac{1}{(1+r')^T}$ deterministički, dobivamo

$$E_1[C] = E_2[C].$$

Ta jednakost vrijedi za svaku nenegativnu $\mathcal{F}_T$-izmjerivu slučajnu varijablu C. Budući da je po pretpostavci $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$, slijedi da je $P_1 = P_2$.

Dokažimo obrat. Pretpostavimo sada da je tržište bez arbitraže, ali nepotpuno. To znači da postoji slučajni zahtjev C koji nije dostižan. Definirajmo:

$$\widetilde{\nu} := \Big\{ U_0 + \sum_{t=1}^{T} \varphi_t \cdot \Delta \widetilde{S}_t : U_0 \; je \; \mathcal{F}_0 \; izmjeriva,$$

$$\Big((\varphi_t^1, \varphi_t^2, ..., \varphi_t^d) : 1 \leq t \leq T \Big) \; predvidiv \; proces \Big\}.$$

Uočimo da za dani d-dimenzionalni predvidiv proces $\Big((\varphi_t^1, \varphi_t^2, ..., \varphi_t^d) : 1 \leq t \leq T\Big)$ postoji predvidiv proces $(\varphi_t^t : 1 \leq t \leq T)$ takav da je strategija $\varphi = ((\varphi_t^1, \varphi_t^2, ..., \varphi_t^d) : 1 \leq t \leq T)$ samofinancirajuća.

Zbog $\Delta \widetilde{S}_t^0 = 0$, te budući da je U_0 konstanta, a $\mathcal{F}_0$ je trivijalna, slijedi da je:

$$\widetilde{\nu} = \Big\{\widetilde{V}_T(\varphi) : \varphi \ samofinancirajuća\Big\}.$$

Budući da po pretpostavci C nije dostižan zahtjev, zbog Napomene 5.3., ne može se dostići niti samofinancirajućom strategijom. Slijedi da $\dfrac{C}{S_T^0} \notin \widetilde{\nu}$. To znači da je $\widetilde{\nu}$ pravi podskup skupa svih slučajnih varijabli. $\widetilde{\nu}$ je vektorski podprostor.

Neka je P^* neka ekvivalentna martingalna mjera. Na prostoru svih slučajnih varijabli definiramo skalarni produkt

$$(X, Y) := E^*[XY], \qquad X, Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Budući da $\widetilde{\nu}$ pravi podprostor, postoji slučajna varijabla $X \neq 0$ ortogonalna na $\widetilde{\nu}$. Definiramo:

$$P^{**}\{\omega\} := \left(1 + \frac{X(\omega)}{2\|X\|_\infty}\right) P^*\{\omega\},$$

gdje je $\|X\|_\infty = sup_{\omega \in \Omega} |X(\omega)|$. Uočimo da je $1 \in \widetilde{\nu}$ $(U_0 = 1, \varphi \equiv 0)$, pa je $X \perp 1$, tj.

$$0 = E^*[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P^*\{\omega\}.$$

Slijedi:

$$\sum_{\omega \in \Omega} P^{**}\{\omega\} = \sum_{\omega \in \Omega} P^*\{\omega\} + \frac{1}{2\|X\|_\infty} \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P^*\{\omega\} = 1.$$

Očito je $1 + \dfrac{X(\omega)}{2\|X\|_\infty} > 0$, pa je $P^{**}\{\omega\} > 0$ za sve $\omega \in \Omega$. Dakle, P^{**} je vjerojatnost ekvivalentna s P^* i $P^{**} \neq P^*$ (zbog $X \neq 0$).

Neka je $\varphi = \Big((\varphi_t^1, \varphi_t^2, ..., \varphi_t^d) : 1 \leq t \leq T\Big)$ predvidiv proces. Računamo

$$E^{**}\left[\sum_{t=1}^T \varphi_t \cdot \Delta \widetilde{S}_t\right] =$$

$$= E^*\left[\sum_{t=1}^T \varphi_t \cdot \Delta \widetilde{S}_t\right] + \frac{1}{2\|X\|_\infty} E^*\left[X \sum_{t=1}^T \varphi_t \cdot \Delta \widetilde{S}_t\right] = 0.$$

Prvi sumand je nula, jer je $(\widetilde{S}_t)$ P^*-martingal, a drugi je nula, jer je $X \perp \widetilde{\nu}$. $\Rightarrow$ $(\widetilde{S}_t : 0 \leq t \leq T)$ martngal u odnosu na P^{**}. Dakle, P^{**} je martingalna mjera. Budući da je različita od P^*, martingalna mjera nije jedinstvena.

□

Pretpostavimo sada da na tržištu ne postoji arbitraža, te da je ono potpuno. Neka je P^* jedinstvena ekvivalentna martingalna mjera. Sada nam je cilj odrediti cijenu proizvoljnog slučajnog zahtjeva C.

Neka je $C \geq 0$ proizvoljna $\mathcal{F}_T$-izmjeriva slučajna varijabla, te neka je φ dopustiva strategija koja replicira C, tj. $V_T(\varphi) = C$. Tada je niz $\left(\widetilde{V}_t(\varphi) : 0 \leq t \leq T\right)$ P^*-martingal, pa je

$$V_0(\varphi) = E^*[\widetilde{V}_T(\varphi)] = E^*\left[\frac{C}{S_T^0}\right].$$

Općenitije,

$$\widetilde{V}_T(\varphi) = E^*[\widetilde{V}_T(\varphi)|\mathcal{F}_t] = E^*\left[\frac{C}{S_T^0}\Big|\mathcal{F}_t\right], t = 0, 1, ..., T,$$

otkud slijedi da je

$$V_t(\varphi) = S_t^0 E^*\left[\frac{C}{S_T^0}\Big|\mathcal{F}_t\right], t = 0, 1, ..., T.$$

U trenutku t vrijednost $V_t(\varphi)$ dopustive strategije φ koja replicira C potpuno je određena s C.

S obzirom da je $V_t(\varphi)$ bogatstvo koje nam je u trenutku t potrebno za repliciranje slučajnog zahtjeva C, slijedeći strategiju φ prirodno je reći da je $V_t(\varphi)$ cijena slučajnog zahtjeva u trenutku t. Specijalno, u trenutku $t = 0$,

$$C_0 = V_0(\varphi) = E^*\left[\frac{C}{S_T^0}\right].$$

Definicija 5.6. Ako je tržište bez arbitraže potpuno, za svaki slučajni zahtjev C postoji dopustiva samofinancirajuća strategija φ koja ga replicira (hedging strategija, tj. strategija potpune zaštite).

5.1 Potpunost jednoperiodnog modela financijskog tržišta u diskretnom vremenu

Teorem 5.7. *Jednoperiodni model financijskog tržišta je potpun ako i samo ako je $d+1 \geq k$ i matrica M_S u (3) ima rang k.*

Dokaz. Kako potpunost znači da je slika operatora pridruženog matrici $M_S : \mathbb{R}^{d+1} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ cijeli $\mathbb{R}^k$, tvrdnja slijedi iz teorije rješavanja sustava linearnih jednadžbi.

□

Uvjeti iz definicije vjerojatnosne mjere neutralne na rizik (definicija 4.10.) također se mogu napisati matrično kao:

$$M_S^T P^* = M_S^T \begin{pmatrix} P^*(\omega_1) \\ \vdots \\ P^*(\omega_k) \end{pmatrix} = (1+r') \begin{pmatrix} S_0^0 \\ \vdots \\ S_0^d \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Ovaj zapis poslužit će nam kao osnova za dokaz slijedećeg teorema:

Teorem 5.8. *Jednoperiodni model financijskog tržišta bez arbitraže je potpun ako i samo ako je $|\mathcal{P}|= 1$. Pritom je skup $\mathcal{P}$ skup svih vjerojatnosnih mjera neutralnih na rizik.*

Dokaz. Trebamo pokazati da je model potpun ako i samo ako postoji jedinstvena ekvivalentna martingalna mjera. Zaista, ako je model potpun, a P^* i P^{**} su dvije različite ekvivalentne martingalne mjere, pa prema (4) slijedi

$$M_S^T(P^* - P^{**}) = 0,$$

pa matrica M_S ne može biti potpunog ranga.

Obrnuto, ako je P^* jedinstveni element iz $\mathcal{P}$, a M_S nije punog ranga, tada postoji neki vektor $Q = (Q_1, Q_2, ..., Q_k) \in \mathbb{R}^k$ različit od nul-vektora, takav da

$$M_S^T Q = 0,$$

gdje 0 na desnoj strani označava nul-vektor u prostoru $\mathbb{R}^{d+1}$. No prvi redak matrice M_S^T je prema (3) $(1+r', ..., 1+r')$, pa specijalno vrijedi

$$(1+r')\sum_{i=0}^{k} Q_i = 0.$$

Sada za dovoljno mali $\varepsilon > 0$, kako su $P(\omega_i) > 0$ za sve $i = 1, 2, ..., k$, k-dimenzionalni vektor

$$P^{**} = P^* + \varepsilon Q$$

definira vjerojatnosnu mjeru različitu od P^*. No i za tu vjerojatnosnu mjeru je također

$$M_S^T P^{**} = M_S^T P^* = (1+r') \begin{pmatrix} S_0^0 \\ \vdots \\ S_0^d \end{pmatrix}$$

pa je P^{**} neutralna na rizik, što je kontradikcija, pa slijedi da je $|\mathcal{P}| = 1$.

□

5.2 Potpunost višeperiodnog modela financijskog tržišta u diskretnom vremenu

Propozicija 5.9.

(a) CRR model ne dopušta arbitražu ako i samo ako je $a < r' < b$.

(b) Ako je $a < r' < b$, tada je CRR model potpun.

Za dokaz ove propozicije potrebna nam je slijedeća lema:

Lema 5.10. *Neka je P^* vjerojatnost na $(\Omega, \mathcal{F})$ ekvivalentna s P.*

(a) Niz diskontiranih cijena $(\widetilde{S}_t : t = 0, 1, ..., T)$ je P^*-martingal ako i samo ako vrijedi

$$E^*[X_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] = r', \qquad t = 1, 2, ..., T.$$

(b) Neka je zadovoljen uvjet (a). Tada vrijedi $a < r' < b$ i slučajne varijable $X_1, X_2, ..., X_T$ su nezavisne i jednako distribuirane (u odnosu na P^*).

Dokažimo sada propoziciju 5.9.

Dokaz.

(a) Pokažimo da uz uvjet $a < r' < b$, postoji bar jedna ekvivalentna mjera neutralna na rizik. Postavimo:

$$p^* = \frac{r' - a}{b - a} \quad i$$

$$P^*\{b\} = 1 - P^*\{a\} = p^*, \; te$$

$$P^*\{\omega\} = P^*\{\omega_1\} P^*\{\omega_2\} ... P^*\{\omega_T\}$$

za $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_T)$.

Sada su ponovno slučajne varijable X_i nezavisne i jednako distribuirane, te imaju distribuciju zadanu tablicom:

$$X_i \sim \begin{pmatrix} a & b \\ 1-p^* & p^* \end{pmatrix}, \qquad p^* \in \langle 0,1 \rangle,$$

Zbog nezavisnosti je

$$E^*[X_t|\mathcal{F}_{t-1}] = E^*[X_t] = r',$$

pa je

$$\widetilde{S}_t^1 = \frac{1}{(1+r')^t} S_0^1 \cdot (1+X_1) \cdot \ldots \cdot (1+X_t)$$

i vrijedi

$$E^*[\widetilde{S}_{t+1}^1|\mathcal{F}_t] = E^*\left[\widetilde{S}_t^1 \cdot \frac{(1+X_{t+1})}{(1+r')}\Big|\mathcal{F}_t\right] = \widetilde{S}_t^1.$$

$\Rightarrow \widetilde{S}_t$ je martingal u odnosu na P^*.

(b) Neka su P^* i P^{**} dvije ekvivalentne martingalne mjere. Po lemi 5.10., slučajne varijable $X_1, X_2, ..., X_T$ su tada nezavisne i jednako distribuirane, te vrijedi:

$$P^*(X_t = a) = 1 - p^* = P^{**}(X_t = a), \qquad P^*(X_t = b) = p^* = P^{**}(X_t = b).$$

Zbog

$$P^*\{(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_T)\} = P^*(X_1 = \omega_1, ..., X_T = \omega_T) = P^*(X_1 = \omega_1) \cdot \ldots \cdot (X_T = \omega_T),$$

i slično

$$P^{**}\{(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_T)\} = P^{**}(X_1 = \omega_1, ..., X_T = \omega_T) = P^{**}(X_1 = \omega_1) \cdot \ldots \cdot (X_T = \omega_T),$$

slijedi

$$P^*\{(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_T)\} = P^{**}\{(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_T)\}$$

za sve $(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_T) \in \Omega$ (ovdje su $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_T \in \{a, b\}$). Zato $P^* = P^{**}$, što znači da je martingalna mjera jedinstvena. Po teoremu 5.5., tržište je potpuno.

$\square$

Literatura

[1] Z. Vondraček, *Financijsko modeliranje*, web - skripta, PMF - MO, Zagreb.

[2] J. Cvitanić, F. Zapatero, *Economics and Mathematics of Financial Markets*, The MIT Press, 2004.

[3] B. Basrak, *Matematičke financije*, web - skripta, 2009.

[4] B. Novak: *Financijska tržišta i institucije*, Ekonomski fakultet u Osijeku, Osijek, 2005.

[5] M. Benšić, N. Šuvak, *Uvod u vjerojatnost i statistiku*, Odjel za matematiku, Osijek, 2013.

[6] http://www.pses-inova.hr/pojam/financijsko-trziste/

[7] https://hr.wikipedia.org/wiki/Dionica

Sažetak

U ovom diplomskom radu cilj nam je bio analizirati potpunost modela financijskog tržišta u diskretnom vremenu. Kako bismo uopće mogli definirati potpunost matematičkog modela financijskog tržišta u diskretnom vremenu, prvo smo opisati financijsko tržište u diskretnom vremenu, financijske instrumente (osnovne i izvedene) kojima se trguje na financijskom tržištu, te njihove cijene i povrate. Pritom smo od važnijih pojmova definirali pojmove kao što su portfelj, europska call i put opcija, samofinancirajuća i dopustiva strategija trgovanja, vjerojatnost neutralna na rizik, te arbitraža i martingal. Zatim smo opisali neke jednoperiodne i višeperiodne modele u diskretnom vremenu, koji koriste dva financijska instrumenta, od kojih je jedan nerizičan (novac u domaćoj valuti), a drugi rizičan (dionica). Nakon toga definirali smo slučajni zahtjev, te što treba biti zadovoljeno da bi taj slučajni zhatjev bio dostižan. Na temelju dobivenih rezultata definirali smo potpun model financijskog tržišta u diskretnom vremenu kao model tržišta bez arbitraže na kojemu je svaki slučajni zahtjev dostižan. Za svaki opisani model iznijeli smo neke zahtjeve koje ti modeli trebaju ispunjavati da bi bili potpuni.

Ključne riječi: financijsko tržište, diskretno vrijeme, financijski instrumenti, cijene i povrati, opcije, arbitraža, slučajni zahtjev, potpunost modela

Summary

This thesis aim was to analyse the completeness of financial market discrete time models. In order to even be able to define the completeness of financial market discrete time models, we first described the financial market in discrete time, financial instruments (basic and derived) that are traded on financial markets, and its prices and returns. In doing so, we of the important terms defined terms such as the portfolio, a European call and put options, self-financing and admissible trading strategy, the risk-neutral measure, arbitrage and martingale. Then we described some one-period and multi-period models in discrete time, using two financial instruments, one of which is risk free (money in local currency), and the other risk (stocks). Then we defined a contingent claim, and what needs to be satisfied that this contingent claim was admissible. Based on the obtained results, we have defined a complete model of the financial market in discrete time as a model market without arbitrage in which each contingent claim is admissible. For each described model we have put forward some demands that these models must fulfill in order to be complete.

Key words: financial market, discrete time, financial instruments, prices and returns, options, arbitrage, contingent claim, completeness od the model

Životopis

Rođena sam 06. travnja 1987. godine u Osijeku. Osnovnu školu završila sam u Belišću, tijekom koje sudjelujem na općinskim, županijskim i regionalnim natjecanjima iz matematike, te državnom natjecanju iz likovnog, gdje kao dio grupe osvajam prvo mjesto. Nakon osnovne škole upisujem srednju komercijalnu školu u Valpovu, te zatim Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku u Osijeku. Promjenom smjera 2012. godine završavam preddiplomski studij matematike, uz završni rad na temu Geometrija u Antičkoj Grčkoj, uz mentorstvo doc. dr. sc. Ivana Matića. Tek 2014. godine upisujem diplomski studij matematike, smjer Financijska matematika i statistika.