

# Gornja granica Graovac-Ghorbani indeksa

---

Grbeša, Andrea

Undergraduate thesis / Završni rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, School of Applied Mathematics and Informatics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Fakultet primijenjene matematike i informatike**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:133127>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom](#).

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-22**



**mathos**

Repository / Repozitorij:

[Repository of School of Applied Mathematics and Informatics](#)



Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku  
Fakultet primijenjene matematike i informatike  
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Andrea Grbeša  
**Graovac-Ghorbani indeks**  
Završni rad

Osijek, 2023.

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku  
Fakultet primijenjene matematike i informatike  
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Andrea Grbeša  
**Graovac-Ghorbani indeks**  
Završni rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Snježana Majstorović Ergotić

Osijek, 2023.

# Graovac-Ghorbani indeks

## Sažetak

Tema ovog rada je upoznavanje s Graovac-Ghorbani ( $ABC_{GG}$ ) indeksom te određivanje njegove donje i gornje granice u klasi jednostavnih povezanih grafova s  $n$  vrhova. U radu je predstavljena karakterizacija jednostavnih povezanih grafova koji imaju najmanji i najveći  $ABC_{GG}$  indeks.

## Ključne riječi

povezan graf, udaljenost, Graovac-Ghorbani index, koktel party graf

## Abstract

The topic of this project is the introduction of Graovac-Ghorbani ( $ABC_{GG}$ ) index and establishment of its lower and upper bound in the class of simple connected graphs with  $n$  vertices. A characterization of simple connected graphs with maximum  $ABC_{GG}$  index is presented.

## Keywords

connected graph, distance, Graovac-Ghorbani index, cocktail party graph

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Osnovni pojmovi iz teorije grafova</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Graovac-Ghorbani indeks</b>	<b>5</b>
3.1	Grafovi koji maksimiziraju Graovac-Ghorbani indeks . . . . .	6

# 1 Uvod

Godine 1998. uveden je  $ABC(G)$  indeks grafa  $G$  kao grafovska invarijanta koja posjeduje značajnu moć predviđanja i predstavlja jedan od najistraženijih nasljednika Randićevog indeksa. U posljednja dva desetljeća definirane su i proučavane različite topološke invarijante  $ABC$  indeksa. U ovom radu se baziramo na Graovac-Ghorbani indeksu koji je prvu put predstavljen 2010. godine u radu [7]. Graovac-Ghorbani indeks je topološki deskriptor temeljen na udaljenosti koji daje bolje predviđanje u slučaju entropije i acentričnog faktora od  $ABC$  indeksa.

U posljednjem desetljeću, grafovi s najmanjim i najvećim Graovac-Ghorbani indeksom bili su proučavani u različitim publikacijama. Rostami i Sohrabi–Haghighat su u [9] našli grafove koji minimiziraju  $ABC_{GG}$  indeks. Rostami i ostali su u [11] odredili donje i gornje granice  $ABC_{GG}$  indeksa stabala sa zadanim brojem listova. Das i ostali su u radu [3] našli gornju granicu  $ABC_{GG}$  indeksa unicykličkih grafova, ostavljajući problem određivanja donje granice i dalje otvorenim. Dimitrov i ostali su u [4] dokazali da se među svi bipartitnim grafovima s  $n$  vrhova, najveći Graovac-Ghorbani indeks jedinstveno postiže na potpunom bipartitnom grafu.

Na temelju računalne pretrage, Furtula je u [6] okarakterizirao povezane grafove s najvećim  $ABC_{GG}$  indeksom, pri čemu je istaknuo da je potrebna stroga matematička potvrda te karakterizacije.

U ovom radu ćemo karakterizirati jednostavne povezane grafove s  $n$  vrhova koji minimiziraju i maksimiziraju  $ABC_{GG}$  indeks. Štoviše, predstaviti ćemo dokaz Furtuline hipoteze o izgledu ekstremalnih grafova s najvećim Graovac-Ghorbani indeksom.

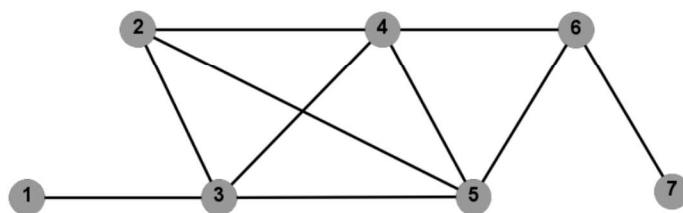
## 2 Osnovni pojmovi iz teorije grafova

Kako bismo lakše razumjeli glavne tvrdnje i njihove dokaze koje ćemo predstaviti u ovom radu, potrebno je uvesti neke od osnovnih pojmova iz teorije grafova.

**Definicija 2.1.** *Graf*  $G$  je uređeni par  $G = (V(G), E(G))$  koji se sastoji od nepraznog konačnog skupa  $V = V(G)$ , čije elemente zovemo **vrhovima** od  $G$  te od skupa  $E = E(G)$  čije elemente zovemo **bridovi** od  $G$ . Skup  $E$  je disjunktan sa skupom  $V$ , a svaki brid  $e \in E$  spaja dva vrha  $u, v \in V$  koji se zovu **krajevi** od  $e$ .

Graf možemo nacrtati u ravnini tako da su vrhovi grafa točke ili kružići, a bridovi spojnice između vrhova koje mogu biti dužine ili krivulje.

**Primjer 2.1.** Međusobna rukovanja u skupu od 7 osoba možemo prikazati grafom u kojemu vrhovi predstavljaju osobe, a bridovi njihova rukovanja. Primjerice, na slici 1 osoba 7 rukovala se s osobom 6, ali nije s osobama 1, 2, 3, 4 i 5.



Slika 1: Graf rukovanja 7 osoba.

Za brid  $e = uv$  kažemo da spaja vrhove  $u$  i  $v$  i zovemo ih **susjednim** vrhovima ili krajevima brida  $e$ . Također, kažemo da je vrh  $u$  ( $v$ ) **incidentan** s bridom  $e$ .

**Jednostavan** graf je graf koji nema petlju (vrh koji je bridom spojen sa samim sobom) i kojemu su dva vrha povezana najviše jednim bridom.

**Primjer 2.2.** Na slici 2 nalazi se graf koji nije jednostavan jer sadži petlju pri vrhu  $v$  te ima dvostruki brid.

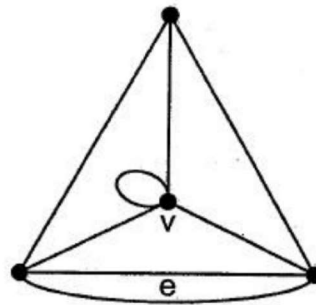
**Definicija 2.2.** U jednostavnom grafu  $G$  **stupanj**  $d(v)$  vrha  $v \in V(G)$  jednak je broju bridova incidentnih s  $v$ .

U primjeru 2.1 stupanj vrha 3 grafa prikazanog na slici 1 jednak je 4.

**Lema 2.1. (o rukovanju)** Zbroj stupnjeva svih vrhova u grafu je paran broj.

*Dokaz.* Pokazat ćemo da vrijedi  $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|$ .

Stupanj svakog vrha definiran je kao broj bridova incidentnih tom vrhu. Kako svaki brid ima dva kraja, broj stupnjeva u grafu mora biti jednak dvostrukom broju bridova.  $\square$



Slika 2: Graf s petljom

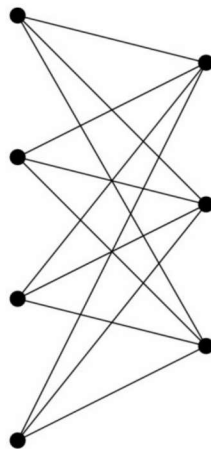
Naziv ove leme može se interpretirati ovako:

*Broj ruku koji je uključen u rukovanje bilo kojeg broja ljudi nužno je paran.*

Iz toga proizlazi sljedeći korolar:

**Korolar 2.2.** *Broj vrhova s neparnim stupnjem je paran.*

Za graf  $G$  kažemo da je **regularan** ako su svi njegovi vrhovi istog stupnja. Jednostavan graf u kojemu su svaka dva vrha spojena bridom naziva se **potpun** graf. Potpun graf s  $n$  vrhova označava se s  $K_n$ . Ako skup vrhova grafa  $G$  možemo razdvojiti u dva disjunktna skupa  $A$  i  $B$  tako da svaki brid od  $G$  ima jedan kraj u skupu  $A$ , a drugi u skupu  $B$ , onda kažemo da je  $G$  **bipartitan** graf. **Potpun bipartitan** graf je jednostavan bipartitan graf s biparticijom  $(A, B)$  u kojem je svaki vrh iz  $A$  spojen sa svakim vrhom iz  $B$ . Ako je  $|A| = m$  i  $|B| = n$ , takav graf označavamo s  $K_{m,n}$ . Analogno se definira  $k$ -partitan i potpun  $k$ -partitan graf.



Slika 3: Bipartitni graf  $K_{4,3}$

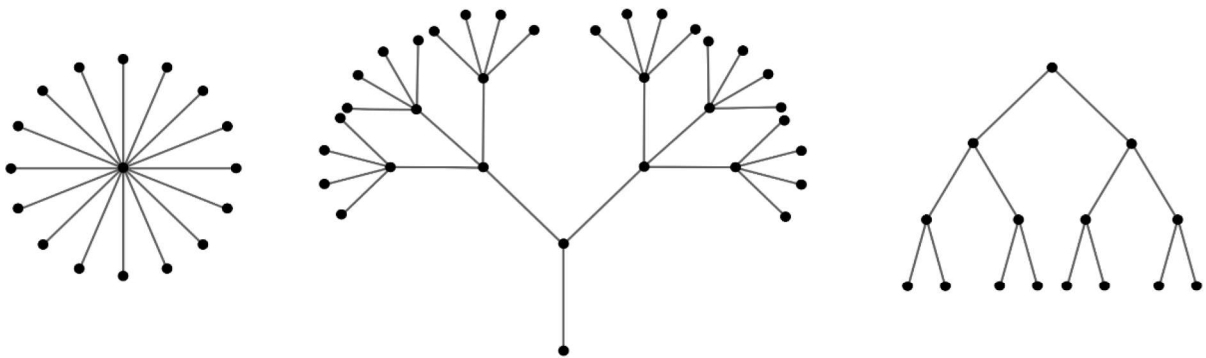


**Definicija 2.3.** Šetnja u grafu  $G$  je niz  $W = v_0e_1v_1e_2 \cdots v_h$ , čiji su članovi naizmjenice vrhovi  $v_i$  i bridovi  $e_i$ , tako da su krajevni od  $e_i$  vrhovi  $v_{i-1}$  i  $v_i$  ( $1 \leq i \leq h$ ).

Za šetnju  $W$  iz prethodne definicije kažemo da je  $(v_0, v_h)$ -šetnja, pri čemu je  $v_0$  početak, a  $v_h$  kraj od  $W$ . Put je šetnja u kojoj su svi vrhovi (posljedično i bridovi) međusobno različiti. Put s  $n$  vrhova označavamo s  $P_n$ . Ciklus  $C_n$  je šetnja u kojemu su svi vrhovi (posljedično i bridovi) međusobno različiti, a početak i kraj joj se podudaraju.

**Udaljenost**  $d_G(u, v)$  između vrhova  $u$  i  $v$  u grafu  $G$  je duljina najkraćeg  $(u, v)$ -puta u  $G$ . Ako takav put ne postoji, stavljamo  $d_G(u, v) = \infty$ . Za graf  $G$  kažemo da je **povezan** ako između svaka dva njegova vrha postoji put.

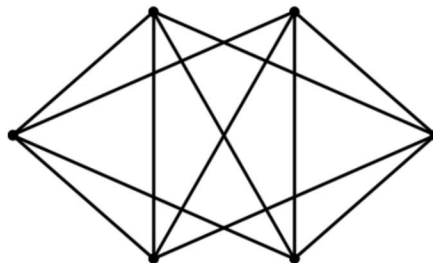
**Šuma** je graf bez ciklusa, pri čemu povezanu šumu zovemo **stablo**.



Slika 4: Šuma koja se sastoji od tri stabla

**Definicija 2.4.** Koktel party graf je graf s  $n$  vrhova,  $n$  paran broj, koji je potpun  $n/2$ -partitan graf  $K_{2,2,\dots,2}$ .

**Napomena 2.1.** Koktel party graf dobio je naziv po tome što se može vizualizirati kao skup rukovanja od  $n/2$  parova koji idu na zabavu, pri čemu se svaka osoba rukuje sa svakom osobom osim sa svojim partnerom.



Slika 5: Primjer koktel party grafa  $K_{2,2,2}$ .

### 3 Graovac-Ghorbani indeks

Neka je  $G = (V, E)$  jednostavan, neusmjeren povezan graf s  $n$  vrhova. Graovac-Ghorbani indeks  $ABC_{GG}(G)$  grafa  $G$  definiran je na sljedeći način:

$$ABC_{GG}(G) = \sum_{uv \in E(G)} \sqrt{\frac{n_u + n_v - 2}{n_u n_v}},$$

gdje je  $n_u$  broj vrhova koji su bliži vrhu  $u$  nego vrhu  $v$ , a  $n_v$  je broj bridova koji su bliži  $v$  nego  $u$ .

Lako je vidjeti da se među svim povezanim grafovima na  $n$  vrhova, minimalna vrijednost  $ABC_{GG}$  postiže za potpune grafove.

Rostami i Haghghat su predstavili donju i gornju granicu  $ABC_{GG}$  indeksa za proizvoljne grafove s  $n$  vrhova i  $m$  bridova, no gornja granica nije optimalna.

**Teorem 3.1.** [10] *Let  $G$  be a simple graph on  $n$  vertices and  $m$  edges, then*

$$0 \leq ABC_{GG}(G) < m.$$

*Donja granica se postiže za potpun graf  $K_n$ , dok se gornja granica ne može dostići.*

*Dokaz.* Iz definicije Graovac-Ghorbani indeksa očuvamo  $n_u \geq 1$  i  $n_v \geq 1$  pa  $ABC_{GG} \geq 0$  te je  $ABC_{GG} = 0$  ako i samo ako  $n_u = n_v = 1$  za svaki brid grafa  $G$ . No, to je slučaj ako i samo ako je  $G$  potpun graf, tj.  $G = K_n$ . Nadalje, za svaki brid  $e = uv$  proizvoljnog grafa  $G$  vrijedi  $n_u + n_v - 2 < n_u n_v$  pa je zato

$$\frac{n_u + n_v - 2}{n_u n_v} < 1$$

te zaključujemo  $ABC_{GG}(G) < m$ .

□

Furtula je u svome radu iz 2016. godine [6] računalno pretražio sve grafove s najviše 10 vrhova te među njima našao one koji maksimiziraju  $ABC_{GG}$  indeks. Za neparan  $n \leq 10$  pronašao je jedinstven graf koji maksimizira  $ABC_{GG}$ , dok je za paran  $n \geq 10$  našao dva neizomorfna ekstremalna grafa. Graf s neparnim brojem vrhova je biregularan, odnosno vrhovi mu imaju točno dvije različite vrijednosti stupnjeva. Jedan vrh je stupnja  $n - 1$ , dok su preostali vrhovi stupnja  $n - 2$ , vidi sliku 6. Graovac-Ghorbani indeks takvog grafa iznosi  $\frac{(n-1)^2}{4} \sqrt{2} = B_1$ . Za paran  $n$  jedan je graf koktel party graf, dok je drugi graf također biregularan. Sadrži točno dva vrha stupnja  $n - 1$ , dok su svi ostali vrhovi stupnja  $n - 2$ , vidi sliku 6. U oba slučaja  $ABC_{GG}$  indeks jednak je  $\frac{n(n-2)}{4} \sqrt{2} = B_2$ . Iako je Furtulino istraživanje pokazalo pravilnu i jednostavnu strukturu grafova koji maksimiziraju Graovac-Ghorbani indeks, neophodno je njegove zaključke formalno dokazati ili opovrgnuti za proizvoljan broj  $n$ .

### 3.1 Grafovi koji maksimiziraju Graovac-Ghorbani indeks

Neka je  $G$  povezan graf s  $n$  vrhova i  $m$  bridova. Uočimo da je Graovac-Ghorbani indeks grafova koji ne sadrže trokute manji od  $B_1$  ili  $B_2$ . Ako je  $G$  graf bez trokuta s  $m$  bridova i  $n$  vrhova, prema Mantelovom teoremu [8] znamo da je  $m \leq \frac{n^2}{4}$ . S druge strane, budući da je  $\sqrt{\frac{n_u+n_v-2}{n_u n_v}} < 1$  za proizvoljni brid  $uv$ , to imamo  $ABC_{GG}(G) < m$ . Stoga se za  $n \geq 7$  lako pokaže da je

$$ABC_{GG}(G) < m \leq \frac{n^2}{4} \leq \frac{n(n-2)}{4} \sqrt{2} < \frac{(n-1)^2}{4} \sqrt{2}.$$

Slučaj kada je  $n < 7$  razmatran je u [6].

U nastavku ćemo pretpostaviti da  $G$  sadrži barem jedan trokut. Za brid  $uv$  grafa  $G$  definiramo  $n_{uv} = |\{z \mid d(z, v) = d(z, u)\}|$ . Tada imamo  $0 \leq n_{uv} \leq n - 2$ . Štoviše, za neki brid  $uv$  grafa  $G$  vrijedi jednakost  $n_u + n_v = n - n_{uv}$ .

Neka je  $t(G)$  broj trokuta u grafu  $G$ . Vrijede sljedeći rezultati:

**Lema 3.2.** [1] *Za jednostavan povezan graf  $G$  s  $n$  vrhova,  $m$  bridova te  $t(G)$  trokuta vrijedi*

$$\frac{m(4m - n^2)}{n} \leq 3t(G) \leq \sum_{uv \in E(G)} n_{uv}.$$

Lijevu nejednakost izveo je Bollobás [1]. Budući da  $n_{uv}$  broji cikluse neparne duljine koji sadrže  $uv$ , lijeva nejednakost je očita. Za dokaz našeg glavnog rezultata trebat će nam lema koju je Cambie dobio u [2].

**Lema 3.3.** [2] *Za proizvoljan brid  $e = uv \in E(G)$ , imamo*

$$n_u + n_v + d(u) + d(v) \leq 2n.$$

Kao posljedicu Leme 3.2 (isti rezultat također slijedi iz Leme 3.3) dobivamo sljedeću lemu.

**Lema 3.4.** *Ako je  $G$  povezan graf s  $m$  bridova i  $n$  vrhova, tada*

$$\sum_{uv \in E(G)} (n_u + n_v) \leq 2mn - \frac{4m^2}{n}.$$

□

Koristeći Lemu 3.2 nije teško za pokazati da, ako je  $n$  paran broj i ako  $n_u > 1, n_v > 1$  za svaki brid  $uv \in E(G)$ , tada se najveća vrijednost  $ABC_{GG}$  indeksa postiže za koktel party grafove.

**Propozicija 3.5.** *Neka je  $G$  povezan graf s  $m$  bridova i  $n$  vrhova. Ako je  $n$  paran broj i ako  $n_u \geq 2$ ,  $n_v \geq 2$  za svaki brid  $uv \in E(G)$ , tada*

$$ABC_{GG}(G) \leq \frac{n(n-2)}{4}\sqrt{2}$$

*Maksimalna vrijednost se postiže za koktel party grafove.*

*Dokaz.* Najprije pokažimo da  $n_u n_v \geq 2(n - n_{uv} - 2)$  za svaki brid  $uv \in E(G)$ . Neka je  $s = n - n_{uv} = n_u + n_v$ . Nejednakost  $n_u n_v \geq 2(n - n_{uv} - 2)$  je ekvivalentna s  $n_u(s - n_u) \geq 2(s - 2)$  jer  $s \geq n_u + 2$  i  $n_u \geq 2$ . Stoga imamo

$$\begin{aligned} ABC_{GG}(G) &= \sum_{uv \in E(G)} \sqrt{\frac{n_u + n_v - 2}{n_u n_v}} \\ &\leq \sum_{uv \in E(G)} \sqrt{\frac{n - n_{uv} - 2}{2(n - n_{uv} - 2)}} = \frac{m\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Iz  $n_u \geq 2$  i  $n_v \geq 2$  dobivamo  $n_{uv} = n - n_u - n_v \leq n - 4$ . Sada iz Leme 3.2 imamo

$$\frac{m(4m - n^2)}{n} \leq \sum_{(u,v) \in E(G)} n_{uv} \leq m(n - 4).$$

Stoga je  $m \leq \frac{n(n-2)}{2}$  i  $ABC_{GG}(G) \leq \frac{n(n-2)}{4}\sqrt{2}$ . Jednakost vrijedi ako je  $n_u = n_v = 2$  za svaki brid  $uv \in E(G)$  i  $m = \frac{n(n-2)}{2}$ . Ako graf ne sadrži vrh  $u$  stupnja  $n - 1$ , onda  $n_v = 1$  za svaki vrh  $v$  koji je spojen s  $u$ . Počevši od  $2m = n(n - 2) = \sum_{i=1}^n di \geq n(n - 2)$ , zaključujemo da su svi vrhovi od  $G$  stupnja  $n - 2$ .  $\square$

Jasno je da gornji pristup ne funkcionira ako  $G$  sadrži brid  $uv$  za koji je  $n_u = 1$  ili  $n_v = 1$ . Kako bismo okarakterizirali grafove na  $n$  vrhova s maksimalnim  $ABC_{GG}$  primjenjujemo metodu Lagrangeovih multiplikatora.

**Teorem 3.6.** *Neka je  $G$  povezan graf s  $n$  vrhova. Ako je  $n$  paran broj, tada vrijedi*

$$ABC_{GG}(G) \leq \frac{n(n-2)}{4}\sqrt{2}.$$

*Jednakost vrijedi za  $(n - 2)$ -regularni koktel party graf i za graf koji sadrži dva vrha stupnja  $n - 1$  gdje su svi ostali vrhovi stupnja  $n - 2$ .*

*Ako je  $n$  neparan broj, tada vrijedi*

$$ABC_{GG}(G) \leq \frac{(n-1)^2}{4}\sqrt{2}.$$

*Jednakost vrijedi za graf s jednim vrhom stupnja  $n - 1$  i  $n - 1$  vrhova stupnja  $n - 2$ .*

*Dokaz.* Neka je  $G$  povezan graf s  $n$  vrhova i  $m$  bridova.

Neka je  $F: (x_1, x_2, \dots, x_{2m}) \rightarrow \mathbb{R}$  realna funkcija realne varijable definirana s

$$F(x_1, x_2, \dots, x_{2m}) = \sum_{i=1}^m \sqrt{\frac{x_{2i-1} + x_{2i} - 2}{x_{2i-1}x_{2i}}}.$$

Jasno je da  $ABC_{GG}(G) = F(x'_1, x'_2, \dots, x'_{2m})$  gdje je  $x'_{2i-1} = n_u$  i  $x'_{2i} = n_v$  za svaki brid  $e_i = uv \in E(G)$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Kako bi maksimizirali  $ABC_{GG}(G)$  indeks, maksimizirajmo funkciju  $F$  primjenom metode Lagrangeovih multiplikatora uz uvjet  $2m \leq g(x_1, x_2, \dots, x_{2m}) := x_1 + x_2 + \dots + x_{2m} \leq 2m(n - \frac{2m}{n})$ . Granice za funkciju  $g(x_1, x_2, \dots, x_{2m})$  proizlaze iz uvjeta  $2 \leq n_u + n_v$  i Leme 3.4.

Imamo

$$\frac{\partial F}{\partial x_{2i-1}} = \frac{1}{2(x_{2i-1}x_{2i})^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{x_{2i}(2 - x_{2i})}{\sqrt{x_{2i-1} + x_{2i} - 2}}$$

i

$$\frac{\partial F}{\partial x_{2i}} = \frac{1}{2(x_{2i-1}x_{2i})^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{x_{2i-1}(2 - x_{2i-1})}{\sqrt{x_{2i-1} + x_{2i} - 2}}.$$

Dakle  $\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$  ako i samo ako  $x_i = 2$ . Prema tome točka  $(2, 2, \dots, 2)$  je jedinstvena kritična točka funkcije  $F$ . Ako je  $n_u = n_v = 2$  za svaki brid  $uv$  grafa  $G$ , tada

$$F(2, 2, \dots, 2) = ABC_{GG}(G) = \frac{m\sqrt{2}}{2}. \quad (1)$$

Iz  $\nabla g = (1, 1, \dots, 1)$  i  $\nabla F = \lambda \cdot \nabla g$ , za svaki  $i = 1, \dots, m$  dobivamo

$$\frac{1}{2(x_{2i-1}x_{2i})^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{x_{2i}(2 - x_{2i})}{\sqrt{x_{2i-1} + x_{2i} - 2}} = \lambda, \quad (2)$$

$$\frac{1}{2(x_{2i-1}x_{2i})^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{x_{2i-1}(2 - x_{2i-1})}{\sqrt{x_{2i-1} + x_{2i} - 2}} = \lambda. \quad (3)$$

Dijeljenjem (2) s (3) dobivamo  $x_{2i-1} = x_{2i} = c$  ili  $x_{2i-1} + x_{2i} = 2$ , tj. ukoliko promatramo  $F$  kao formulu za računanje  $ABC_{GG}$  indeksa, imamo  $x_{2i-1} = x_{2i} = 1$ . Slučaj  $x_{2i-1} = x_{2i} = 1$  ne doprinosi sumi u formuli Graovac-Ghorbani indeksa pa ga izostavljamo. Iz uvjeta  $g = 2m(n - \frac{2m}{n})$  dobivamo  $2mc = 2m(n - \frac{2m}{n})$ , tj.  $x_i = n - \frac{2m}{n}$ . Nadalje, ako pretpostavimo da je  $n_u = n_v = n - \frac{2m}{n}$  za svaki brid  $uv \in E(G)$ , dobivamo

$$F\left(n - \frac{2m}{n}, n - \frac{2m}{n}, \dots, n - \frac{2m}{n}\right) = ABC_{GG}(G) = \frac{m}{n^2 - 2m} \sqrt{n(2n^2) - 2n - 4m}. \quad (4)$$

Uspoređujući (1) i (4) lako se pokaže da je nejednakost

$$\frac{m}{n^2 - 2m} \sqrt{n(2n^2) - 2n - 4m} \leq \frac{m\sqrt{2}}{2}$$

ekvivalentna s

$$n^4 + 4n^2 + 4m^2 - 4n^3 - 4mn^2 + 8mn \geq 0 \Leftrightarrow (n^2 - 2n - 2m)^2 \geq 0.$$

Jednakost vrijedi ako je  $m = \frac{n(n-2)}{2}$ .

Dakle, za svaki povezani graf  $G$  s  $n$  vrhova i  $m$  bridova vrijedi

$$F(x_1, x_2, \dots, x_{2m}) \leq \frac{m\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow ABC_{GG}(G) \leq \frac{m\sqrt{2}}{2}. \quad (5)$$

U drugom dijelu dokaza razmatramo uvjete pod kojima vrijedi jednakost u 5.

Neka je  $n$  neparan broj. Budući da se maksimum od  $F$  postiže za  $n_u = n_v = 2$ , dobivamo  $n_{uv} = n - 4$ . Sada iz Leme 3.2 dobivamo  $m \leq \frac{n(n-2)}{2}$ , ali je jasno da jednakost nije postignuta. Budući da svaki brid ekstremnog grafa doprinosi s  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  sumi u formuli za  $ABC_{GG}$ , možemo pretpostaviti da postoje bridovi  $uv$  za koje  $\sqrt{\frac{n_u+n_v-2}{n_un_v}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  i  $n_u \neq n_v$ . Lako se pokaže da za svaki takav brid vrijedi  $n_u = 2$  ili  $n_v = 2$ . Kako bismo maksimizirali broj  $m$  iz Leme 3.2, maksimiziramo vrijedost sume  $\sum_{(u,v) \in E(G)} n_{uv}$ . Nadalje, pretpostavljamo da je  $n_u = 1$ , tj. pretpostavljamo da graf  $G$  sadrži bridove  $uv$  za koje je  $(n_u, n_v) = (1, 2)$ . Neka  $G$  sadrži  $k$  vrhova stupnja  $n - 1$ . Tada imamo  $2m \leq k(n - 1) + (n - k)(n - 2)$ , odakle dobivamo  $m \leq \frac{n^2 - 2n + k}{2}$ . Postoji  $\binom{k}{2}$  bridova između tih  $k$  vrhova. Ako za brid  $uv$  vrijedi  $d_u = d_v = n - 1$ , tada  $n_u = n_v = 1$ . U ovom slučaju imamo  $\sqrt{\frac{n_u+n_v-2}{n_un_v}} = 0$ . Dakle

$$ABC_{GG}(G) \leq \left(m - \frac{k(k-1)}{2}\right) \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \left(\frac{n^2 - 2n + 2k - k^2}{2}\right) \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \left(\frac{n^2 - 2n + 1}{2}\right) \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (6)$$

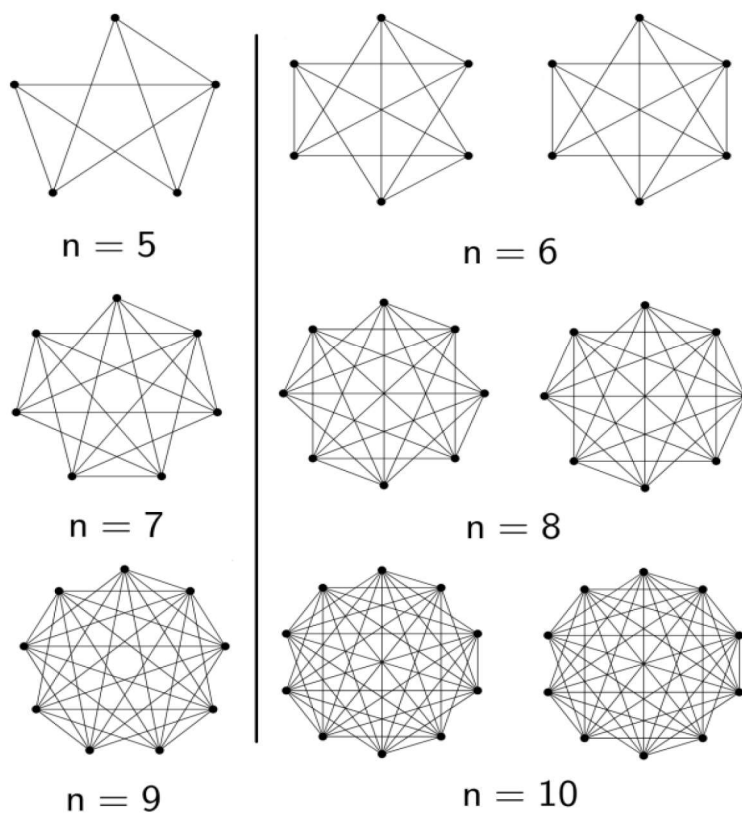
Jednakost u (6) vrijedi za  $k = 1$ , tj. ako  $G$  sadrži točno jedan vrh stupnja  $n - 1$  i  $n - 1$  vrh stupnja  $n - 2$ . Graovac-Ghorbani indeks takvog grafa jednak je

$$ABC_{GG}(G) = \frac{(n-1)^2}{4} \sqrt{2}.$$

Ako je  $n$  paran broj i ako  $n_u = n_v = 2$  za svaki brid  $uv$ , tada  $G$  ne sadrži vrh stupnja  $n - 1$  i vrijedi  $m \leq \frac{n(n-2)}{2}$ . Dakle,  $m = \frac{n(n-2)}{2}$  ako i samo ako su svi vrhovi grafa  $G$  stupnja  $n - 2$ . U tom slučaju dobivamo koktel party graf. Ako postoje bridovi  $uv$  za koje je  $(n_u, n_v) = (1, 2)$ , tada možemo pretpostaviti da  $G$  sadrži  $k$  vrhova stupnja  $n - 1$ . Koristeći granice u (6), zaključujemo da se najveća vrijednost od  $m$  postiže za  $k = 0$  (već smo razmotrili ovaj slučaj) i za  $k = 2$ . U tom slučaju imamo točno dva vrha stupnja  $n - 1$  i sve ostale vrhove stupnja  $n - 2$ . U oba slučaja ( $k = 0$  ili  $k = 2$ ) zaključujemo

$$ABC_{GG}(G) = \frac{n(n-2)}{4} \sqrt{2}.$$

□



Slika 6: Grafovi s  $5 \leq n \leq 10$  vrhova koji maksimiziraju  $ABC_{GG}$  index.

## Literatura

- [1] B. Bollobás, *Extremal Graph Theory*, Acad. Press, London, 1978, pp. 297—297
- [2] S. Cambie, *Five results on maximizing topological indices of graphs*, *Discr. Math. Theor. Comput. Sci.* 23 (2021) #6896.
- [3] K. C. Das, K. Xu, A. Graovac, *Maximal unicyclic graphs with respect to new atom–bond connectivity index*, *Acta Chim. Slov.* 60 (2013) 34—42.
- [4] D. Dimitrov, B. Ikić, R. Škrekovski, *Remarks on the Graovac-Ghorbani index of bipartite graphs*, *Appl. Math. Comp.* 293 (2017) 370—376.
- [5] S. Filipovski, *Connected Graphs with Maximal Graovac-Ghorbani Index*, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* 89 (2023), 517–525.
- [6] B. Furtula, *Atom-bond connectivity index versus Graovac-Ghorbani analog*, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* 75 (2016) 233–242.
- [7] A. Graovac, M. Ghorbani, *A new version of atom-bond connectivity index*, *Acta Chim. Slov* 57 (2010) 609—612.
- [8] W. Mantel, *Solution to Problem 28*, by H. Gouwentak, W. Mantel, J. Teixeira de Mattes, F. Schuh, and W. A. Wythoff, *Wiskundige Opgaven* 10 (1907) 60—61.
- [9] M. Osvin-Pavčević, *Uvod u teoriju grafova*, Element, 2006.
- [10] M. Rostami, M. Sohrabi-Haghighat, *Further results on new version of atom–bond connectivity index*, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* 71 (2014) 21–32.
- [11] M. Rostami, M. Sohrabi-Haghighat, M. Ghorbani, *On second atom–bond connectivity index*, *Iranian J. Math. Chem.* 4 (2013) 265—270.
- [12] D. Veljan, *Kombinatorika s teorijom grafova*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.