Rješavanje sustava nelinearnih jednadžbi primjenom Newtonove metode

Jajetić, Sara

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Sara Jajetić

Rješavanje sustava nelinearnih jednadžbi primjenom Newtonove metode

Završni rad

Osijek, 2022.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Sara Jajetić

Rješavanje sustava nelinearnih jednadžbi primjenom Newtonove metode

Završni rad

Mentor: doc. dr. sc. Suzana Miodragović

Osijek, 2022.

Sažetak

U ovom završnom radu proučavat ćemo rješavanje sustava nelinearnih jednadžbi. Prvo ćemo pokazati kako se numerički rješavaju nelinearne jednadžbe (Newtonova metoda - metoda tangenti te neke modifikacije Newtonove metode), a potom ćemo objasniti rješavanje sustava nelinearnih jednadžbi. Prilikom rješavanja sustava nelinearnih jednadžbi, najviše ćemo se fokusirati na Newtonovu metodu, no na kraju ćemo spomenuti i neke kvazi-Newtonove metode.

Ključne riječi

Nelinearne jednadžbe, metoda tangenti, modifikacije, sustavi nelinearnih jednadžbi, Newtonova metoda, kvazi-Newtonove metode

Solving systems of nonlinear equations using Newton's method

Summary

In this paper we consider numerical methods for solving the systems of nonlinear equations. First, we introduce some methods for solving nonlinear equations (Newton's method - method of tangents and also some modifications of Newton's method). Afterwards, we describe the ways of solving systems of nonlinear equations. The main focus will be on Newton's method, also some quasi-Newton methods will be mentioned.

Keywords

Nonlinear equations, method of tangents, modifications, systems of nonlinear equations, Newton's method, quasi-Newton methods

Sadržaj

1 Uvod

U ovom radu bavit ćemo se jednom iterativnom metodom za rješavanje sustava nelinearnih jednadžbi. Prije nego što dođemo do same metode za rješavanje sustava, važno je pojasniti kako se rješavaju nelinearne jednadžbe. Zbog toga u uvodnom dijelu najprije govorimo o tome kako općenito riješiti nelinearnu jednadžbu, a nakon toga problem proširujemo na računanje rješenja sustava nelinearnih jednadžbi.

1.1 Rješavanje nelinearnih jednadžbi

Promatramo realnu neprekidnu funkciju f definiranu na segmentu $[a,b]$. Svaki realni broj ξ, koji je rješenje jednadžbe

$$f(x)=0, \tag{1}$$

nazivamo **nultočkom** funkcije f koja geometrijski odgovara sjecištu grafa funkcije f s apscisom. Može se dogoditi da neka funkcija ima više realnih nultočaka, da su neke višestruke nultočke ili da ih uopće nema.

Ako je funkcija f neprekidna na intervalu $I=[a,b]$ i ako na rubovima intervala prima suprotne vrijednosti

$$f(a)\cdot f(b)<0,$$

tada postoji barem jedna točka $\xi\in I$, gdje je $f(\xi)=0$. Nadalje, ako je prva derivacija f' stalnog predznaka na intervalu I, tada je to i jedina nultočka funkcije f na intervalu I. Stoga se posao traženja realnog rješenja jednadžbe (1) svodi na:

1) Separaciju intervala I u kojemu funkcija ima nultočku ξ;

2) Određivanju nultočke ξ, pomoću neke iterativne metode, s unaprijed zadanom točnošću.

1.2 Newtonova metoda (metoda tangenti)

Kod Newtonove metode, neprekidnu funkciju f aproksimiramo njezinom tangentom. Pretpostavit ćemo da je funkcija f na $[a,b]$ neprekidna, ima prvu i drugu derivaciju, tj. $f\in C^2[a,b]$. Ako vrijedi i

$$f(a)\cdot f(b)<0$$

to znači da f ima nultočku u $[a,b]$.

Neka je $x_0\in[a,b]$ početna aproksimacija. Koristeći razvoj funkcije f u Taylorov red u okolini točke x_0, funkciju f aproksimiramo linearnom funkcijom

$$g(x)=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0).$$

Umjesto rješavanja jednadžbe (1), rješavat ćemo jednadžbu oblika

$$g(x) = 0, \tag{2}$$

to jest

$$f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) = 0.$$

Sređivanjem dobivamo

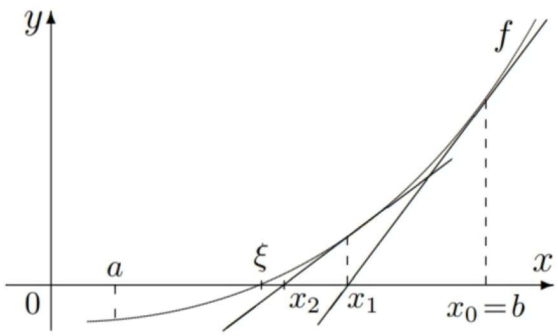
$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Označimo li s x_1 rješenje jednadžbe (2), onda imamo

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Ponavljajući gore navedeni postupak dobivamo niz aproksimacija $(x_{n+1},\ n \in \mathbb{N}_0)$ oblika

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$



Slika 1: Newtonova metoda tangenti

Teorem 1 (vidi [2], Teorem 4.3.). *Neka funkcija $f\colon I \to \mathbb{R}$ ima neprekidnu drugu derivaciju na intervalu $I = [a, b]$. Neka je nadalje, $f(a) \cdot f(b) < 0$, a prva i druga derivacija funkcije f na intervalu I imaju stalan predznak.*

Tada, ako je $x_0 \in I$ izabran tako da je

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0,$$

niz definiran s

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

konvergira prema jedinstvenom rješenju ξ jednadžbe $f(x) = 0$.

Pri tome vrijedi ocjena pogreške aproksimacije

$$|\xi - x_n| \leqslant \frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2,$$

gdje je

$$m_1 = \min_{x \in I} |f'(x)|, \quad M_2 = \max_{x \in I} |f''(x)|,$$

a metoda ima kvadratnu brzinu konvergencije, tj. vrijedi

$$|\xi - x_{n+1}| \leqslant \frac{M_2}{2m_1}(\xi - x_n)^2.$$

Dokaz. Za dokaz vidjeti [2]. □

Ako želimo da pogreška u izračunatoj aproksimaciji nultočke bude manja ili jednaka ε, onda nam i desna strana prethodne nejednakosti mora biti manja ili jednaka ε. Iz toga nam proizlazi dinamička ocjena pogreške

$$|x_n - x_{n-1}| \leqslant \sqrt{\frac{2m_1\varepsilon}{M_2}}.$$

Primjer 1. *Newtonovom metodom tangenti nađimo realne nultočke jednadžbe*

$$x^5 + x - 1 = 0$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$.

Rješenje:

Možemo uvidjeti da nam je zadani polinom neprekidna funkcija i da su mu sve derivacije neprekidne. Njegova derivacija je oblika

$$f'(x) = 5x^4 + 1 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Kako je zadani polinom strogo rastuća funkcija, on ima samo jednu realnu nultočku. Zbog $f(0) = -1$ (i strogog rasta), ne postoje negativne nultočke. Kako je $f(1) = 1$, nultočka je sigurno u intervalu $[0, 1]$. Vidimo da nam prva derivacija ne mijenja predznak na $[0, 1]$, dok druga derivacija

$$f''(x) = 20x^3$$

na $[0, 1]$ ima pozitivan predznak, osim u točki 0. Zbog toga trebamo suziti interval $[0, 1]$ tako da nam druga derivacija ne mijenja predznak.

Sada ćemo ispitati je li nam nultočka ostala u intervalu $[0.5, 1]$.

$$f(0.5) = (0.5)^5 + (0.5) - 1 < 0, \quad f(0.5) \cdot f(1) < 0.$$

Time smo osigurali da nam druga derivacija ne mijenja predznak na intervalu $[0.5, 1]$. Kako je $f''(x) > 0$ na $[0.5, 1]$, započet ćemo iz onog ruba intervala gdje je funkcijska vrijednost pozitivna. Dakle, da bi vrijedilo $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$, treba započeti iz $x_0 = 1$. Na taj način smo zadovoljili sve uvjete konvergencije na intervalu $[0.5, 1]$.

Kako bi odredili nultočku jednadžbe sa zadanom točnošću, moramo u svakom koraku provjeriti pogrešku aproksimacije. Računamo:

$$\begin{aligned} m_1 &= \min_{x\in[0.5,1]} |f'(x)| = \min_{x\in[0.5,1]} (5x^4 + 1) \\ &= f'(0.5) = 1.3125 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_2 &= \max_{x\in[0.5,1]} |f''(x)| = \max_{x\in[0.5,1]} (20x^3) \\ &= f''(1) = 20. \end{aligned}$$

Kriterij zaustavljanja glasi

$$|x_n - x_{n-1}| \leqslant \sqrt{\frac{2m_1\varepsilon}{M_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.3125 \cdot 10^{-4}}{20}} \approx 0.003623.$$

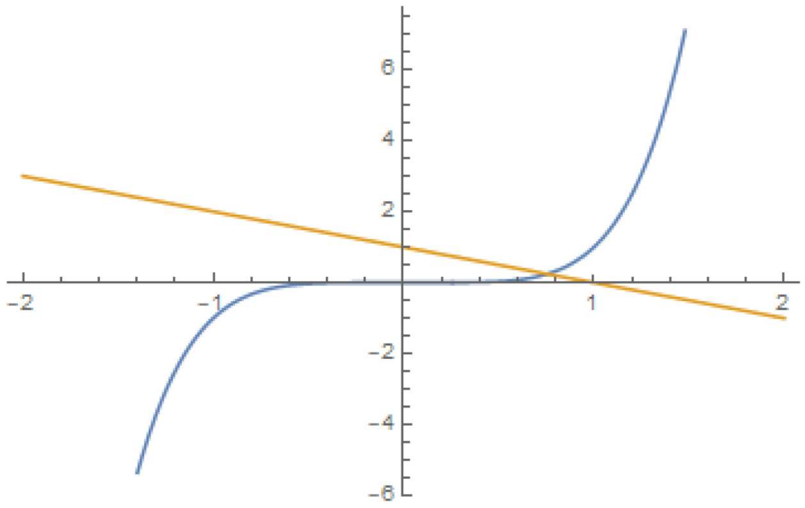
Niz iteracija dobivamo iz

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^5 + x_n - 1}{5x_n^4 + 1}, \quad x_0 = 1.$$

Iz Tablice 1 uviđamo da je $|x_4 - x_3| < 0.003623$. Zaključujemo, aproksimacija nultočke je $x_4 = 0.754878$.

n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$	$f(x_n)$
0	1	–	1
1	0.833333	0.166667	0.235211
2	0.764382	0.003622	0.025329
3	0.755025	0.009357	0.000612
4	0.754878	0.000147	0.000001

Tablica 1: Newtonova metoda za funkciju iz Primjera 1.

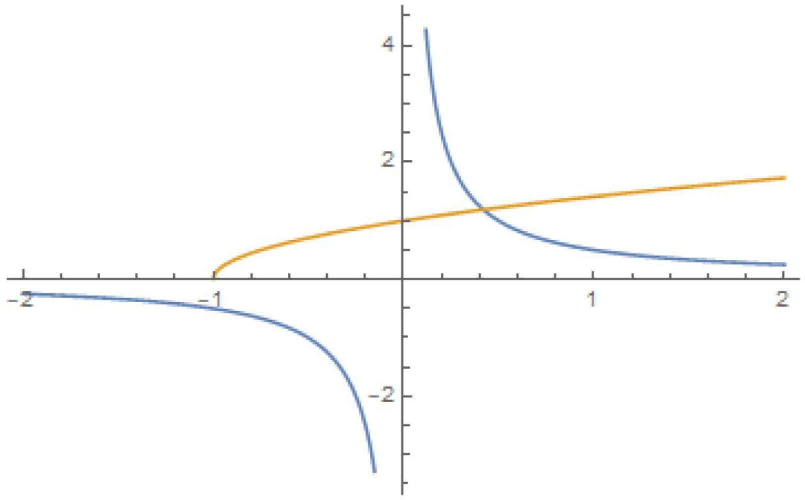


Slika 2: Presjek krivulja $y = x^5$ i $y = -x + 1$

Primjer 2. *Newtonovom metodom riješimo jednadžbu* $\sqrt{x+1} = \dfrac{1}{2x}$ *s točnosšću* $\epsilon = 10^{-4}$.

Rješenje:

Grafovi funkcija $y = \sqrt{x+1}$ i $y = \frac{1}{2x}$ sijeku se u jednoj točki (vidjeti Sliku 3). To znači da dana jednadžba ima točno jedno rješenje, tj. funkcija $f(x) = \sqrt{x+1} - \dfrac{1}{2x}$ ima točno jednu realnu nultočku. Prema Slici 3, naslućujemo da ona pripada intervalu $\left[\frac{1}{5}, 1\right]$. Zaista, kako je $f(\frac{1}{5}) \approx -1.4 < 0$, $f(1) \approx 0.91 > 0$ i f neprekidna, tada je $c \in \left[\frac{1}{5}, 1\right]$.



Slika 3: Presjek krivulja $y = \dfrac{1}{2x}$ i $y = \sqrt{x+1}$

Provjerimo jesu li na intervalu $\left[\frac{1}{5}, 1\right]$ ispunjene pretpostavke iz Teorema 1.
Vrijedi:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2x^2} > 0, \quad x \in \left[\frac{1}{5}, 1\right],$$
$$f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{(x+1)^3}} - \frac{1}{x^3} < 0, \quad x \in \left[\frac{1}{5}, 1\right].$$

Početnu aproksimaciju x_0 biramo tako da je $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$. Kako je $f(\frac{1}{5}) \cdot f''(\frac{1}{5}) > 0$, uzet ćemo $x_0 = \frac{1}{5}$. Označimo:

$$g(x) := |f'(x)| = f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2x^2} > 0, \quad x \in \left[\frac{1}{5}, 1\right];$$
$$h(x) := |f''(x)| = -f''(x) = \frac{1}{4\sqrt{(x+1)^3}} + \frac{1}{x^3} < 0, \quad x \in \left[\frac{1}{5}, 1\right].$$

Slijedi, $g'(x) = f''(x) < 0$ za $x \in \left[\frac{1}{5}, 1\right]$, pa je g strogo padajuća funkcija na tom intervalu. Također, g je pozitivna funkcija te postiže minimum na desnom rubu intervala $\left[\frac{1}{5}, 1\right]$, tj.

$$\begin{aligned} m_1 &= \min_{x \in \left[\frac{1}{5}, 1\right]} |f'(x)| = \min_{x \in \left[\frac{1}{5}, 1\right]} g(x) \\ &= g(1) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Kako je $h'(x) = -f'''(x) = -\frac{3}{8\sqrt{(x+1)^5}} - \frac{3}{x^4} < 0$ za $x \in \left[\frac{1}{5}, 1\right]$ te je h strogo padajuća funkcija na tom intervalu. Također, h je pozitivna funkcija te postiže maksimum na lijevom rubu intervala $\left[\frac{1}{5}, 1\right]$, tj.

$$\begin{aligned} M_2 &= \max_{x \in \left[\frac{1}{5}, 1\right]} |f''(x)| = \max_{x \in \left[\frac{1}{5}, 1\right]} h(x) \\ &= h\left(\frac{1}{5}\right) = 125.1901814. \end{aligned}$$

Kriterij zaustavljanja glasi

$$|x_n - x_{n-1}| \leqslant \sqrt{\frac{2m_1\varepsilon}{M_2}} = \sqrt{\frac{2(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2})10^{-4}}{125.1901914}} \approx 0.001168.$$

Niz iteracija dobivamo iz

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\sqrt{x+1} - \frac{1}{2x}}{\frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2x^2}}, \quad x_0 = 0.2.$$

Iz Tablice 2 uviđamo da je $|x_5 - x_4| < 0.001168$. Zaključujemo, aproksimacija nultočke $c \approx x_5 = 0.419643$.

n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$	$f(x_n)$
0	0.2	–	−1.4045549
1	0.308406	0.108406	−0.4773838
2	0.392246	0.0838405	−0.0947755
3	0.418071	0.0258245	−0.0051412
4	0.419638	0.0015672	−0.0000175
5	0.419643	0.0000054	−0.0000012

Tablica 2: Newtonova metoda za funkciju iz Primjera 2.

1.3 Modifikacije Newtonove metode

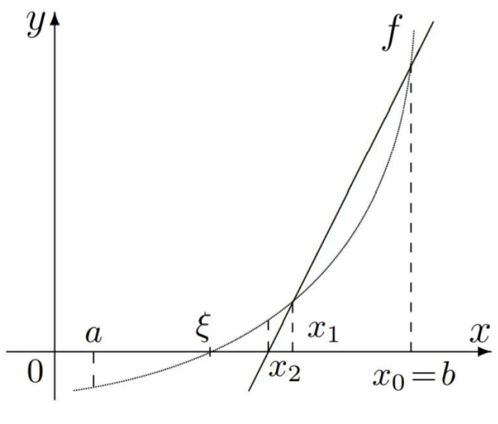
Primjena Newtonove metode ponekad je otežana jer u svakom koraku zahtijeva računanje vrijednosti funkcije i njezine derivacije. Zbog toga koriste se tzv. "modifikacije Newtonove metode" u kojima se izbjegava izračunavanje derivacije funkcije u svakoj iteraciji.

Jedna od najvažnijih modifikacija je **metoda sekanti**. Ova metoda se sastoji u tome da na intervalu $I = [a, b]$ izaberemo dvije početne aproksimacije x_0 i x_1 te povučemo sekantu grafa kroz točke $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$. Narednu aproksimaciju x_2 dobit ćemo kao sjecište sekante s osi x

$$x_2 = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}, \quad \text{ako je } f(x_1) \neq f(x_0).$$

Ponavljajući postupak, dobivamo niz definiran rekurzivnom formulom

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \quad f(x_n) \neq f(x_{n-1}),\ n = 1, 2, \ldots$$



Slika 4: Metoda sekanti

Uz uvjete $f'(\xi) \neq 0$ i $f''(\xi) \neq 0$, metoda sekanti ima brzinu konvergencije $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ ako su početne aproksimacije x_0, x_1 birane dovoljno blizu rješenja ξ.

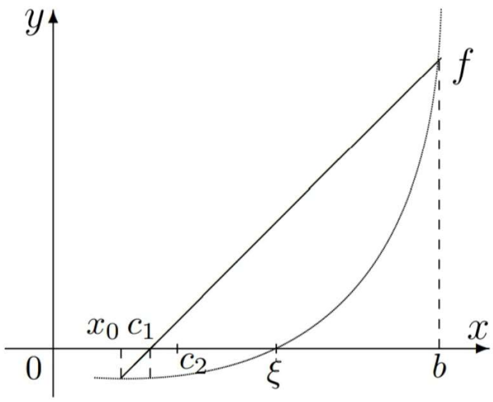
Također metoda koju možemo smatrati jednom modifikacijom Newtonove metode je metoda **regula falsi**. Pretpostavit ćemo da je funkcija f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$ i da je $f(a) \cdot f(b) < 0$. Označimo: $x_0 := a$, $b_0 := b$ i povucimo pravac točkama $(x_0, f(x_0))$, $(b_0, f(b_0))$. Taj pravac siječe os x u točki

$$c_1 = \frac{x_0 f(b_0) - b_0 f(x_0)}{f(b_0) - f(x_0)}, \quad x_0 < c_1 < b_0.$$

Nultočka je pronađena ako je $f(c_1) = 0$, u protivnom postupimo na sljedeći način

$$\text{ako je} \quad f(c_1) \cdot f(x_0) > 0, \quad \begin{matrix} x_1 = c_1 \\ b_1 = b_0 \end{matrix} \quad \text{inače} \quad \begin{matrix} x_1 = c_1 \\ b_1 = x_0 \end{matrix}$$

i povucimo pravac točkama $(x_1, f(x_1))$, $(b_1, f(b_1))$. Ponavljajući postupak dobivamo niz (x_n) koji linearnom brzinom konvergira prema jednom korijenu jednadžbe $f(x) = 0$ na intervalu $[a, b]$.



Slika 5: Regula falsi

Primjer 3. *S točnošću $\varepsilon = 0.005$, metodom sekanti odredimo rješenje jednadžbe*

$$x^3 + 2x^2 - 3x - 5 = 0$$

na intervalu $[-1.8, 0]$.

Rješenje:

Označimo $I = [-1.8, 0]$, gdje je $x_0 = -1.8$, a $x_1 = 0$. Treba provjeriti vrijedi li $f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$. Računamo:

$$f(-1.8) \cdot f(0) = -5.24 < 0.$$

Kriterij zaustavljanja glasi

$$\frac{|f(x_n)|}{m_1} < \varepsilon, \quad \text{gdje je} \quad m_1 = \min_{x \in I} |f'(x)|.$$

Kako je $x \in [-1.8, 0]$, slijedi $f'(x) = 3x^2 + 4x - 3 < 0$ pa je $|f'(x)| = -3x^2 - 4x + 3$. Nadalje računamo

$$\begin{aligned} m_1 = \min_{x \in I} |f'(x)| &= \min_{x \in [-1.8,0]} |3x^2 + 4x - 3| \\ &= \min_{x \in [-1.8,0]} (-3x^2 - 4x + 3) = 0.48. \end{aligned}$$

Koristeći rekurzivnu formulu

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

dobivamo sljedeće vrijednosti navedene u Tablici 3.

n	x_n	$\frac{\lvert f(x_n)\rvert}{m_1}$
0	-1.8	$-$
1	0	$-$
2	-1.488095	1.24554
3	-1.32916	0.35965
4	-1.26464	0.06252
5	-1.27419	0.00201

Tablica 3: Tijek iterativne metode

Kako je $\frac{|f(x_5)|}{m_1} = 0.00201 < \varepsilon$, slijedi da tražena aproksimacija nultočke iznosi $x_5 = -1.27419$.

2 Rješavanje sustava nelinearnih jednadžbi

Postoji mogućnost generalizacije metoda za rješavanje sustava nelinearnih jednadžbi. Pretpostavimo da rješavamo sustav nelinearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} f_i(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

pri čemu je $n \geq 2$ i $f_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ i = 1, \cdots, n$.
Ako uvedemo vektorske oznake $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))^T$, gdje je $\mathbf{f} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, onda sustav (3) možemo zapisati kao

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Definicija 1. *Neka je* $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *neprekidna diferencijabilna funkcija i* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$*. Matricu*

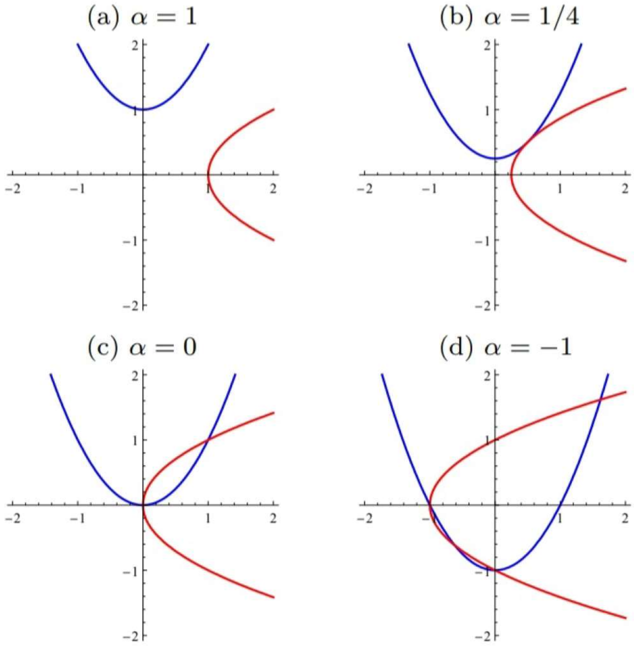
$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

nazivamo ***Jacobijeva matrica****.*

Primjer 4. *Promatrat ćemo sustav nelinearnih jednadžbi za različite vrijednosti parametra* $\alpha \in [0, 1]$*. Neka je*

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &\equiv x_1^2 - x_2 + \alpha = 0 \\ f_2(x_1, x_2) &\equiv -x_1 + x_2^2 + \alpha = 0. \end{aligned}$$

Kao što možemo vidjeti na Slici 6, za različite vrijednosti parametra $\alpha \in [0, 1]$ sustav može biti nerješiv ili može imati jedno, dva ili tri rješenja.



Slika 6: Grafički prikaz sustava nelinearnih jednadžbi

2.1 Newtonova metoda za rješavanje sustava nelinearnih jednadžbi

Newtonova metoda može se generalizirati za rjesavanje sustava nelinearnih jednadžbi (3). Najprije ćemo izabrati početnu aproksimaciju $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})^T \in \mathbb{R}^n$ i svaku od funkcija f_i razvit ćemo u Taylorov red u okolini $x^{(0)}$, te odgovarajuću linearnu aproksimaciju označit ćemo s $\tilde{f}_i$:

$$\tilde{f}_i(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}^{(0)}) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x_j}(x_j - x_j^{(0)}), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Sada umjesto sustava (3) rješavat ćemo sustav

$$\tilde{f}_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

što ćemo zapisati i u matričnom obliku na sljedeći način

$$\mathbf{J}^{(0)}\mathbf{s} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)}), \quad \text{gdje je} \tag{4}$$

$$\mathbf{J}^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} x_1 - x_1^{(0)} \\ \vdots \\ x_n - x_n^{(0)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}^{(0)}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}^{(0)}) \end{bmatrix}.$$

Matricu $\mathbf{J}$ nazivat ćemo **Jacobijeva matrica** ili **Jacobijan** sustava u točki $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. Nova aproksimacija rješenja će biti

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{s}^{(0)},$$

gdje je $\mathbf{s}^{(0)}$ rješenje sustava (4). Općenito, dobit ćemo iterativni postupak

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}^{(k)}, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{5}$$

gdje je $\mathbf{s}^{(k)}$ rješenje sustava

$$\mathbf{J}^{(k)}\mathbf{s} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}), \tag{6}$$

pri čemu je $\mathbf{J}^{(k)}$ odgovarajuća Jacobijeva matrica u točki $\mathbf{x}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$. Možemo primijetiti da se iterativni postupak (5)-(6) uz pretpostavku regularnosti Jacobijana $\mathbf{J}^{(k)}$ može zapisati u obliku

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \left(\mathbf{J}^{(k)}\right)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}), \quad k = 0, 1, \ldots \tag{7}$$

Postupak (5)-(6) numerički je stabilniji pa se iterativni proces (7) rijetko koristi.

Primjer 5. *Koristeći Newtonovu metodu, odredit ćemo prve dvije aproksimacije rješenja sustava*

$$4x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - \sin(x_1 - x_2) = 0$$

uz početnu aproksimaciju $\boldsymbol{x}^{(0)} = (1, 0)^T$.

Rješenje:

Prvo ćemo zapisati sustav u matričnom obliku

$$\mathbf{f}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 4x_1^2 + x^2 - 4 \\ x_1 + x_2 - \sin(x_1 - x_2) \end{bmatrix}$$

pa Jacobijana

$$\mathbf{J}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 8x_1 & 2x_2 \\ 1 - \cos(x_1 - x_2) & 1 + \cos(x_1 - x_2) \end{bmatrix}.$$

Da bi odredili $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{s}^{(0)}$ trebamo riješiti sustav

$$\mathbf{J}^{(0)}\mathbf{s}^{(0)} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)}),$$

gdje je

$$\mathbf{J}^{(0)} = \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{J}(1, 0) = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 1 - \cos 1 & 1 + \cos 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{f}(1, 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 - \sin 1 \end{bmatrix}.$$

Sada imamo sustav

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 1 - \cos 1 & 1 + \cos 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1^{(0)} \\ s_2^{(0)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 - \sin 1 \end{bmatrix}.$$

Rješenje prethodnog sustava je

$$\mathbf{s}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.49 \end{bmatrix}$$

te za aproksimaciju dobivamo

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.49 \end{bmatrix}.$$

Dalje želimo odrediti $\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{s}^{(1)}$ pa najprije moramo odrediti $\mathbf{s}^{(1)}$ iz sustava

$$\mathbf{J}^{(1)}\mathbf{s}^{(1)} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(1)}),$$

gdje je

$$\mathbf{J}^{(1)} = \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(1)}) = \mathbf{J}(1, -0.49) = \begin{bmatrix} 8 & -\frac{49}{50} \\ 3.38 \cdot 10^{-4} & 1.9997 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(1)}) = \mathbf{f}(1, -0.49) = \begin{bmatrix} 0.2401 \\ 0.484 \end{bmatrix}.$$

Sada imamo sustav

$$\begin{bmatrix} 8 & -\frac{49}{50} \\ 3.38 \cdot 10^{-4} & 1.9997 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1^{(1)} \\ s_2^{(1)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0.2401 \\ 0.484 \end{bmatrix}.$$

Rješenje prethodnog sustava je

$$\mathbf{s}^{(1)} = \begin{bmatrix} -0.0597 \\ -0.242 \end{bmatrix}$$

te za aproksimaciju dobivamo

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.9403 \\ -0.732 \end{bmatrix}.$$

Tražene aproksimacije iznose

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.49 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} -0.0597 \\ -0.242 \end{bmatrix}.$$

2.2 Kvazi-Newtonove metode

Kvazi-Newtonove metode, koje je 1965. godine uveo C. G. Broyden, zauzimaju vrlo važno mjesto među metodama za rješavanje sustava nelinearnih jednadžbi. Ovim metodama se izbjegava računanje Jacobijana u svakoj iteraciji kao što je to slučaj kod Newtonove metode.

a) **Broydenova metoda**
Iterativna metoda zadana s

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}^{(k)}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

gdje je $\mathbf{s}^{(k)}$ rješenje sustava

$$\mathbf{B}_k\mathbf{s} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}),$$

gdje su $\mathbf{B}_k$ matrice koje uz dobar izbor početne aproksimacije $\mathbf{B}_0$ sve više nalikuju Jacobijanu, a izračunavaju se iz rekurzivne formule:

$$\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{B}_k + \frac{(\mathbf{y}_k - \mathbf{B}_k\mathbf{s}_k)\mathbf{s}_k^T}{(\mathbf{s}_k, \mathbf{s}_k)}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

gdje je

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k+1)}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}), \quad \mathbf{s}_k = \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}.$$

b) **Davidon-Fletcher-Powellova (DFP) metoda**
Iterativna metoda zadana s

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \mathbf{H}_k \mathbf{f}(\mathbf{x}^k), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

gdje je

$$\mathbf{H}_{k+1} = \mathbf{H}_k + \frac{\mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^T}{(\mathbf{y}_k, \mathbf{s}_k)} - \frac{\mathbf{H}_k \mathbf{y}_k \mathbf{y}_k^T \mathbf{H}_k}{(\mathbf{y}_k, \mathbf{H}_k, \mathbf{y}_k)}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

c) **Broyden-Fletcher-Goldfarb-Schanoova (BFGS) metoda**
Iterativna metoda zadana s

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^k - \mathbf{H}_k \mathbf{f}(\mathbf{x}^k), \quad k = 0, 1, \ldots$$

gdje je

$$\mathbf{H}_{k+1} = \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{s}_k \mathbf{y}_k^T}{\mathbf{y}_k, \mathbf{s}_k}\right) \mathbf{H}_k \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{y}_k \mathbf{s}_k^T}{\mathbf{y}_k, \mathbf{s}_k}\right) + \frac{\mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^T}{\mathbf{y}_k, \mathbf{s}_k}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Možemo primijetiti da je rang $(\mathbf{B}_{k+1} - \mathbf{B}_k) = 1$. Zbog toga kažemo da je Broydenova metoda ranga 1. Metode DFP ili BFGS, u kojima su korekcije Jacobijana $\mathbf{H}_k$ ranga 2, koristit ćemo ako je Jacobijan simetrična matrica. Rekurzivne formule za generiranje korekcija $\mathbf{H}_k$ čuvaju simetričnost i pozitivnu definitnost korekcije kod DFP i BFGS metode.

Primjer 6. *Koristeći Broydenovu metodu, odredit ćemo prve dvije aproksimacije rješenja sustava*

$$x_1 + 2x_2 - 2 = 0$$

$$x_1^2 + 4x_2^2 - 4 = 0$$

uz početnu aproksimaciju $\boldsymbol{x}^{(0)} = (1, 2)^T$.

Rješenje:

Prvo ćemo zapisati sustav u matričnom obliku

$$\mathbf{f}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 - 2 \\ x_1^2 + 4x_2^2 - 4 \end{bmatrix}$$

pa Jacobijana

$$\mathbf{J}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_2 & x_1 - 1 \\ 2x_1 & -2x_2 \end{bmatrix}.$$

Da bi odredili $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{s}^{(0)}$ trebamo riješiti sustav

$$\mathbf{B}_0 \mathbf{s}^{(0)} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)}),$$

gdje je

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{J}^{(0)} = \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{J}(1, 2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 16 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{f}(1, 2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Sada imamo sustav

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1^{(0)} \\ s_2^{(0)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 3 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Rješenje prethodnog sustava je

$$\mathbf{s}^{(0)} = \begin{bmatrix} -\frac{22}{12} \\ -\frac{7}{12} \end{bmatrix}$$

te za aproksimaciju dobivamo

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{10}{12} \\ \frac{17}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.83 \\ 1.42 \end{bmatrix}.$$

Dalje želimo odrediti $\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{s}^{(1)}$ pa najprije moramo odrediti $\mathbf{s}^{(1)}$ iz sustava

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{s}^{(1)} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(1)}),$$

gdje je

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_0 + \frac{(\mathbf{y}_0 - \mathbf{B}_0 \mathbf{s}_0)\mathbf{s}_0^T}{(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_0)}, \quad \mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(1)}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} -3 \\ -\frac{149}{18} \end{bmatrix}$$

$$\Rrightarrow \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0.34 & 15.26 \end{bmatrix}$$

i

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(1)}) = \mathbf{f}\left(-\frac{10}{12}, \frac{17}{12}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{85}{18} \end{bmatrix}.$$

Sada imamo sustav

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0.34 & 15.26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1^{(1)} \\ s_2^{(1)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{85}{18} \end{bmatrix}.$$

Rješenje prethodnog sustava je

$$\mathbf{s}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ -0.3 \end{bmatrix}$$

te za aproksimaciju dobivamo

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} -0.23 \\ 1.12 \end{bmatrix}.$$

Tražene aproksimacije iznose

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} -0.83 \\ 1.42 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ -0.3 \end{bmatrix}.$$

Literatura

[1] Z. Drmač, V. Hari, M. Marušić, M. Rogina, S. Singer, S. Singer, *Numerička analiza*, Predavanja i vježbe, PMF - Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2003.

[2] R. Scitovski, *Numerička matematika*, Izmijenjeno i dopunjeno izdanje, Odjel za matematiku, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Osijek, 2015.

[3] V. Šolić, *Newtonova metoda za rješavanje nelinearnih jednadžbi*, Završni rad, Odjel za matematiku, Osijek, 2020.

[4] `https://www.fsb.unizg.hr/mat-4/OldWeb/3.pdf`

[5] `https://rudar.rgn.hr/~rrajic/nids_rajnarajic/predavanjaNM.pdf`

[6] `https://mapmf.pmfst.unist.hr/~milica/Numericka_matematika/Folije_za_predavanja/UNM_Nelinjedn.pdf`